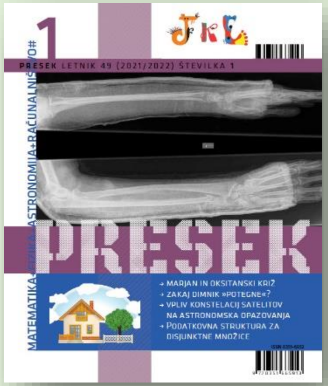
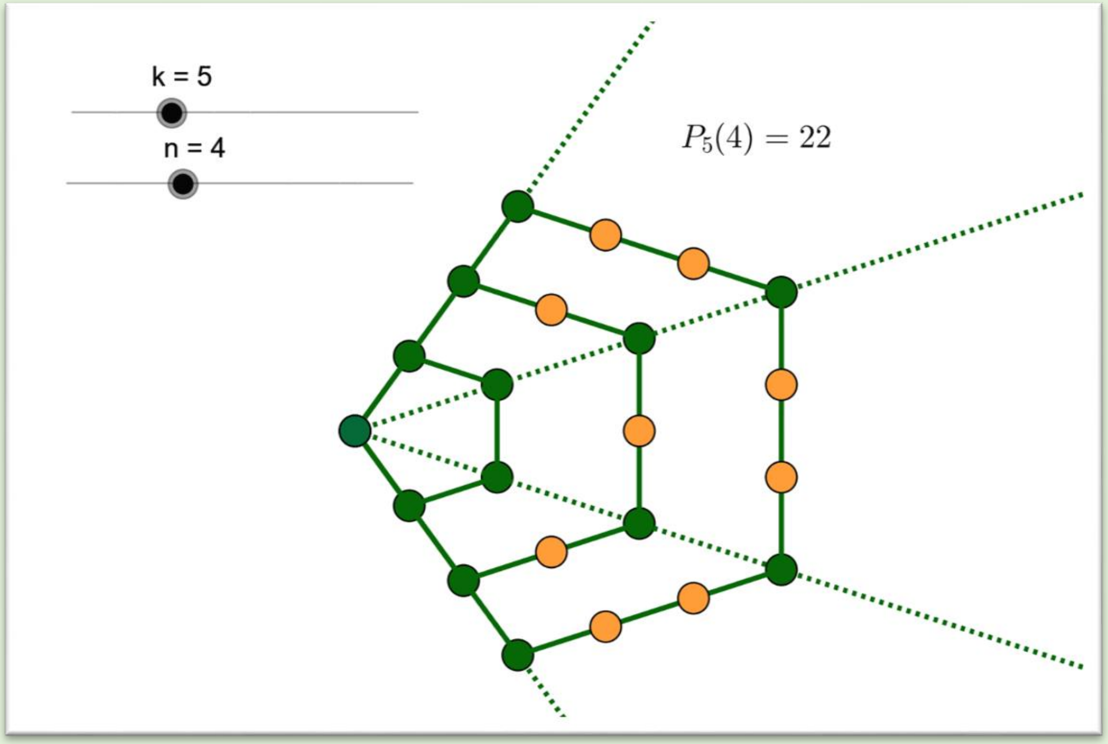
1. srečanje,
15.9.2021 ob 17h
(preko spleta)

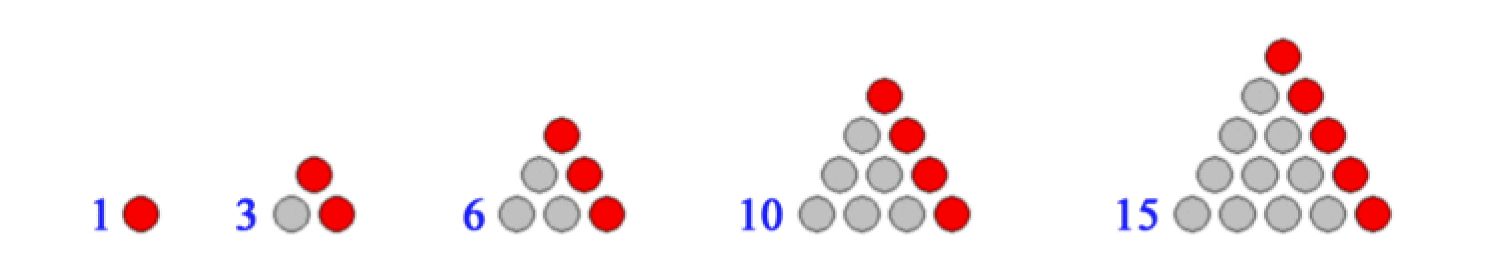
Presekov seminar za matematiko,
fiziko in astronomijo
1. srečanje, 15. 9. 2021





B. Kuzman: ***Vizualizacija mnogokotniških števil v GeoGebri***

- **Trikotniška števila:**

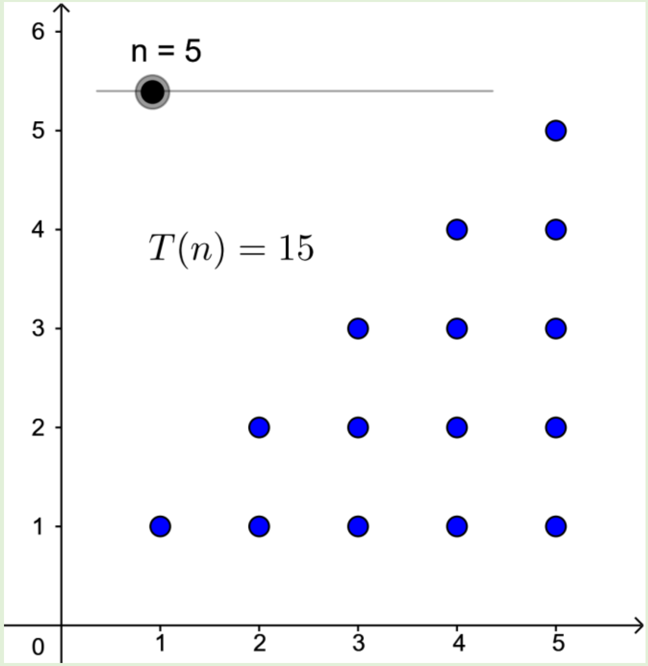


$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

Osnovna rešitev:

- Izdelamo drsnik n
- Vpišemo ukaz

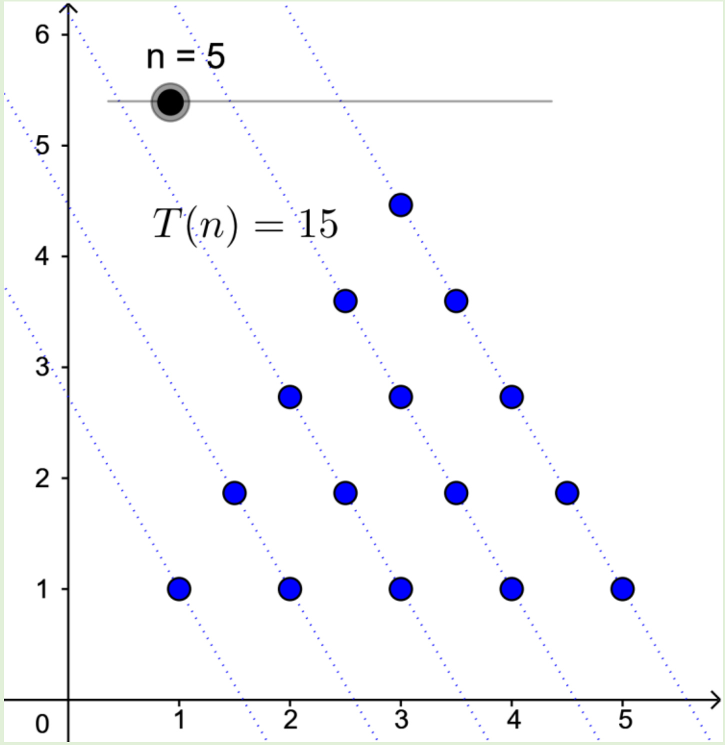
```
Zaporedje(Zaporedje((j,k),k,1,j),j,1,n)
```



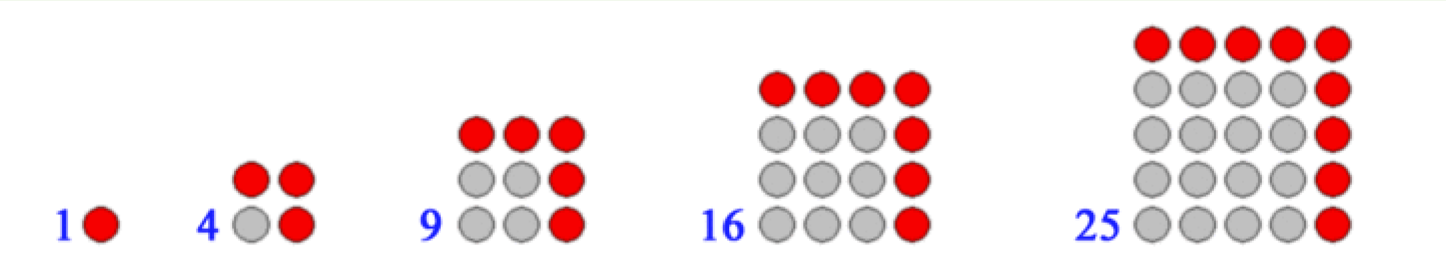
Izboljšana rešitev:

- Točke namesto navpično postavljamo na poševne premice, smerni vektor je (-1/2,sqrt(3)/2), prva točka naj ima koordinato (j,1)
- Ustrezni ukaz je

```
Zaporedje(Zaporedje((j,1)+(k-1)*(-1/2,sqrt(3)/2),k,1,j),j,1,n)
```



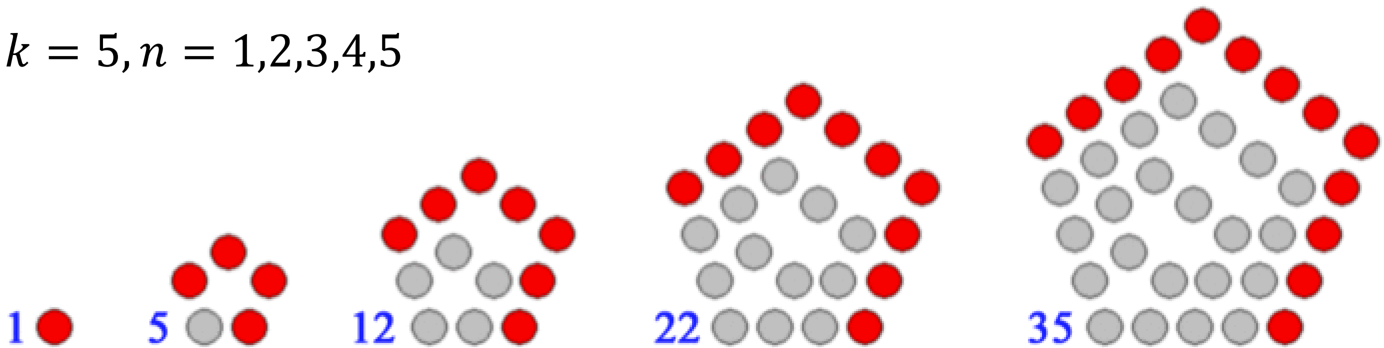
- **Kvadratna števila:**
  - Ni težko, poskusite sami (zadošča spremeniti 1 znak v osnovni kodi za trikotniška števila)



- **Splošna mnogokotniška števila:**
  - $P_k(n)$ pomeni n-to k-kotniško število

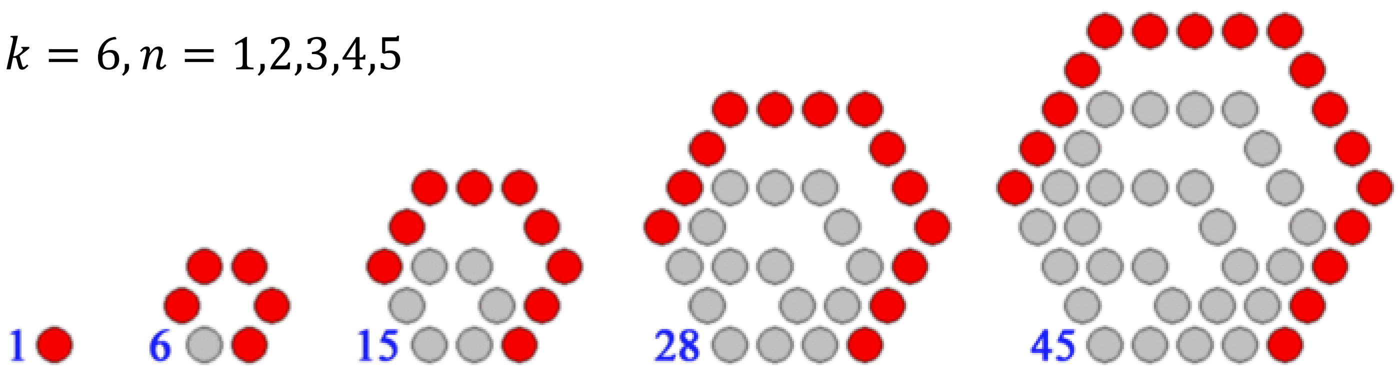
Pentagonal numbers [edit]

$k = 5, n = 1,2,3,4,5$



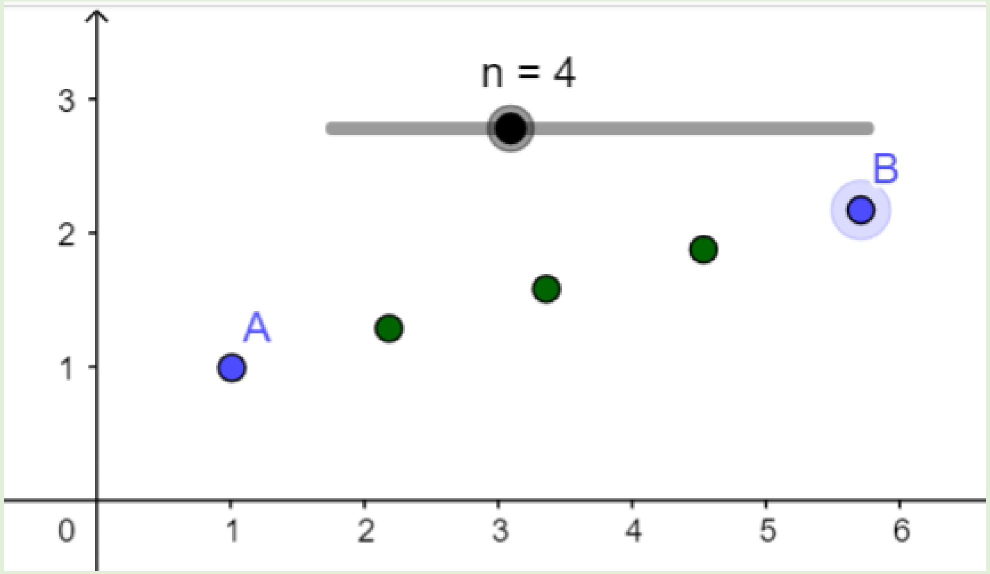
Hexagonal numbers [edit]

$k = 6, n = 1,2,3,4,5$



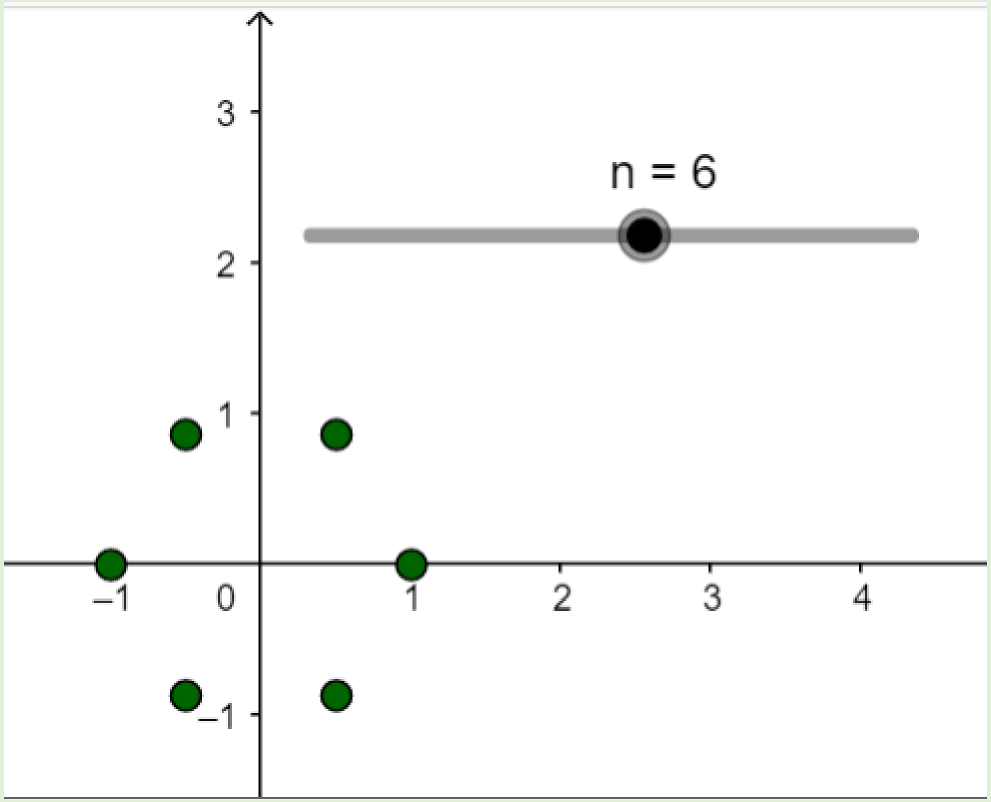
- **Pomožni trik 1:** Razdelitev daljice AB s točkami na n enakih delov s pomočjo enačbe daljice:

```
Zaporedje(A+(B-A)*j/n,j,1,n-1)
```



- **Pomožni trik 2:** Razdelitev enotske krožnice s točkami na n enakih delov s pomočjo polarnih koordinat:

```
Zaporedje((1;2*pi*j/n),j,0,n-1)
```



- **Koraki za končni izdelek:**
  - Izdelamo drsnika za k in n.
  - Označimo točko (0,0)
  - Narišemo zaporedje oglišč naraščajočih k-kotnikov:

```
Zaporedje(
   Zaporedje((i,0)+(i;2*pi*j/k+pi),
         j,0,k-1),i,1,n-1)
```

  - Dodamo še delitvene točke na stranicah:

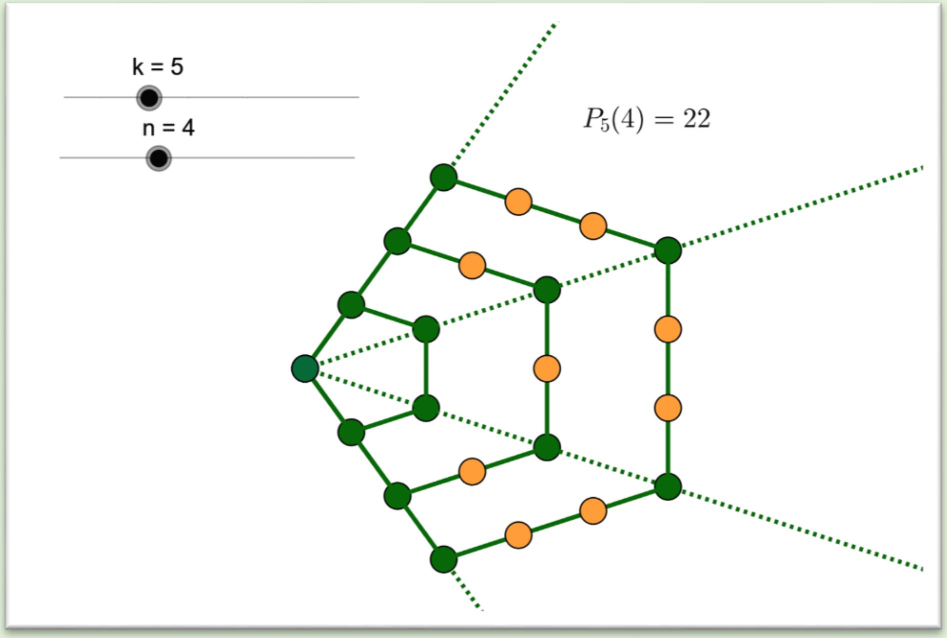
```
Zaporedje(Zaporedje(Zaporedje(
(i,0)+(i;pi+2*pi*j/k)+s*((i;pi+2*pi*(j+
1)/k)-(i;pi+2*pi*j/k))/i,
   s,1,i-1),
         j,1,k-2),
               i,1,n-1)
```

  - Izdelek še malo dodelamo (barve, izpis vrednosti…).

- **Dodatno**
  - Izris stranic mnogokotnikov:

```
Zaporedje(Zaporedje(Daljica((i,0)+(i;2*pi*j/k+pi),(i,0)+(i;2*pi*(j+1)/k+pi)),j,0,k-1),i,1,n-1)
```

  - Formula za $P_k(n) = \frac{\big((k-2)n-(k-4)\big)n}{2}$
  - [Končna verzija](#) apleta



Dodatno razlago najdete v aktualni številki revije Presek

Mnogokotniška števila

Boštjan Kuzman

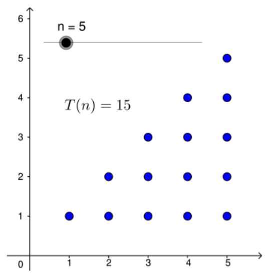
Mnogokotniška števila dobimo z razporejanjem enakih krožcev v obliko pravilnih mnogokotnikov. Lastnosti takih števil so starodavne civilizacije občudovale še pred odkritjem pisave in zahtevnejših matematičnih postopkov, mi pa si bomo ogledali, kako jih narisati s pomočjo programa GeoGebra.

Trikotniška števila

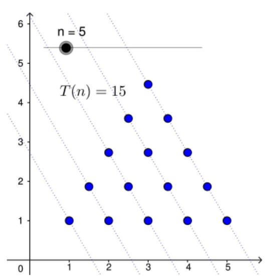
Najpreprostejša mnogokotniška števila so trikotniška. Za n-to trikotniško število $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ potrebujemo trikotnik z n stolpci (ali vrsticami), v katerem ima vsak naslednji stolpec en krožec več kot prejšnji. Z uporabo dvojnih zaporedij lahko trikotniška števila v GeoGebri narišemo z le enovrstičnim ukazom. Namesto krožcev bomo risali kar točke in jih nato nekoliko odebelili z orodji za obliko. Najprej ustvarimo drsnik z imenom n, ki naj bo celo število med 1 in 10. Nato ustvarimo zaporedje $j = 1, \ldots, n$ stolpcev, v katerem j-ti stolpec predstavlja zaporedje $k = 1, \ldots, j$ točk tako, da uporabimo ukaz `Zaporedje(Zaporedje((j,k),k,1,j),j,1,n)` (glej sliko 1).

Da bodo točke zares predstavljale pravilni oziroma enakostranični trikotnik, pa jih moramo še nekoliko zamakniti. Predstavljajmo si, da točke v j-tem stolpcu ležijo na premici skozi točko $(j, 1)$ z enotskim smernim vektorjem $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, kar ustreza desni stranici enakostraničnega trikotnika z vodoravno osnovnico. Ustrezno razporeditev dobimo z ukazom `Zaporedje(Zaporedje((j,1)+(k-1)*(-1/2,sqrt(3)/2),k,1,j),j,1,n)` (glej sliko 2).

S premikanjem drsnika lahko zdaj prikažemo različna trikotniška števila, dodatno pa lahko z orodjem za besedilo na zaslon izpišemo tudi ustrezno vrednost $T(n)$.



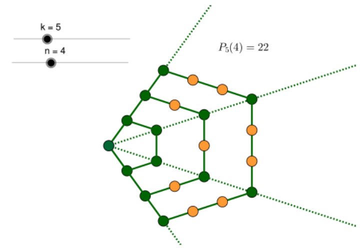
SLIKA 1.
`Zaporedje(Zaporedje((j,k),k,1,j),j,1,n)`



SLIKA 2.
`Zaporedje(Zaporedje((j,1)+(k-1)*(-1/2,sqrt(3)/2),k,1,j),j,1,n)`

Splošna k-kotniška števila

Splošna mnogokotniška števila dobimo z dodajanjem krožcev v pravilni k-kotnik, tako da v n-tem koraku na vsaki stranici leži en krožec več kot prej. Z nekaj truda bi lahko izpeljali znano formulo za izračun n-tega k-kotniškega števila $P_k(n) = \frac{n}{2}((k-2)(n-1)+2)$, a se bomo raje posvetili potrebnim korakom za izdelavo prikaza mnogokotniških števil z dvema drsnikoma v GeoGebri.



SLIKA 3.

Možnih je seveda več načinov, sam pa predlagam uporabo polarnih koordinat: ukaz `(r;a)` v GeoGebri nariše točko, ki je za razdaljo `r` oddaljena od koordinatnega izhodišča, premica skozi to točko in izhodišče pa z osjo x oklepa kot `a`. Oglišča pravilnega petkotnika s središčem v točki $(0,0)$ lahko zato narišemo z ukazom `Zaporedje((1;2*pi*j/5),j,0,4)`, ki razdeli kot 2π na pet enakih delov in označi ustrezne točke na enotski krožnici.

Mnogokotniška števila zdaj narišemo z naslednjimi koraki:

- Izdelamo drsnika za k in n ter označimo točko $(0,0)$.
- Izdelamo zaporedje n naraščajočih k-kotnikov s skupnim krajiščem v točki $(0,0)$. Oglišča posameznega k-kotnika pri tem narišemo z uporabo polarnih koordinat in delitvijo kroga na k delov, denimo `Zaporedje((1;2*pi*j/k),j,0,k-1)`. Z uporabo dvojnega zaporedja pa narišemo zaporedje k-kotnikov tako, da v vsakem koraku nekoliko povečamo radij in premaknemo središče. V moji rešitvi raste radij od 1 do n, središče pa se pomika v desno od $(1,0)$ do $(n,0)$. S tem smo dobili točke, ki so na sliki zelene:

  `Zaporedje(Zaporedje((i,0)+(i;2*pi*j/k+pi), j,0,k-1),i,1,n-1)`

- Če želimo narisati tudi stranice mnogokotnikov, lahko posebej dodamo še ustrezno zaporedje daljic, ki povezujejo dve zaporedni točki od prej:

  `Zaporedje(Zaporedje(Daljica((i,0)+ (i;2*pi*j/k+pi),(i,0)+(i;2*pi*(j+1)/k+pi)), j,0,k-1),i,1,n-1)`

  Ukaz, s katerim so na sliki narisane zeleno črtkane nosilke oglišč, pa prepustimo bralcu.

- Narisali smo mnogokotnike, a dodati je potrebno še delitvene točke na notranjih stranicah j-tega k-kotnika. Delitvene točke neke daljice AB lahko določimo s pomočjo vektorske enačbe premice $A + s(B-A)$, kjer parameter s zavzame ustrezne vrednosti med 0 in 1. Ukaz `Zaporedje((0,0)+s*(1,1)/5,s,1,4)` bi na primer razdelil daljico od $(0,0)$ do $(1,1)$ na pet enakih delov in vrnil štiri notranje delitvene točke. Če to idejo uporabimo za točke, ki predstavljajo krajišča notranjih daljic mnogokotnikov, bomo s tem dodali še manjkajoče točke, ki so na sliki oranžne:

  `Zaporedje(Zaporedje(Zaporedje((i,0)+ (i;pi+2*pi*j/k)+s*((i;pi+2*pi*(j+1)/k)- (i;pi+2*pi*j/k))/i,s,1,i-1),j,1,k-2),i,1,n-1)`

- V zadnjem koraku lahko vse skupaj še nekoliko grafično dodelamo in s pomočjo formule za $P_k(n)$ tudi izpišemo željeno vrednost na zaslon.

Tako izdelano ponazoritev mnogokotniških števil si lahko bralci ogledajo na spletnem naslovu www.geogebra.org/classic/ukkzg4ps.

× × ×