KNJIŽNICA SIGMA – 100

Andrej Guštin, Dunja Fabjan

Zbrane naloge tekmovanj iz astronomije

Srednja šola

DMFA – založništvo
Ljubljana 2017

CIP – Katabložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

Zbrane naloge iz astronomskih tekmovanj

Osnove astronomije

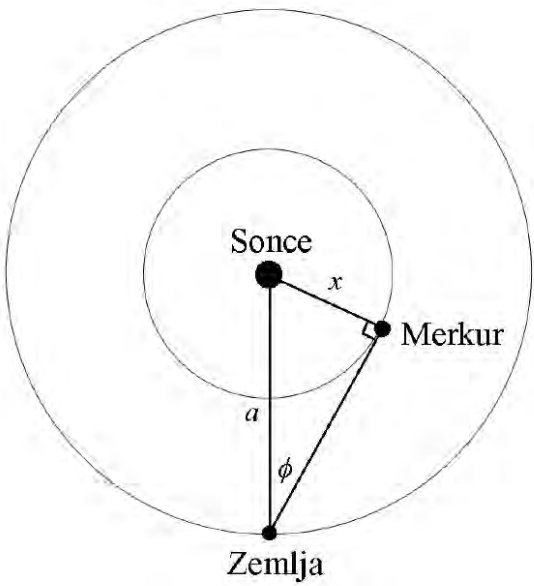
2009 ST Izračunaj oddaljenost Merkurja od Sonca v astronomskih enotah, če veš, da je njegova največja navidezna kotna oddaljenost od Sonca gledano z Zemlje (največja elongacija) 21°. Zemlja je od Sonca oddaljena eno astronomsko enoto. Nariši skico!

Ko je Merkur v največji elongaciji, so Zemlja, Sonce in Merkur v ogliščih pravokotnega trikotnika, pri čemer sta pravokotni zveznici Sonce-Merkur in Zemlja-Merkur (glej sliko). Velja:

$$\sin\theta = x/a \ ,$$

kjer je x razdalja med Soncem in Merkurjem, a pa oddaljenost Zemlje od Sonca.

$$x = a\sin\theta = 1\text{a.e.}\cdot 21^\circ = 0,36\text{a.e.} = 53,8\cdot 10^6\text{km} \ .$$



2009 ST Izračunaj gostoto Venerine atmosfere blizu površja tega planeta, če ima tam atmosfera temperaturo 462 °C in tlak 93 barov. Predpostavi, da je atmosfera sestavljena le iz ogljikovega dioksida (CO_2).

Za Venerino atmosfero velja plinska enačba

$$pV = \frac{m}{M} RT \,,$$

kjer je p tlak, V prostornina, m masa, R splošna plinska enačba, T temperatura in M molska masa plina.

Gostoto ρ dobimo tako, da plinsko enačbo delimo z V, saj je $\rho = m/V$. Za gostoto dobimo:

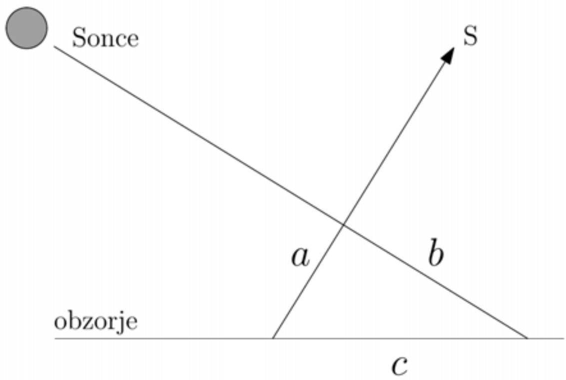
$$\rho = \frac{pM}{RT} \ .$$

Količine moramo izraziti v osnovnih enotah, torej tlak v pascalih in temperaturo v kelvinih. Molekulska masa CO_2: $M = 44$ kg/kmol. Za gostoto Venerine atmosfere dobimo:

$$\rho = \frac{9,3 \cdot 10^6 \mathrm{Pa} \cdot 44 \mathrm{kg/kmol}}{8314 \mathrm{J/kmol\ K} \cdot 735\ \mathrm{K}} = 67 \mathrm{kg/m^3}$$

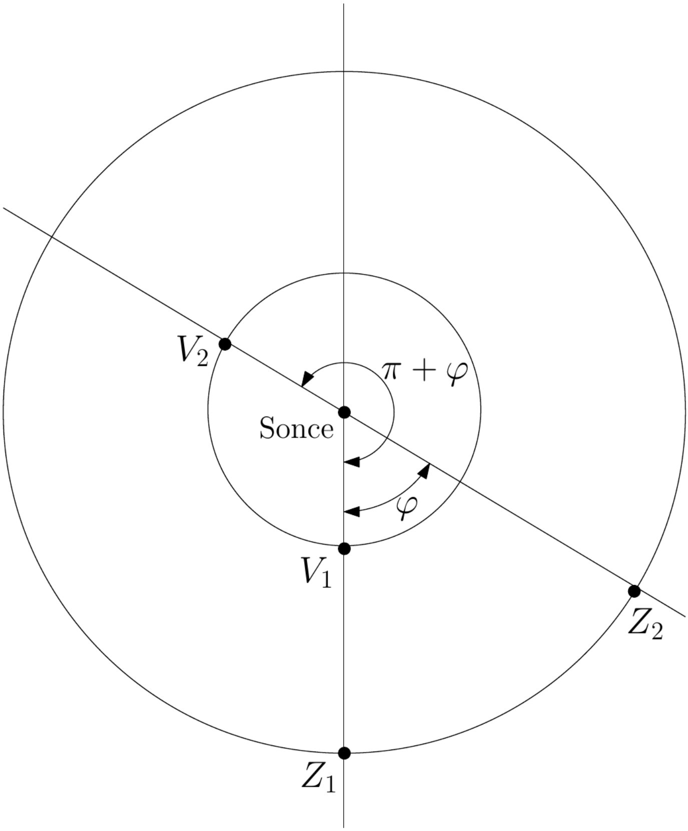
V opazovališču na severni zemljepisni širini 60° je v vodoravna tla 2009
poševno zapičena palica dolžine 1 meter, tako da je usmerjena na- DT
tanko proti severnemu nebesnemu polu. Kolikšna je dolžina sence, ki jo na tla meče palica ob lokalnem poldnevu na dan spomladanskega enakonočja (ekvinokcij)?

Palica kaže natanko proti severu, zato je vzporedna z Zemljino vrtilno osjo. Kot med palico in vodoravnico je 60°. Ob enakonočju je Sonce na nebesnem ekvatorju, zato je opoldan kot med smerjo proti Soncu in palico pravi kot. Palica a, svetlobni žarek Sonca ob vrhu palice b in senca c zato tvorijo enakostranični in pravokotni trikotnik, v katerem je senca hipotenuza. Sledi, da je dolžina sence $c = a/\cos 60^\circ = 2m$.



2009 DT Koliko časa mine med spodnjo in zgornjo konjunkcijo Venere (gledano z Zemlje)? Predpostavi, da se Zemlja in Venera gibljeta enakomerno in po krožnih orbitah. Obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 365,25 dneva, Venere pa 224,70 dneva.

Lega Venere ob spodnji (V1) in zgornji (V2) konjunkciji glede na Zemljo so označene na sliki. V času t med spodnjo in zgornjo konjunkcijo, se Venera premakne za kot $\varphi + \pi$, Zemlja pa za φ.
MANJKA RESITEV!!!!



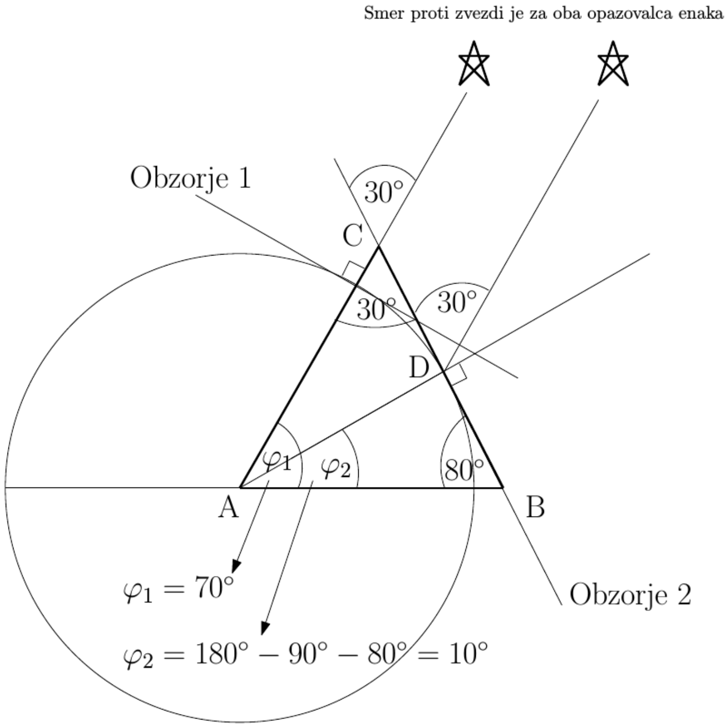
Luna se od ekliptike odmakne za največ 5°. Izračunaj najmanjšo zenitno oddaljenost Lune za opazovališče na zemljepisni širini 46°. Naklon ekliptike na nebesni ekvator je 23,5°. Pomagaj si s skico. 2010 ST

Luna ima najmanjšo zenitno oddaljenost z v zgornji kulminaciji in ko je nad ekliptiko. Tedaj je njena višina h za dano zemljepisno širino φ enaka $h = (90° - \varphi) + \epsilon$ (naklon ekliptike) $+5° = 72,5°$, Zenitna oddaljenost pa je $z = 90° - h = 17,5°$.

Prvi opazovalec se nahaja na severni geografski širini 70 stopinj in 2010 DT v določenem trenutku vidi neko zvezdo v zenitu. Drugi opazovalec se nahaja na istem poldnevniku, a bližje ekvatorju, in v istem trenutku vidi isto zvezdo na višini 30 stopinj nad obzorjem. Na kateri zemljepisni širini se nahaja drugi opazovalec?

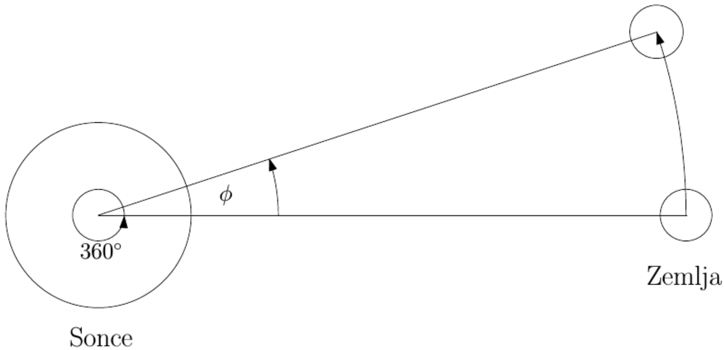
Pri reševanju si pomagamo s skico. Opazovalec na zemljepisni širini $\varphi_1 = 70^\circ$ vidi zvezdo v zenitu, zato je med horizontalno ravnino in smerjo proti zvezdi 90°. Ta smer je tudi poltrak, ki se začne v središču Zemlje. Drugi opazovalec je bližje ekvatorju in vidi isto zvezdo na višini 30°. Ker je zvezda v "neskončnosti", sta smeri proti zvezdi za oba opazovalca vzporedni. Obzorje drugega opazovalca, smer proti zvezdi za prvega opazovalca in ekvator tvorijo trikotnik ABC. Ker linija obzorja drugega opazovalca seka smer proti zvezdi pod kotom 30°, je kot med obzorjem drugega opazovalca in ekvatorjem $180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$. Tako lahko določimo kote v trikotniku ABD, kjer je Ď†2 iskana zemljepisna širina drugega opazovalca.

$$\varphi_2 = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$



Janezek je z opazovanjem peg ugotovil, da je vrtilna doba Sonca 27 dni. Pri tem ni upošteval, da Zemlja kroži okoli Sonca. Izračunaj, v kolikšnem času se Sonce dejansko enkrat zavrti okoli svoje osi. Upoštevaj, da ima leto 365, 25 dneva. 2010 ST

Zemlja kroži okoli Sonca v isti smeri kot se Sonce vrti, zato Janezek ni izmeril prave vrtilne dobe Sonca, temveč t.i. sinodsko dobo.



Zamislimo si, da je Janezek vrtilno dobo določi na sledeči način. Opazoval je pego, ki se je pojavila na robu Sonca in meri čas, v katerem se je zaradi vrtenja Sonca ista pega ponovno pojavila na robu Sonca. Tako je dobil sinodsko dobo T_s vrtenja Sonca 27 dni. (To ni edini način. Lahko bi meril le čas potovanja pege od roba do roba Sonca in bi dobili $T_s/2$.)

Ob predpostavki, da se Zemlja giblje po krožnici, je njena hitrost ves čas enaka in lahko za pišemo, da se v času T_s premakne za kot

$$\phi = T_s \cdot 360^\circ/365,25 = 27/365,25 \cdot 360^\circ = 26,6^\circ$$

Sonce pa se je v tem času zasukalo za en obrat in še za kot ϕ, da se je ista pega znašla v enaki legi glede na Zemljo:

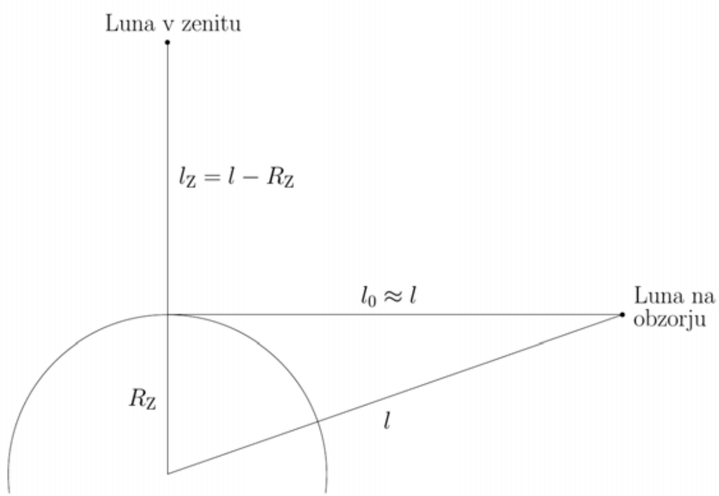
$$\alpha = 360^\circ + \phi = 360^\circ + 26,6^\circ = 386,6^\circ \ .$$

Do rešitve lahko pridemo z enostavnim sklepanjem. Sonce se je v času T_s zasukalo za $386,6^\circ$. Za 360° pa se je zasukalo v času T_0, ki je iskana vrtilna doba Sonca glede na oddaljene zvezde. S sklepnim računom dobimo:

$$T_0/T_s = 360^\circ/386,6^\circ \text{ oz. } T_0 = T_s 360^\circ/386,6^\circ = 25,1 \text{ dneva} \ .$$

2011 DT Jupiter je v opoziciji s Soncem. Čez koliko časa bo naslednjič v opoziciji? Obhodna doba Zemlje okoli Sonca je $365,25$ dneva, Jupitra pa 4333 dni.

Ob opoziciji so Sonce, Zemlja in Jupiter poravnani. Računamo, kot da se planeta okoli Sonca gibljeta enakomerno po krožnici. Skiciramo legi planetov ob dveh zaporednih opozicijah Jupitra. Zemlja v času t med dvema zaporednima opozicijama opiše kot $360^\circ + \alpha$, Jupiter pa kot α.

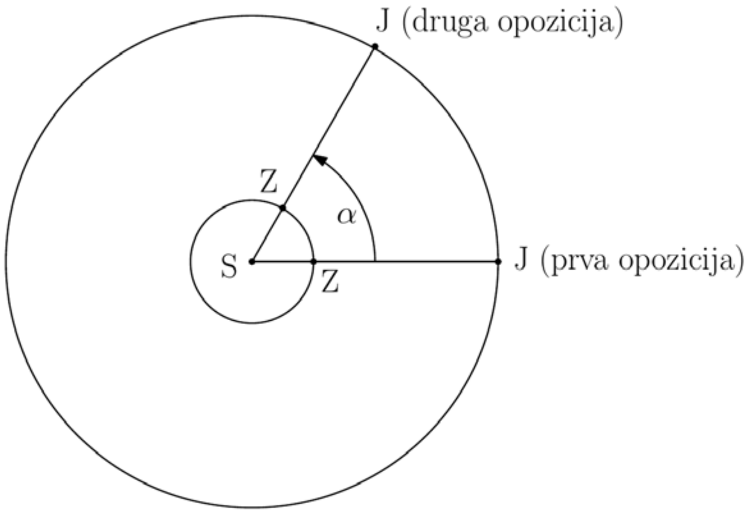


Obhodni čas Zemlje zapišemo s t_Z, Jupitra s t_J. Pomagamo si s sklepnim računom. Ker smo predpostavili, da je hitrost gibanja Jupitra in Zemlje konstantna, za Zemljo velja $360^\circ : t_Z = (360^\circ + \alpha) : t$, za Jupiter pa $360^\circ : t_J = \alpha : t$.

Iz zgornjega razmerja izrazimo $\alpha = 360^\circ t/t_J$. Ta izraz nesemo v prvo enačbo in dobimo $t/t_Z = 1 + t/t_J$ oz. $t = t_Z \cdot t_J/(t_J - t_Z) = 399$ dni.

Polna Luna je nad obzorjem videti večja kot takrat, ko je visoko na nebu, toda to je posledica optične prevare, ki nastane v naših možganih. V resnici je njen navidezni zorni kot, ko je nizko nad obzorjem, nekoliko manjši kot takrat, ko je višje na nebu. Oceni, za koliko je zorni kot Lune tik nad obzorjem manjši od njenega zornega kota, če bi bila v zenitu? Privzemi, da se oddaljenost Lune od središča Zemlje ne spreminja in znaša 60 polmerov Zemlje. Opomba za tiste, 2011 DT ki ne poznajo kotnih funkcij. Pri majhnih kotih lahko predpostaviš, da je zorni kot telesa sorazmeren z oddaljenostjo.

Razdaljo med Luno in središčem Zemlje označimo z l, polmer Zemlje z R_Z.

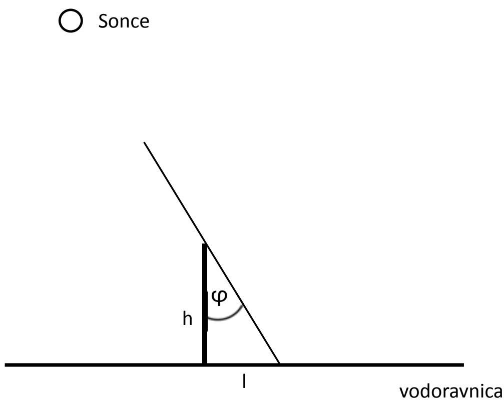


Ko ima opazovalec na Zemlji Luno v zenitu, je od Lune oddaljen $l_Z = l - R_Z = 59 R_Z$. Ko pa opazovalec vidi Luno na obzorju, je ta od njega oddaljena $l_o = \sqrt{(l^2 - R_Z^2)} \sim l = 60\ R_Z$. Pri majhnih kotih je razmerje kotov enako razmerju razdalj. Sledi, da je razmerje zornega kota Lune v zenitu ϑ_z in njenega zornega kota na obzorju ϑ_0 enako $\vartheta_z/\vartheta_0 = 59/60$.

Potemtakem je zorni kot Lune nad obzorjem za 1/60 manjši od tistega v zenitu.

2012 ST Janezek bi rad izmeril zemljepisno širino svojega opazovališča, ki se nahaja na severni polobli, zato se tega loti ob spomladanskem enakonočju. Ves dan meri dolžino sence, ki jo na vodoravna tla meče 1 meter visoka od Sonca obsijana navpična palica. Janezek ugotovi, da je najmanjša dolžina sence tistega dne 56 cm. Iz Janezkovih meritev izračunaj zemljepisno širino njegovega opazovališča. Rezultat izrazi v kotnih stopinjah in minutah in ga zaokroži na minute. Izračunaj, koliko kilometrov je Janezkovo opazovališče oddaljeno od severnega pola Zemlje? Polmer Zemlje je 6370 km. Rezultat zaokroži na kilometre.

Ob spomladanskem enakonočju je Sonce na nebesnem ekvatorju (deklinacija 0°), zato je opoldan kot φ med navpičnico na opazovališče in smerjo proti Soncu enak kar zemljepisni širini opazovališča.



Višina palice $h = 1$ m, dolžina sence $l = 56$ cm, ki jo opoldan meče senca na vodoravna tla.

Palica in senca sta kateti pravokotnega trikotnika, zato velja:

$$\tan\varphi = l/h \ . \tag{1}$$

Sledi:

$$\varphi = \arctan(l/h) = \arctan(0,56m/1m) = 29,25^\circ = 29^\circ 15' \ . \tag{2}$$

Zemljepisna širina kraja je $29^\circ 15' \pm 2'$.

Zemljepisna širina je kotna oddaljenost opazovališča od ekvatorja gledano s središča Zemlje. Kotna oddaljenost beta od pola je potemtakem:

$$\beta = 90^\circ - \varphi \ . \tag{3}$$

Iz 2 sledi:

$$\beta = 90^\circ - 29^\circ 15' = 60^\circ 45' \ . \tag{4}$$

Oddaljenost x od pola je lok velikega kroga s polmerom $R_Z = 6370$ km. Kot β moramo izraziti v radianih. Sledi

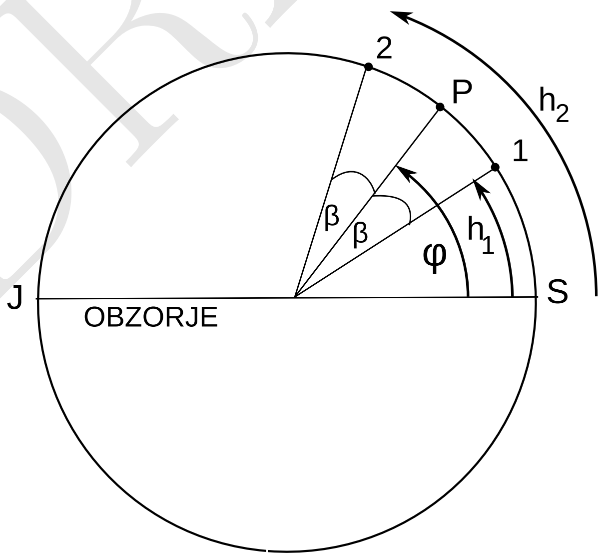
$$x = \beta \cdot R_Z = \pi \cdot \beta(^\circ) \cdot R_Z/180^\circ = 6754 \text{ km} \ . \tag{5}$$

Oddaljenost opazovališča od severnega pola Zemlje je 6031 km ± 50 km .

2012 DT Liza opazuje neko svetlo zvezdo in ugotovi, da ta v njenem kraju nikoli ne zaide. Porodi se ji zamisel, da bi z njo izmerila zemljepisno širino svojega opazovališča. Tako Liza izmeri najmanjšo in največjo višino nad severno točko ravnega obzorja, ki jo zvezda doseže pri svojem navideznem kroženju okoli nebesnega pola. Za najmanjšo višino izmeri $h_1 = 10°55{,}5'$, za največjo višino pa $h_2 = 81°04{,}5'$. Iz Lizinih meritev izračunaj zemljepisno širino njenega opazovališča.

Nadobzorniška zvezda je najnižje nad severno točko obzorja takrat, ko pri navideznem kroženju okoli severnega nebesnega pola prečka nebesni poldnevnik na severni strani neba - spodnja kulminacija. Nadobzorniška zvezda je najvišje nad severno točko obzorja takrat, ko pri navideznem kroženju okoli severnega nebesnega pola prečka nebesni poldnevnik na drugi strani severnega nebesnega pola - zgornja kulminacija.

Pri računanju zemljepisne širine opazovališča si pomagamo s skico.



Veliki krog je nebesni poldnevnik, P severni nebesni pol, točka 1 označuje lego zvezde, ko je najnižje nad severno točko obzorja S, $h_1 = 10°55{,}5'$ pa je njena višina v tej točki. Točka 2 označuje lego zvezde, ko je najvišje nad severno točko obzorja S, $h_2 = 81°04{,}5'$ pa je njena višina v tej točki.

V opazovališču z zemljepisno širino φ je višina severnega nebesnega pola enaka kar φ. Iz slike je razvidno, da je višina h_1:

$$h_1 = \varphi - \beta \ , \tag{6}$$

kjer je β kotna oddaljenost zvezde od nebesnega pola.

Višina h_2 pa je:

$$h_2 = \varphi + \beta \ . \tag{7}$$

Ker oddaljenosti zvezde od pola β ne poznamo, se je znebimo tako, da enačbi 6 in 7 seštejemo:

$$h_1 + h_2 = 2\varphi \tag{8}$$

in dobimo končni izraz za zemljepisno širino:

$$\varphi = (h_1 + h_2)/2 = (10°55{,}5' + 81°04{,}5')/2 = 46° \ . \tag{9}$$

Zemljepisna širina opazovališča je 46°**.** Pot do pravilne rešitve je tudi ta, da enačbo 6 odštejemo od enačbe 7 in izrazimo kot β. Nato β vstavimo v eno od enačb in izrazimo zemljepisno širino.

2012 DT

A Izračunaj trajanje zvezdnega dne (en zasuk Zemlje okoli lastne osi), če veš, da je trajanje Sončevega dne 24 ur in da ima leto 365,25 dni. Predpostavi, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožnici.

B Izračunaj, koliko časa traja Sončev dan na Merkurju, če Merkurjev zvezdni dan traja 1407,6 ure, obhodni čas okoli Sonca pa 88 zemeljskih dni. Tudi v tem primeru predpostavi, da se Merkur okoli Sonca giblje po krožnici.

A Predpostavimo, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožnici. Razlika med zvezdnim dnem (en zasuk Zemlje okoli lastne osi glede oddaljene zvezde) in Sončevim dnem (čas med dvema spodnjima oz zgornjima kulminacijama Sonca - poldnevoma) nastane zaradi gibanja Zemlje okoli Sonca, medtem ko je to gibanje zanemarljivo glede na zelo oddaljene zvezde. Naj bo ω_Z kotna hitrost vrtenja Zemlje, ω_l pa kotna hitrost Zemlje pri kroženju okoli Sonca. Kotna hitrost vrtenja Zemlje glede na Sonce ω_S je: $\omega_S = \omega_Z - \omega_l$. Kotno hitrost vrtenja Zemlje glede na Sonce ω_S izrazimo s Sončevim dnevom $t_S = 24$ h, kotno hitrost ω_Z izrazimo z vrtilno dobo Zemlje okoli lastne osi t_Z (zvezdni dan), ω_l pa z obhodnim časom Zemlje okoli Sonca $t_l = 365,25$ dneva: $2 \cdot \pi / t_S = 2 \cdot \pi / t_Z - 2 \cdot \pi / t_l$. Okrajšano:

$$1/t_S = 1/t_Z - 1/t_l \; . \tag{10}$$

Sledi, da je zvezdni dan t_Z:

$$t_Z = t_S t_l / (t_S + t_l) \; . \tag{11}$$

$t_Z = 23,9345$ h $= 23$ h 56 min. **Zvezdni dan na Zemlji traja 23 ur 56 minut.**

B Z enačbo 10 lahko izračunamo tudi Sončev dan na Merkurju. Naj bo t_{MS} Sončev dan na Merkurju, $t_{MM} = 1407,6$ ure vrtilna doba Merkurja okoli lastne os (zvezdni dan), $t_{Ml} = 88$ dni pa z obhodni čas Merkurja okoli Sonca. Enačbo 10 preuredimo:

$$1/t_{MS} = 1/t_{MM} - 1/t_{Ml} \; . \tag{12}$$

Iz enačbe 12 izrazimo Sončev dan na Merkurju:

$$\begin{aligned} t_{MS} &= t_{MM} t_{Ml} / (t_{Ml} - t_{MM}) \; . \qquad (13) \\ t_{MS} &= 4220 \text{ h} = 175,85 \text{ dni}. \end{aligned}$$

Sončev dan na Merkurju traja 4220 ur.

2012 IT

Dve osebi, ki se nahajata na Zemeljskem ekvatorju na zemljepisnih dolžinah, ki se razlikujeta za 180°, ob istem času opazujeta lego Lune glede na zvezde. Če je deklinacija Lune enaka nič na skici prikaži situacijo in izračunaj navidezno razliko v rektascenziji, kot jo opazujeta ti dve osebi.

Podatki:
$\Delta\lambda = 180^\circ$

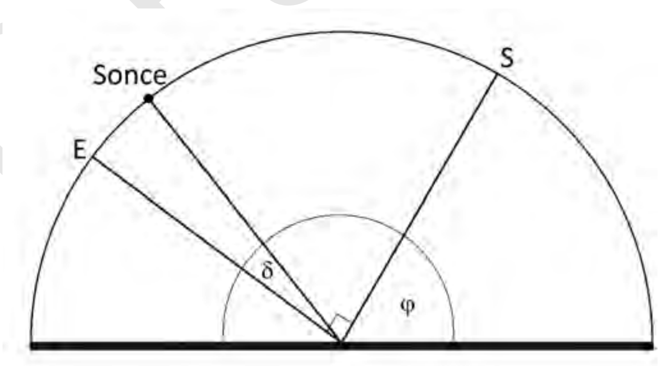
$\delta_L = 0^\circ$
$\Delta\alpha = ?$

Navidezna razlika v rektascenziji je enaka kotni velikosti Zemlje na razdalji Lune (kot označeno na sliki; ničla rektascenzije je poljubno izbrana, v tem primeru iščemo razliko).

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \delta\theta && (14)\\ &= \frac{2\,R_Z}{d_Z} && (15)\\ &= \frac{2\cdot 6371000}{384399000} && (16)\\ &= 33\cdot 10^{-3} && (17)\\ &= 0^h 7^m 34^s && (18) \end{aligned}$$

Janezek, ki živi nekje v Sloveniji, je dobil nalogo, da na dan poletnega solsticija določi zemljepisno širino svojega kraja z meritvijo največje višine Sonca na nebu. Izmeril je, da je bila na ta dan največja višina Sonca nad obzorjem 68°. Izračunaj zemljepisno širino Janezkovega opazovališča, če veš, da je nagib Zemljine osi na ekliptiko 23,5°. 2013 ST

Na dan poletnega solsticija ima Sonce deklinacijo $\delta = +23,5^\circ$ in je prav toliko oddaljeno od nebesnega ekvatorja.



Višina Sonca h ob lokalnem poldnevu (takrat je Sonce v najvišje na nebu) v kraju z geografsko širino φ je:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta \ ,$$

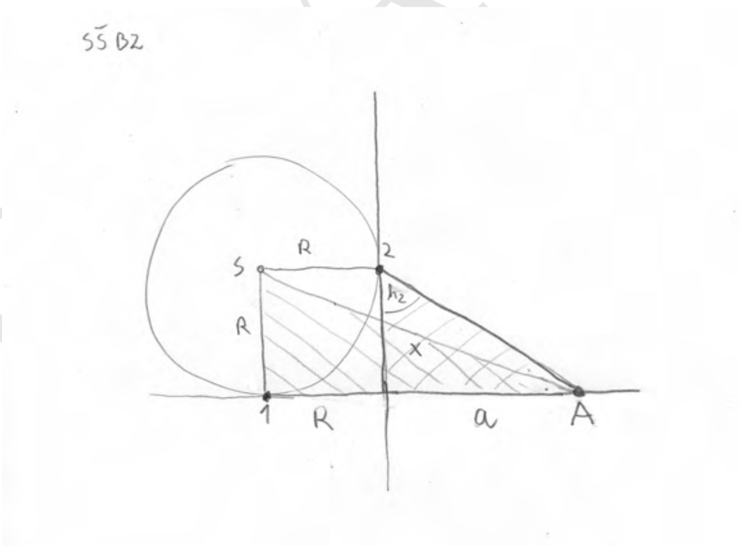
kar je razvidno tudi iz slike. Med nebesnim ekvatorjem E in severnim nebesnim polom S je kot 90°, višina pola pa je enaka geografski širini kraja φ. Za geografsko širino Janezkovega kraja torej velja:

$$\varphi = 90^\circ + \delta - h = 90^\circ + 23,5^\circ - 70^\circ = 45,5^\circ \ .$$

Zemljepisna širina kraja je 45° 30'.

2013 DT Da bi si astronomi poenostavili meritve oddaljenosti bližnjih vesoljskih teles s paralakso, so en observatorij postavili na južnem polu Zemlje, drugega pa na ekvatorju. V observatoriju na južnem polu opazijo asteroid na obzorju (ravno obzorje brez vzpetin). V observatoriju na ekvatorju ta asteroid v istem trenutku vidijo na nebesnem poldnevniku 89,2° nad južnim obzorjem. Izračunaj oddaljenost asteroida od središča Zemlje. Rezultat izrazi v polmerih Zemlje R. Lom svetlobe v ozračju zanemari.

Pri reševanju naloge si pomagamo s skico, ki seveda ni v merilu.



Narišemo krog s središčem S in polmerom R, ki predstavlja Zemljo v preseku. Observatorij na južnem polu označimo z 1, tistega na ekvatorju z 2. Vodoravna ravnina v obeh opazovališčih je tangenta v točkah 1 in 2.

Ker je asteroid v opazovališču 1 viden na obzorju, leži na tangenti skozi točko 1. Lego asteroida označimo z A. Iz opazovališča 2 je asteroid viden na višini h_2 (kot med vodoravnico oz. tangento skozi točko 2 in smerjo proti asteroidu). Narišimo pravokotna trikotnika, kot prikazuje skica. Za trikotnik, ki ima oglišče v točki 2, poznamo $h_2 = 89,2^\circ$ in krajšo kateto, ki je enaka polmeru Zemlje R. Sledi:

$$\tan h_2 = a/R$$

oziroma

$$a = R \cdot \tan h_2 \ . \tag{1}$$

Hipotenuza x drugega trikotnika pa je iskana oddaljenost asteroida od središča Zemlje. Pomagamo si s Pitagorovim izrekom:

$$x = \sqrt{(R+a)^2 + R^2} \ . \tag{2}$$

V enačbo 2 vstavimo 1 in dobimo oddaljenost asteroida:

$$x = \sqrt{(R + R\tan h_2)^2 + R^2} = R \cdot \sqrt{(1 + \tan h_2)^2 + 1} = R \cdot \sqrt{(1 + \tan 89,2^\circ)^2 + 1} =$$

Asteroid je od središča Zemlje oddaljen 72,6 polmerov Zemlje.

2013 IT

Opazujemo dve zvezdi, za kateri vemo, da bosta sočasno prečkali južni meridian na višinah $h_1 = 30^\circ$ in $h_2 = 40^\circ$ (zgornja kulminacija). Kolikšen bo azimut obeh zvezd, ko bosta zašli? Katera zvezda bo zašla prej in kolikšna bo razlika njunih časovnih kotov ob zahodu? Opazujemo iz Ljubljane ($\varphi = 46.04^\circ, \lambda = 14.527^\circ$). Vplive atmosfere lahko zanemariš.

Podatki:
$\varphi = 46.04^\circ$
$\lambda = 14.527^\circ$
Zvezdi:
$h_1 = 30^\circ$
$h_2 = 40^\circ$

Zemljepisna širina opazovališča je večja od višine zvezde, kar pomeni, da se bo prečkanje južnega meridiana (zgornja kulminacija) zgodila med zenitom in smerjo juga.

Za obe zvezdi izračunamo deklinacijo:

$$\begin{aligned}
180^\circ &= \varphi + (90^\circ - \delta) + h \\
\delta &= \varphi + h - 90^\circ \\
&= 46.04^\circ + h - 90^\circ \\
&= h - 43.96^\circ
\end{aligned}$$

Rezultati: deklinacija prve zvezde $\delta_1 = -13.96^\circ$, deklinacija druge zvezde $\delta_2 = -3.96^\circ$.

Izpeljava azimutne enačbe:

$$\begin{aligned}
\cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - h) \\
&\quad + \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - h)\cos(180^\circ - A) \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A \\
\cos A &= -\frac{\sin\delta - \sin\varphi\ \sin h}{\cos\varphi\ \cos h}
\end{aligned}$$

Izpeljava višinske enačbe:

$$\begin{aligned}
\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta) \\
&\quad + \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta)\cos H \\
\sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H
\end{aligned}$$

Azimut zahoda obeh zvezd (ko sta $h_1 = h_2 = 0^\circ$) je

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\frac{\sin\delta - \sin\varphi\ \sin h}{\cos\varphi\ \cos h} \\
&= -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \\
&= -\frac{\sin\delta}{\cos 46.04^\circ}
\end{aligned}$$

Rezultati: $\cos A_1 = 0.3475$, $A_1 = 69.66^\circ$, $\cos A_2 = 0.099$, $A_2 = 84.29^\circ$.

Prej bo zašla prva zvezda. Razlika njunih časovnih kotov ob zahodu bo

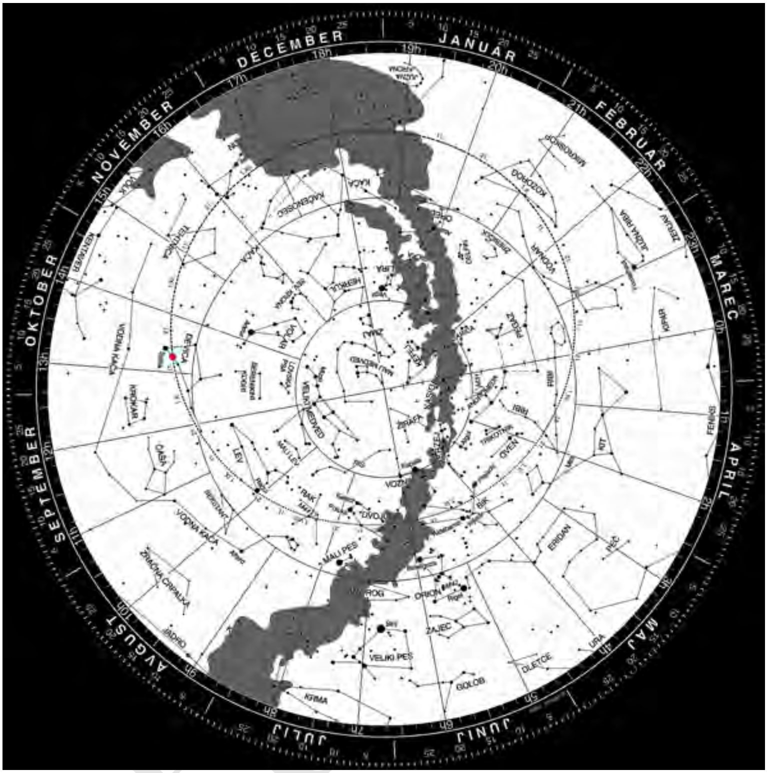
$$\begin{aligned}
\Delta H &= (H_2 - H_1) \\
&= \arccos(-\tan\varphi\tan\delta_2) - \arccos(-\tan\varphi\tan\delta_1) \\
&= \arccos(-\tan 46.04^\circ \tan(-3.96^\circ)) \\
&\quad - \arccos(-\tan 46.04^\circ \tan(-13.96^\circ)) \\
&= 85.88^\circ - 75.06^\circ = 10.82^\circ \\
&= 0.72^h (= 43.28^m)
\end{aligned}$$

2014 DT

A Izračunaj čas med zaporednima opozicijama Marsa, če bi se Zemlja in Mars okoli Sonca gibala v isti ravnini, po krožnih orbitah in enakomerno. Obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 1 leto, obhodni čas Marsa pa je 1,88 leta.

B i. Zadnja opozicija Marsa je bila 8. aprila 2014. Izračunaj datum naslednje opozicije Marsa, če bi veljale predpostavke iz točke A te naloge.

ii. Na zvezdni karti je vrisana lega Marsa ob opoziciji 8. aprila leta 2014 (rdeča pika). Kje na ekliptiki bi bil Mars ob naslednji opoziciji, če bi veljale predpostavke iz točke A te naloge? Lego Marsa ob naslednji opoziciji vriši na karto s krožcem, katerega premer naj ne bo večji od 3 mm.

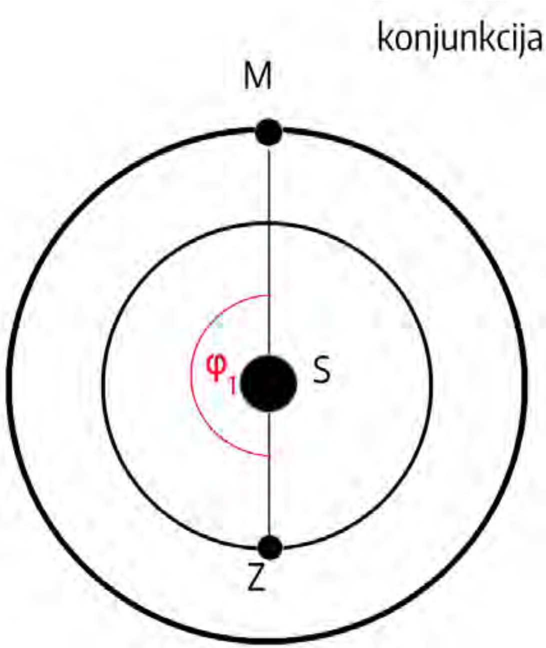


(A)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{Marsa}} - \frac{1}{P_{Zemlje}} = 2,136let$$

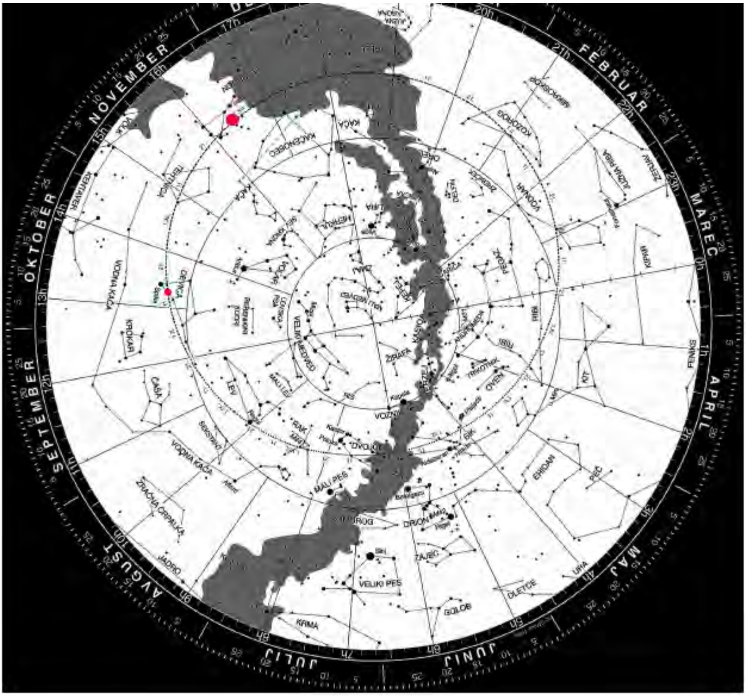
Alternativna rešitev:
Ko je za opazovalca na Zemlji Mars v opoziciji, je položaj planetov tak:
Izračunamo lahko čas do konjunkcije in ga pomnožimo z 2: $t_Z = 1leto$
$t_M = 1.88leta$
$\omega_Z = \frac{2\pi}{t_Z}$
$\omega_M = \frac{2\pi}{t_M}$
$\varphi_M(t) = \omega_M t$
$\varphi_Z(t) = \omega_Z t + \pi$

$\varphi_M(t) = \varphi_Z(t)$
$t = |\frac{t_M t_Z}{t_Z - t_M}| = 2,136 leta$



(B) (a) **(1)** Dve leti in $(0,1361 * 365,25)$ dneh ponovno opazimo opozicijo: $8.4.2016 + 50 dni = 27.5.2016 (\pm 3 dni)$.

(b) **(2) Več postopkov je kako priti do prave rešitve označene na spodnji sliki. V premeru 3 mm okrog pravega datuma.**
Eden od možnih rešiteve je z uporabo datuma, ki so ga izračunali pri prejšnji nalogi. Poiščemo lego Sonca na ta datum in jo preko preko nebesnega pola preslikamo na ekliptiko, kjer je lega Marsa - ozvezdje Škorpijon.



2014 IT Astronomski mrak se začne ob Sončnem zahodu (ko rob zahajajočega Sonca ravno zaide pod obzorje) in konča, ko je središče Sonca 18° pod obzorjem. Izračunaj dolžino astronomskega mraka ob enakonočju ter na prvi poletni dan. Izračunaj ob kateri uri se bo danes (14. marca) zaključil astronomski mrak. Naše opazovališče je na koordinatah $\varphi = +46^\circ, \lambda = +14.5^\circ$. Zanemari pojave v atmosferi. Namig: uporabi enačbe sferne trigonometrije.

Podatki:
$h = -18^\circ$
$\varphi = 46^\circ$
$\lambda = 15.5^\circ$

Za izračun dolžine astronomskega mraka najprej izračunamo časovni kot zahoda Sonca ob enakonočju ($\delta = 0°$) in prvem poletnem dnevu ($\delta = 23.5°$).

$$\cos H_z = -\tan\varphi \cdot \tan\delta$$

Časovni kot H_z je v teh primerih 90° in 116.76°.

Izračunamo še časovni kot v primeru, ko je Sonce 18° pod obzorjem. Upoštevamo enačbo

$$\begin{aligned}
\sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \\
\cos H &= \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \\
\cos H &= \frac{\sin(-18°) - \sin 46° \sin\delta}{\cos 46° \cos\delta}
\end{aligned}$$

Časovni kot H je v teh primerih 116.41° in 159.28°.

Iz razlike v časovnih kotih ($\Delta H = H - H_z$, t.j. 26.41° in 42.52°) izračunamo dolžino astronomskega mraka kot $\Delta t = \Delta H/\gamma$. Dolžina je v teh primerih 1.756^h in 2.827^h.

Na današnji dan (14. marec) je rektascenzija Sonca enaka $\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan L$, kjer je $L = (\Delta t/365.25) \cdot 360°$ in $\Delta t = 365.25 - 7$ dni od pomladanskega enakonočja, $L = 353.1°$. Rektascenzija Sonca je $\alpha = -6.33° = 23.57^h$.

Na današnji dan je deklinacija Sonca enaka $\sin\delta = \sin\varepsilon \sin L$, ki je enaka $\delta = -2.7°$.

Časovni kot ob koncu astronomskega mraka dne 14. marca je $113.36° = 7.56^h$.

$$\begin{aligned}
S &= H + \alpha = 7.13^h \\
S &= S(0^h\mathrm{UT}) - \frac{4^m}{\mathrm{dan}}\, 7\,\mathrm{dni} + \lambda + (t - t_0)\frac{366.2422}{365.2422} \\
&= 12^h - 0.467^h + \lambda + (t - t_0)\frac{366.2422}{365.2422} \\
&= 12^h - 0.467^h + \lambda + (t - 1^h)\frac{366.2422}{365.2422}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{7.13^h - 12^h + 0.467^h - \lambda}{\gamma} + 1^h \\ &= \frac{7.13^h - 12^h + 0.467^h - 0.967^h}{\gamma} + 1^h \\ &= -4.35^h \\ &= 19.64^h \\ &= 19^h 38^m \end{aligned}$$

2015 ST Na fotografiji je vzhod polne Lune z opazovalci v ospredju. Oceni oddaljenost opazovalcev od fotografa, č so ti v povpreču visoki 175 cm. Računaj s podatki v nalogi in znanim zornim kotom Lunine ploskvice na nebu. Oceni napako meritve.

Višina opazovalcev $h = 175$ cm.

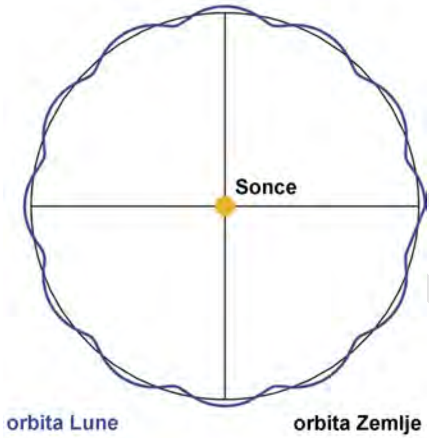
Zorni kot Lune na nebu $\varphi_L = 0{,}5°$.
Če hočemo določiti oddaljenost x med opazovalci in fotografom, moramo dobiti oceno za zorni kot opazovalcev na sliki To dobimo s primerjavo znanega zornega kota polne Lune na nebu. Na sliki izmerimo premer Lune r_L in višino opazovalcev h_O. Dobimo:
$r_L = 112$ mm $\pm$ 2 mm,
$h_O = 10$ mm $\pm$ 1 mm
Izračunamo razmerje
$h_O \ / \ r_L = 0{,}09 \pm 0{,}01$, (1)
ki je enako razmerju zornih kotov Lune in opazovalcev φ_O:
$h_O \ / \ r_L = \varphi_O \ / \ \varphi_L$.
Sledi
$\varphi_O = \varphi_L \ h_O \ / \ r_L = 0{,}5° \ (0{,}09 \pm 0{,}01) = 0{,}045° \pm 0{,}005° = 0{,}045° \pm 11$ %. (2)
Za iskano oddaljenost fotografa sledi:
$x = h \ / \ \tan\varphi_O = 1{,}75 \text{ m} \ / \ \tan 0{,}045° = 2200 \text{ m} \pm 240$ m.
Ker je φ_O majhen, lahko $\tan\varphi_O$ nadomestimo kar z φ_O v radianih.

Fotograf je od opazovalcev oddaljen 2200 m ± 240 m oziroma 2200 m ± 11 %.

Opomba: Tudi če je bila pola natisnjena v neoriginalnem formatu, se sicer izmerjene vrednosti r_L in h_O razlikujejo, razmerje $h_O \ / \ r_L$ pa je enako.

Oceni, za koliko je povprečna hitrost Lune, s katero se giblje okoli Sonca, večja od hitrosti, s katero se Zemlja giblje okoli Sonca. Predpostavi, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožni orbiti s polmerom $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m in da se oddaljenost $d = 3,85 \cdot 10^8$ m med Zemljo in Luno ne spreminja. Pomagaš si lahko z znanimi vrednostmi za obhodne čase Zemlje okoli Sonca in Lune okoli Zemlje. 2015 ST

Polmer Zemljine orbite okoli Sonca $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m.
Polmer Lunine orbite okoli Zemlje $d = 3,85 \cdot 10^8$ m.
Luna pravzaprav ne kroži okoli Zemlje, temveč se giblje okoli Sonca po orbiti, ki je perturbirana zaradi Zemljine težnosti. Lunina orbita okoli Sonca zato ni elipsa oz. v poenostavljenem modelu krožnica, temveč vijuga okoli Zemljine orbite (glej sliko; avtorja T. Kranjc in N. Razpet).



Na sliki je velikost vijug Lunine orbite nesorazmerno velika, saj v pravem razmerju ne bi bile vidne, ker so zelo majhne v primerjavi z oddaljenostjo od Sonca. Luna orbita okoli Sonca je zaradi "vijuganja"daljša od orbite Zemlje, prepotuje pa jo v enem letu, prav tako kot Zemlja, zato je povprečna hitrost Lune večja. Ocene razlike povprečne hitrosti Lune Δv_L in Zemlje se lahko lotimo na več načinov. Eden od možnih načinov reševanja s podanimi podatki brez gravitacijskega zakona je enostaven razmislek glede ocene, koliko je v enem letu pot Lune daljša od poti Zemlje. Luna v enem letu približno 12-krat navidezno obide Zemljo, zato je njena pot okoli Sonca Δr_L daljša za približno 12 navideznih orbit okoli Zemlje:

$\Delta r_L = 12 \cdot 2\pi d = 12\cdot\ 2\pi\ \cdot 3{,}85\cdot\ 10^8$ m $= 2{,}9\cdot 10^{10}$ m.

Sledi, da je razlika hitrosti Lune in Zemlje:

$\Delta v_L = \Delta r_L/$ 1 leto $= 2{,}9\cdot 10^{10}$ m / 31536000 s = 920 m/s.

Tekmovalec lahko sklepa tudi drugače. Luna vsak mesec (približno 30 dni) poleg poti, ki jo naredi skupaj z Zemljo okoli Sonca, naredi že en navidezni obhod okoli Zemlje. Pri tem naredi pot:
$r' = 2\pi d = 2\pi\ \cdot 3{,}85\cdot\ 10^8$ m $= 2{,}4\cdot 10^9$ m.
Luna ima zaradi tega dodatno hitrost:
$\Delta v_L = r'/$ 30 dni $= 2{,}4\cdot 10^9$ m / 2592000 s = 933 m/s.

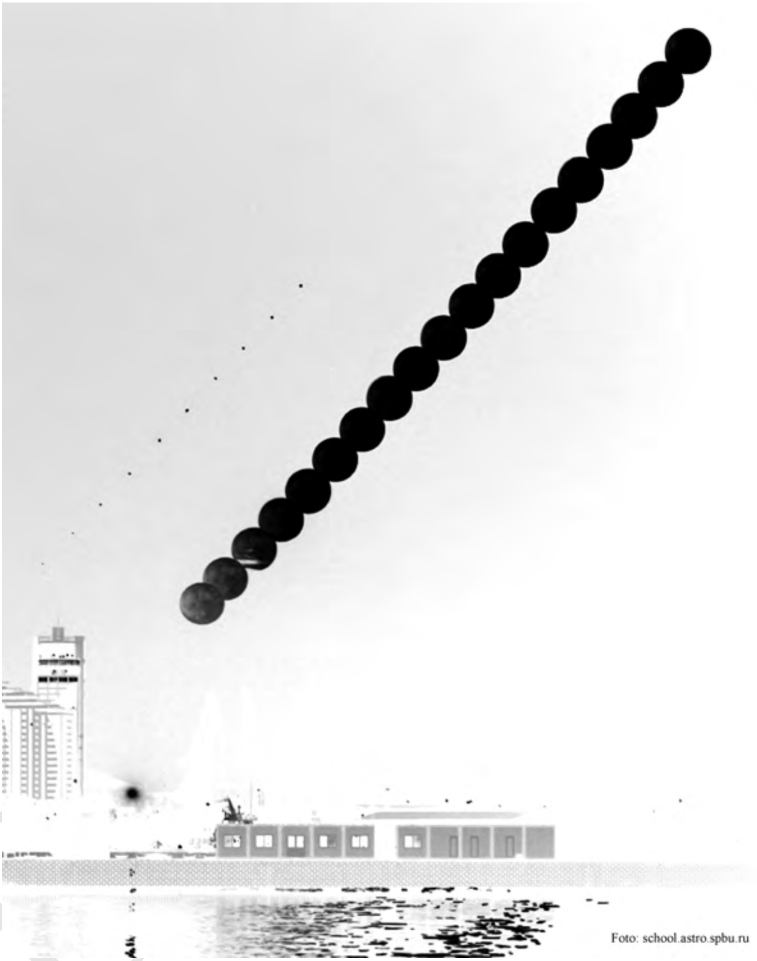
Ocena, za koliko je povprečna hitrost Lune okoli Sonca večja od hitrosti Zemlje, je okoli 1000 m/s oz. 1 km/s.

Nekega dne je Zvezdana zjutraj prišla v šolo in je s praga šole videla Luno tik nad dimnikom sosednje hiše. Naslednje jutro je Zvezdana z istega mesta na pragu šole prav tako videla Luno na istem mestu nad dimnikom. Izračnaj, koliko minut prej ali kasneje je drugi dan prišla Zvezdana v šolo. 2015 DT

Če poznamo le trajanje lunacije (čas med zaporednima mlajema), ki je približno 30 dni, lahko naredimo sledeči razmislek. V času ene lunacije se za opazovalca v danem opazovališču Luna vrne na isto mesto na nebu glede na Sonce. Pri tem se po nebu glede na Sonce premakne za 360°. Sledi, da se Luna glede na Sonce premika z
$\omega_{LS} = 360°/(30{\cdot}24\ \text{h}) = 0{,}5°/\text{h}$.
Zaradi vrtenja Zemlje Sonce po nebu potuje s kotno hitrostjo
$\omega_S = 360°/24\ \text{h} = 15°/\text{h}$.
Luna navidezno potuje od vzhoda proti zahodu, kar pomeni, da pride v približno isto lego na nebu dan za dnem kasneje. To pomeni, da se zaradi vrtenja Zemlje in gibanja okoli Zemlje Luna po nebu giblje počasneje kot Sonce:
$\omega_L = \omega_S$ - ω_{LS}.
Zanima nas, v kolikšnem času t se Luna ponovno vrne na isto mesto na nebu. Sledi:
$\omega_L{\cdot}\text{t} = 360°$. Iz enačbe izrazimo t: t = 360° / ω_L = 24,83 ur = 24 ur 50 minut.

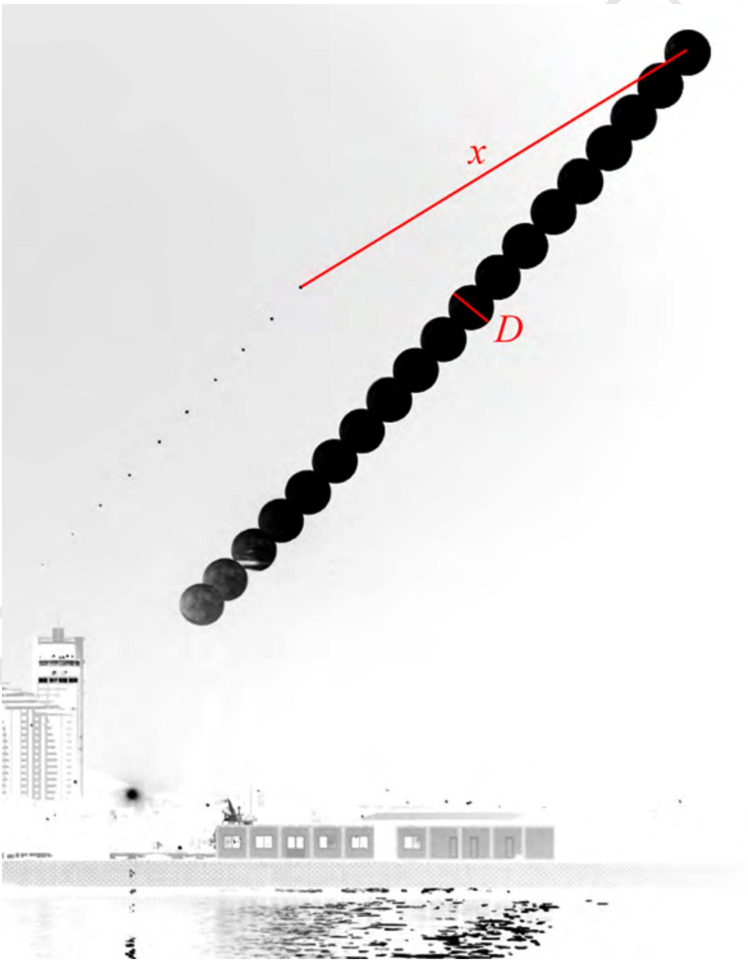
Ocenili smo, da je Zvezdana ponovno prišla v šolo čez 24 ur in 50 minut oz. približo 50 minut kasneje kot prvi dan.

Na sliki (negativ) je zaporedje posnetkov popolnega Luninega mrka. Levo od Lune je viden Jupiter. Na podlagi fotografije določ, čz koliko dni bo Jupiter v opoziciji s Soncem. Oceni napako svoje meritve. 2015 DT



Ker je na fotografiji posnet popolni Lunin mrk, to pomeni, da je Zemlja natanko med Soncem in Luno oz. je luna v "opoziciji". Da bi bil tudi Jupiter v opoziciji, se mora med zvezdami premakniti tja, kjer je v trenutku mrka Luna. Ker gre za oceno, čez koliko časa se bo to zgodilo, lahko privzamemo, da sta Jupiter in Luna na ekliptiki. Ker je Jupiter relativno blizu opozicije in nedaleč stran od Lune, lahko tudi poenostavimo in se reševanja naloge lotimo brez sferne trigonometrije. Poleg tega lahko zanemarimo "lastno"gibanje Jupitra med zvezdami, ki je majhno v primerjavi z gibanjem Zemlje okoli Sonca, glavni dejavnik, ki bo Jupiter

navidezno "premaknilo"na mesto, kjer je na dan mrka Luna.
Najprej moramo na fotografiji ugotoviti kotno oddaljeost med središčem Lune (točka, ki je na nebu nasproti Soncu) in trenutno lego Jupitra. Iz slike lahko razberemo, da je Jupiter vzšel kasneje kot Luna. Pravo kotno razdaljo med objektoma lahko razberemo iz leg zadnje osvetlitve na posnetku (glej sliko).



Najprej izmerimo premer Lune D, za katero vemo, da je njen zorni kot $0{,}5°$:

$D = 8$ mm $\pm$ 0,5 mm $= 8\cdot(1 \pm 0{,}06)$ mm.
Nato izmerimo razdaljo x med središčem Lunine ploskvice in Jupitrom:
$x = 75$ mm $\pm$ 1 mm $= 75\cdot(1 \pm 0{,}01)$ mm.
Razdaljo x spremenimo v kotno razdaljo:
$\beta = 0{,}5^\circ \cdot D/x = 4{,}7^\circ(1 \pm 0{,}07)$.
V naši poenostavljeni sliki smo ugotovili, da bo gibanje Zemlje okoli Sonca pripeljalo Jupiter v opozicijo. Zemlja v enem letu naredi 360°, torej se v enem dnevu premakne za:
$\omega = 360^\circ/365{,}25$ dni $= 1^\circ$/dan $(1 \pm 0{,}02)$.
Jupiter bo kot β do opozicije navidezno prepotoval v času
$t = \beta/\omega = 4{,}7\cdot(1 \pm 0{,}09)$ dneva.

Jupiter bo v opoziciji čez 4,7 dneva $\pm$ 0,4 dneva oz. 4 dni in 17 ur $\pm$ 10 ur.

2015 IT

Nek komet, ki ga opazujemo iz naših krajev ($\varphi = +46^\circ, \lambda = +14.5^\circ$), je imel 21. decembra navidezno magnitudo 5.31, njegovi koordinati sta bili $\delta = +34^\circ\, 21'\, 10''$, $\alpha = 16^h\, 14^m\, 58^s$.

(a) Na kolikšni razdalji od Zemlje (v *a.e.*) je bil takrat, če je bila njegova absolutna magnituda 38.57?

(b) Kolikšna je bila takrat njegova kotna razdalja od Sonca?

(c) Kolikšna je bila takrat hitrost kometa, če se giblje po paraboli?

(d) Za koliko časa po začetku astronomske noči je bil 21. decembra komet še nad obzorjem? Astronomska noč se začne, ko je Sonce -18° pod obzorjem. Predpostavi, da se kometu v tem času koordinate niso bistveno spremenile.

Podatki:
$m_k = 5.31$
$M_k = 38.57$
$\delta_k = 34.3527^\circ$
$\alpha_k = 16.2494^h = 243.7417^\circ$

(a) S Pogsonovim zakonom izračunamo razdaljo kometa od Zemlje:

$$\begin{aligned} m_k - M_k &= 5\log d - 5 \\ d &= 10^{(m_k - M_k + 5)/5} \\ &= 10^{(5.31 - 38.57 + 5)/5} \\ &= 10^{-5.652} \\ &= 2.23 \cdot 10^{-6}\mathrm{pc} \\ &= 6.86 \cdot 10^{10}\mathrm{m} \\ &= 0.457\mathrm{a.e.} \end{aligned}$$

(b) Za izračun kotne razdalje od Sonca uporabimo enačbe sferne trigonometrije in upoštevamo podatek, da ima Sonce 21. decembra koordinate $\alpha_\odot = 18^h = 270°$,$\delta_\odot = -23.5°$. Če je $A = \alpha_\odot - \alpha_k = 26.26°$, imamo po kozinusnem izreku za sferne trikotnike

$$\begin{aligned} \cos a &= sin\delta_\odot \sin\delta_k + \cos\delta_\odot \cos\delta_k \cos A \\ &= -0.2250 + 0.7571 \cdot 0.8968 \\ &= 0.4539 \\ a &= 63° \end{aligned}$$

(c) Za izračun hitrosti kometa moramo poznati njegovo takratno oddaljenost od Sonca. Ker poznamo oddaljenost Sonca ($d_\odot$) in kometa (d_k) od Zemlje ter njuno kotno razdaljo na nebu (a) enostavno izračunamo oddaljenost kot

$$\begin{aligned} r^2 &= d_k^2 + d_\odot^2 - 2d_k d_\odot \cos a \\ &= 0.457^2 + 1 - 2 \cdot 0.457 \cdot 0.4539 \\ &= 0.7939 \\ r &= 0.891\mathrm{a.e.} = 1.33 \cdot 10^{11}\mathrm{m} \end{aligned}$$

Ker se giblje po paraboli je hitrost kometa na razdalji r od Sonca (maso kometa zanemarimo)

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2GM_\odot/r} \\ &= 44.8\mathrm{km/s} \end{aligned}$$

(d) Izračunamo koliko časa po začetku astronomske noči bo komet nad obzorjem. Pri tem uporabimo sferni trikotnik S(sever)-Z(zenit)-komet in upoštevamo, da je en notranji kot trikotnika ravno razlika

$H_\odot - H_k = -(\alpha_\odot - \alpha_k)$ ob istem zvezdnem času (začetek astronomske noči).

Najprej poiščemo

$$H_k = H_\odot + (\alpha_\odot - \alpha_k) = H_\odot + 26.26^\circ$$

.

Za izračun potrebujemo časovni kot Sonca, ko je ta 18° pod obzorjem.

$$\begin{aligned}
\cos H &= \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} \\
&= \frac{\sin(-18^\circ) - \sin 46^\circ \sin(-23.5^\circ)}{\cos 46^\circ \cos(-23.5^\circ)} \\
&= -0.0348 \\
H &= 91.99^\circ
\end{aligned}$$

Vzamemo pozitivno rešitev, ker nas zanima zahod Sonca, in dobimo:

$$H_k = 91.99^\circ + 26.26^\circ = 118.25^\circ$$

Časovni kot kometa, ko bo ravno na obzorju, pa izračunamo

$$\begin{aligned}
\cos H'_k &= -\tan\varphi \tan\delta_k \\
&= -\tan 46^\circ \cdot \tan 34.3527^\circ \\
&= -0.7078 \\
H'_k &= 135^\circ
\end{aligned}$$

Čas kometa nad obzorjem bo ($\gamma = 366.2422/365.2422$):

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{H'_k - H_k}{\gamma} \\
&= \frac{16.75^\circ/15^\circ}{\gamma} \\
&= 1.11^h
\end{aligned}$$

2016 ST Kraja imata enako zemljepisno dolžino in sta na severni polobli. Na isti dan opoldan je Sonce v prvem kraju 41° nad obzorjem, v drugem kraju pa 44° nad obzorjem. Izračunaj razdaljo med krajema. Polmer Zemlje je 6400 km. Polmer Zemlje $R = 6400$ km.

Višina Sonca v prvem kraju $h_1 = 41^\circ$.

Višina Sonca v drugem kraju $h_2 = 44°$.

Kraja ležita na istem poldnevniku, ki je veliki krog s polmerom R. Ker je Sonce ob lokalnem poldnevu na nebesnem poldnevniku, ki je projekcija polnevnika na nebu, je razlika višin Sonca enaka razliki zemljepisnih širin: $\Delta\varphi = h_2$ - $h_1 = 44°$ - $41° = 3°$.
Razdalja d med krajema je enaka loku na velikem krogu, ki ga oklepa kot $\Delta\varphi$:
$d = 2\pi R\Delta\varphi/360° = 2{\cdot}\pi{\cdot}6400$ km$\cdot 3°/360° = 335$ km.

Razdalja med krajema je 335 km ±1 km.

Na sliki 1 je Luna v perigeju, na sliki 2 pa v apogeju. Sliki sta v negativu. 2016 ST

(a) Iz slik določi razmerje oddaljenosti Lune od Zemlje v perigeju in apogeju. Predpostavi, da je polmer Zemlje zanemarljiv v primerjavi z oddaljenostjo Lune - kot bi bila Luna posneta iz središča Zemlje.

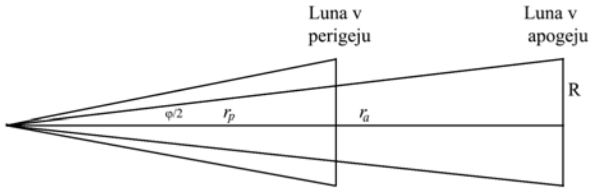
(b) Izračunaj ekscentričnost e Lunine orbite za ta primer. Predpostavi, da se Luna okoli Zemlje giblje po elipsi. Ekscentričost elipse $e = (a - r_p)/a$, kjer je a velika polos elipse, r_p pa oddaljenost Lune od Zemlje v perigeju.

1

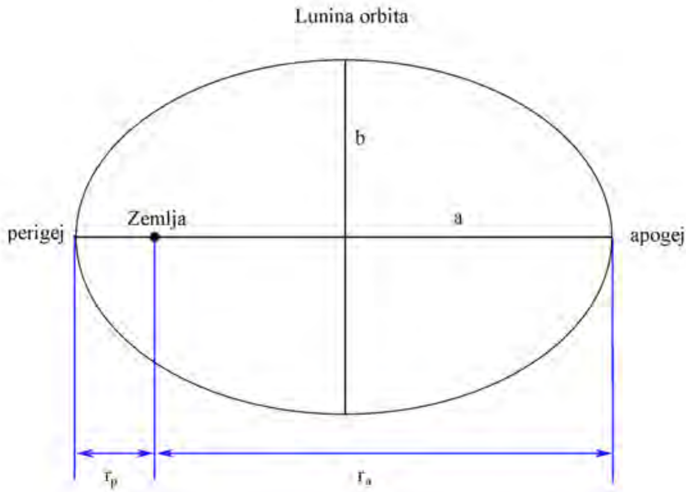
2

a)

Iz slike lahko razberemo, kakšna je odvisnost med kotno velikostjo Lune na nebu ϕ, njeno (geocentrično) oddaljenostjo r in polmerom R.



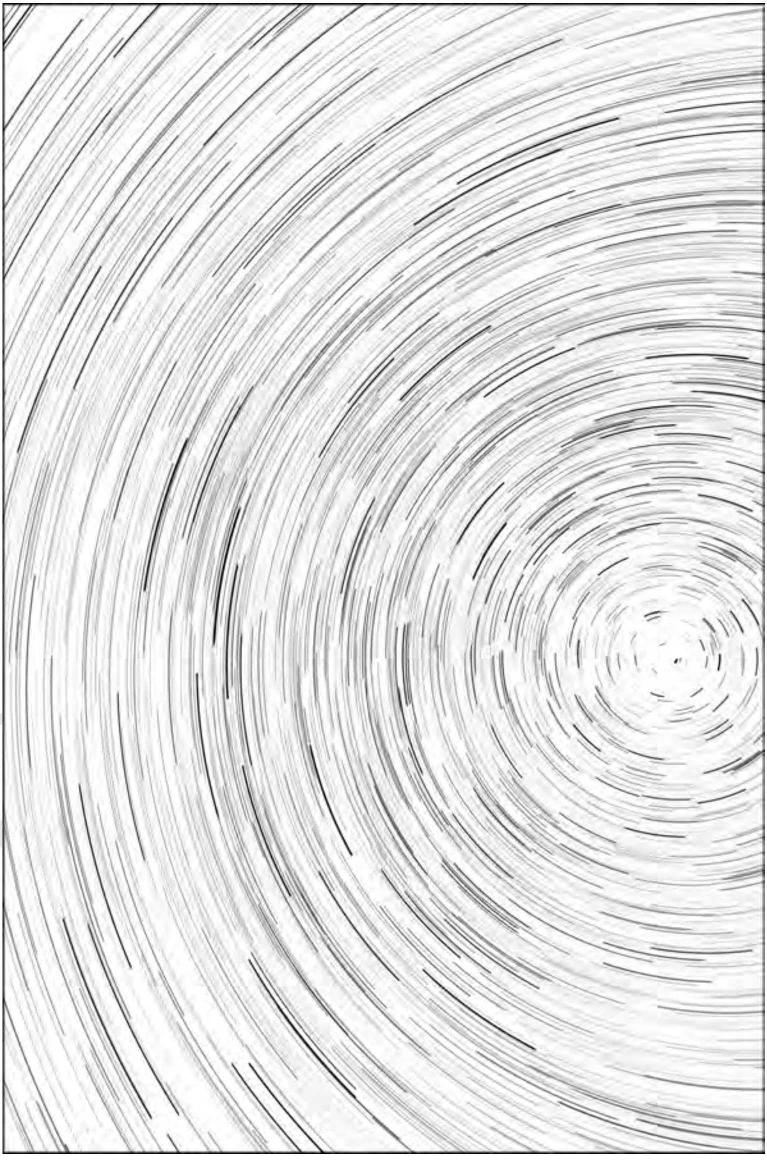
$\tan \phi/2 = R/r$.
ker je Luna daleč, je njena kotna velikost na nebu majhna, zato lahko zapišemo kar:
$\phi = 2R/r$.
Za perigej velja:
$\phi_p = 2R/r_p$,
za apogej pa:
$\phi_a = 2R/r_a$.
Drugo enačbo delimo prvo. Sledi, da je razmerje zornih kotov Lune v perigeju in apogeju obratno sorazmerno z oddaljenostjo Lune:
$\phi_a/\phi_p = r_p/r_a$.
Na fotografijah izmerimo premera Lunine ploskvice v perigeju D_p in apogeju D_a, ki sta sorazmerna z zornim kotom Lune v teh legah:
$D_p = 75$ mm $\pm$ 1 mm,
$D_a = 68$ mm $\pm$ 1 mm.
Razmerje oddaljenosti Lune v perigeju in apogeju je:
$r_p/r_a = D_a/D_p = 68/75 = 0{,}91 \pm 0{,}02$.
b) Lunino orbito opišemo z elipso.



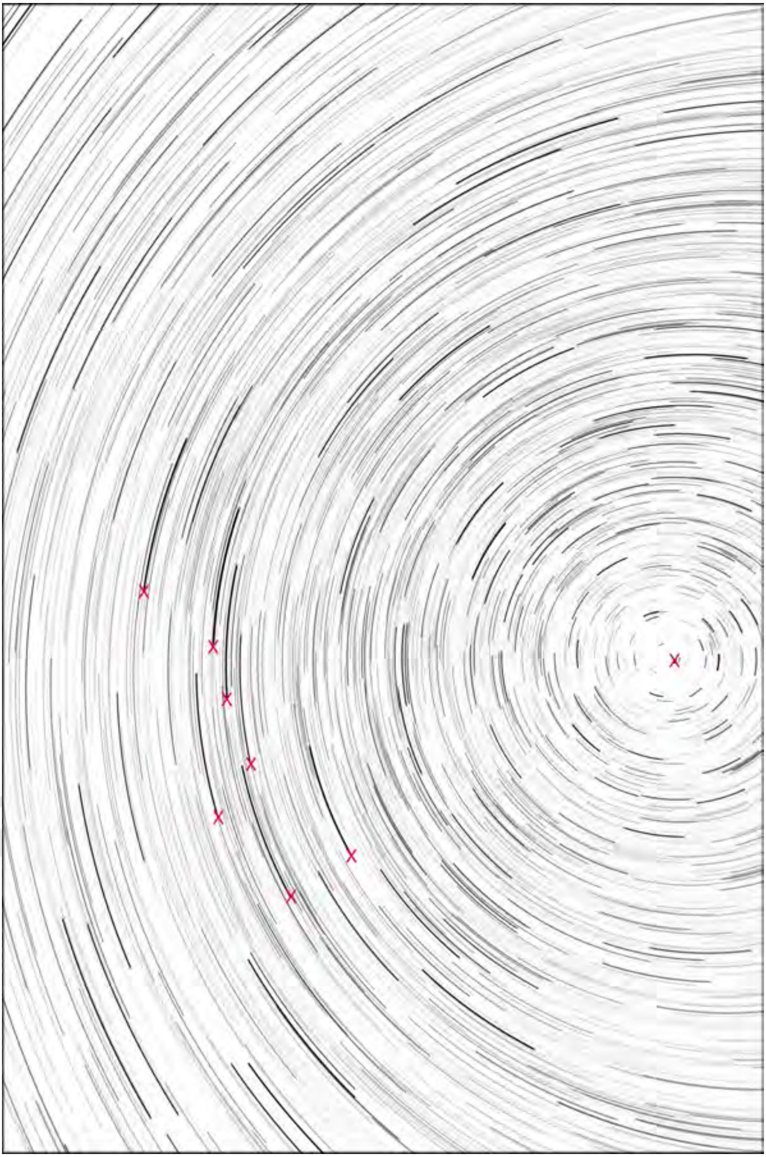
Ekscentričnost elipse e zapišemo kot
$e = (a - r_p)/a$, (1)
kjer je a velika polos orbite, r_p pa oddaljenost Lune v perigeju.
Iz slike lahko razberemo, da velja:
$2a = r_p + r_a$, (2)
Kjer je r_a oddaljenost Lune v apogeju.
S tem izrazom v enačbi za ekscentričnost orbite nadomestimo a in dobimo:
$e = (r_a - r_p)/(r_p + r_a)$ (2a) oz.
$e = (1- r_p/r_a)/ (1+ r_p/r_a)$ (2b).
Iz enačbe vidimo, da je ekscentričnost povezana samo z razmerjem oddaljenosti Lune od Zemlje v apogeju in perigeju oz. z razmerjem zornih kotov Lune na nebu v teh dveh legah, kar smo ugotovili pod točko a) te naloge. Sledi:
$e = (1- \phi_a/\phi_p)/ (1+ \phi_a/\phi_p) = (1- D_a/D_p)/ (1+ D_a/D_p) = 0{,}047 \pm 0{,}003$.

Pravilni rezultat 0,047 ± 0,003.

Slika (na poli je natisnjena v negativu) je bila posneta tako, da je bil fotoaparat na nepremičnem stojalu usmerjen v nebo in je bil čas osvetlitve 80 minut. Na sliki z “X” označi Severnico in sledi 7 svetlih zvezd asterizma Veliki voz. Daljša stranica fotografije pokriva 2016 ST približno 80° neba. Foto: Andrej Guštin



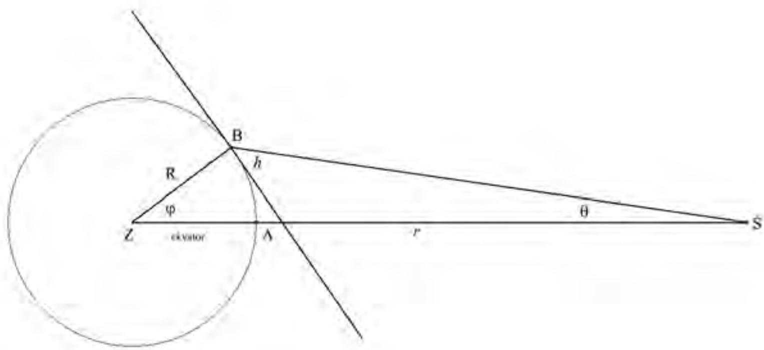
Na sliki je označena Severnica in zvezde asterizma Veliki voz.



Nek geostacionarni satelit, ki je v ekvatorialni krožni orbiti okoli 2016 DT

Zemlje, je v kraju A, ki leži na ekvatorju, vedno v zenitu. V kraju B (leži na severni polobli), ki ima enako zemljepisno dolžino kot kraj A, pa je ta satelit 40° nad južnim obzorjem. Izračunaj zemljepisno širino kraja B.
Polmer Zemlje $R_Z = 6400$ km, masa Zemlje $m_Z = 6{\cdot}10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta G = $6{,}67{\cdot}10^{-11}$ Nm^2/kg^2.
Matematična pomoč: Za trikotnike velja sinusov izrek: $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$.

B3.
Pri reševanju naloge si pomagamo s skico.



Satelit kroži nad ekvatorjem na razdalji r od središča Zemlje in je v kraju A na ekvatorju v zenitu. V kraju B je satelit $h = 40°$ nad južnim obzorjem. Oglejmo si trikotnik z oglišči ZSB. V njem se skriva iskana zemljepisna širina φ.

S sinusovim izrekom lahko zapišemo:

$$r/\sin(90^\circ + h) = R/\sin\theta \; , \qquad (1)$$

kjer je R polmer Zemlje. Kot θ lahko izrazimo:

$$\theta = 180^\circ - (90^\circ + h) - \varphi = 90^\circ - h - \varphi \; . \qquad (2)$$

V 1 vstavimo 2 in z malo računske telovadbe izrazimo zemljepisno širino kraja B:

$$\varphi = 90^\circ - h - \arcsin(R/r \cos h) \; . \qquad (3)$$

Potrebujemo še r, ki ga izrazimo iz gravitacijskega zakona in zveze za centripetalni pospešek satelita:

$$Gm_Z/r^2 = r4\pi^2/t_0^2 \,, \tag{4}$$

kjer je t_0 obhodni čas satelita, ki je za geostacionarne satelite približno 24 ur.

Iz 4 izrazimo r:

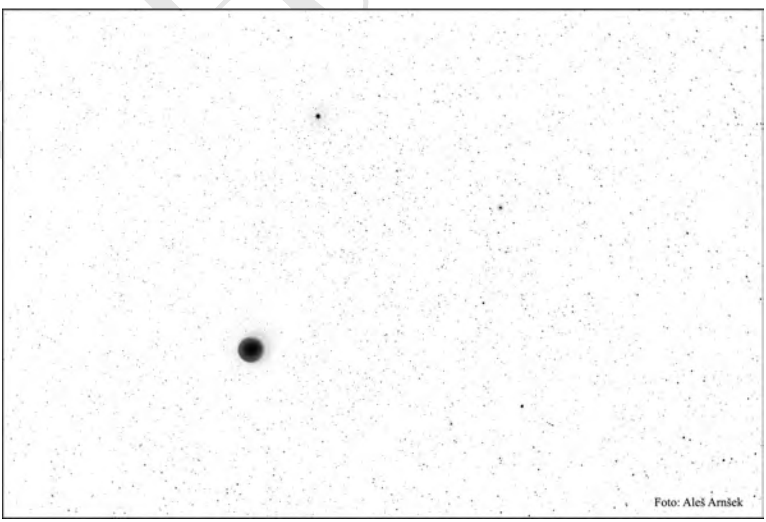
$$r = \sqrt[3]{\frac{Gm_Z t_0^2}{4\pi^2}} = 24300\,\mathrm{km}\,. \tag{5}$$

Izračunamo še zemljepisno širino kraja B:

$$\theta = 43,34^\circ \,.$$

Zemljepisna širina kraja B je 43,34°.

Na sliki (negativ) je periodiči komet 17P/Holmes, ki je bil po nenadnemu izbruhu novembra 2007 iz naših krajev lepo viden tudi s prostim očesom. Koma kometa je bila skoraj popolna krogla. Iz slike oceni premer kome kometa. Rezultat izrazi v metrih. Slika je bila posneta, ko je bil komet od Zemlje oddaljen 2 astronomski enoti. Daljša stranica slike pokriva 10° neba. 2016 DT



Izmerimo daljšo stranico fotografije $x = 165$ mm. Ker daljša stranica pokriva kot 10° na nebu, sledi, da je merilo na sliki $X = 10^\circ/165\ \mathrm{mm} = 0{,}0606^\circ/\mathrm{mm}$.
Izmerimo premer kome kometa na fotografiji: $D = 5$ mm
in izračunamo njeno kotno velikost $D_\varphi = X\ D = 0{,}3^\circ$.
Razmerje med premerom kome kometa D_K in njegovo oddaljenostjo $r =$ 2 a. e. je:
$D_K/r = \tan D_\varphi$.
Iz tega izrazimo premer kome:
$D_K = r\ \tan D_\varphi = 1{,}59{\cdot}10^9$ m.

Premer kome kometa na sliki je $\mathbf{1{,}59{\cdot}10^9}$ m.

2016 IT Veliki Magellanov oblak (Large Magellanic Cloud, LMC) in Mali Magellanov oblak (Small Magellanic Cloud, SMC) sta nepravilni pritlikavi galaksiji, ki krožita okrog naše Galaksije. Njune koordinate so:
LMC: $\alpha_{LMC} = 5^h23^m34.5^s$, $\delta_{LMC} = -69^\circ45'22''$ in
SMC: $\alpha_{SMC} = 0^h52^m44.8^s$, $\delta_{SMC} = -72^\circ49'43''$.
V nadaljevanju predpostavite, da razsežnost objektov ni pomembna.

(a) Koliko stopinj južno od Avberja ($\varphi = 46^\circ$) moramo najmanj iti, da bosta oba Magellanova oblaka vedno nad obzorjem?

(b) Kolikšna bo iz tistega kraja (izračunanega v prejšnji točki (a)) najvišja višina nad obzorjem za vsakega izmed njiju in na katerem območju azimutov ju bomo lahko opazovali?

(c) Kolikšno zorno polje bi moral pokriti objektiv fotoaparata, da bi lahko na posnetek ujeli oba Magellanova oblaka? CCD senzor v fotoaparatu velik 35×35 mm. Kolikšna mora biti goriščna razdalja objektiva, ki bi bil primeren za tako fotografijo?

Podatki:
$\varphi = 46^\circ$
$\alpha_{LMC} = 5^h23^m34.5^s$
$\delta_{LMC} = -69^\circ45'22''$
$\alpha_{SMC} = 0^h52^m44.8^s$
$\delta_{SMC} = -72^\circ49'43''$

V prvem delu vaje iščemo nadobzornice v določenem kraju. Za severno poloblo velja, da je nadobzornica v primeru $90^\circ - \delta \leq \varphi$, za južno pa

$-90^\circ - \delta \geq \varphi$, v naših primerih bo $\varphi_{LMC} \leq -20^\circ 14' 38''$ in $\varphi_{SMC} \leq -17^\circ 10' 17''$. Rešitev, ki jo iščemo, je $\varphi_{LMC} = -20^\circ 14' 38''$.

Da bomo obe galaksiji videli vedno nad obzorjem se moramo od Avberja pomakniti proti jugu za $\varphi - \varphi_{LMC} = 66^\circ 14' 38''$.

Najvišje bosta ob (južni) kulminaciji in sicer na $|\varphi_{LMC}| + |-90^\circ - \delta_{LMC}| = 40^\circ 29' 16''$ in $|\varphi_{LMC}| + |-90^\circ - \delta_{SMC}| = 37^\circ 24' 55''$.

Če merimo Azimut iz juga (ne s severa!) iščemo rešitev v primeru, ko je $H = 6^h$. Najprej poiščemo višino objekta v trenutku, ko je na skrajni vzhodni/zahodni točki ($cos H = 0!$):

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H \\ &= \sin\delta \sin\varphi \\ &= 18.94^\circ \text{ oz. } 19.30^\circ \end{aligned}$$

Potem pa s pomočjo sinusnega izreka:

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ - A &= \cos\delta \frac{\sin H}{\cos h} \\ &= \frac{\cos\delta}{\cos h} \\ &= 0.3658 \text{ oz } 0.3666 \\ A_1 &= 158.54^\circ \text{ oz } 158.49^\circ \\ A_2 &= 201.46^\circ \text{ oz } 201.51^\circ \end{aligned}$$

TA DEL JE POTREBNO ZNOVA PREVERITI, KER SMO NA JUGU!

Izračunamo stranico s sfernega trikotnika LMC-SMC-severnica:

$$\begin{aligned} \cos s &= \sin\delta_{LMC} \sin\delta_{SMC} + \cos\delta_{LMC} \cos\delta_{SMC} \cos(\alpha_{LMC} - \alpha_{SMC}) \\ s &= 20.746^\circ \ . \end{aligned}$$

(Naivno bi mislili, da sta narazen za razliko rektascenzij, vendar moramo upoštevati tudi deklinacije, da dobimo pravo kotno razdaljo.)

Goriščna razdalja objektiva bi morala biti največ:

$$\begin{aligned} f &= \frac{x}{\tan s} \\ &= \frac{35\text{mm}}{\tan 20.746^\circ} \\ &= 92.4\text{mm} \end{aligned}$$

Gravitacija

2009
ST

Kolikšna bi bila masa Sonca v primerjavi z njegovo dejansko maso, če bi Zemlja okoli njega krožila z enako tirno hitrostjo, kot jo ima na obstoječi orbiti, le da bi bila od njega dvakrat dlje, kot je trenutno? Predpostavi, da se Zemlja giblje po krožnici.

Tirno hitrost v vesoljskega telesa z zanemarljivo majhno maso m (planet), ki kroži okoli masivnega telesa z maso M (zvezda), izrazimo iz gravitacijskega zakona in centripetalne sile:

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ,$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} ,$$

kjer je G gravitacijska konstanta in r oddaljenost med telesi. V obeh primerih iz naloge je hitrost Zemlje v enaka, le da je v prvem primeru oddaljenost med Zemljo in Soncem r_Z in masa zvezde M dejanska masa Sonca m_S. V drugem primeru pa je oddaljenost Zemlje $2r_Z$ in m_x iskana masa namišljenega Sonca. Zapišemo:

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{r_Z}} ,$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_x}{2r_Z}} .$$

Enačbi enačimo

$$\sqrt{\frac{GM_S}{r_Z}} = \sqrt{\frac{GM_x}{2r_Z}}$$

in dobimo $m_x = 2m_S$.

Masa namišljenega Sonca, okoli katerega Zemlja kroži z enako tirno hitrostjo, a na dvakrat večji oddaljenosti, je dvakrat večja kot masa pravega Sonca.

Neko vesoljsko telo najprej miruje na zelo veliki oddaljenosti od Sonca (v neskončnosti), nato pa začne padati naravnost proti Soncu. Kolikšno hitrost ima, ko je od Sonca enako oddaljeno kot Zemlja? Pomagaj si s podatki za orbito Zemlje: oddaljenost od Sonca je $1,5 \cdot 10^8$ km, obhodna doba je 365,25 dneva. 2009 DT

Pri padanju telesa proti Soncu velja:

$$\Delta W_k = \Delta W_{pot}$$

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{m_S m}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_S}{r}}$$

Ker nimamo podane mase Sonca m_S in konstante G si pomagamo s podatki za Zemljo:

$$m_Z \omega_Z^2 r = \frac{Gm_S m_Z}{r^2}$$

$$\omega_Z = \frac{2\pi}{t_0} \quad t_0 = 365,25\text{dni}$$

Sledi:

$$\frac{4\pi^2}{t_0^2} = \frac{Gm_S}{r^3}$$

$$2Gm_s = \frac{8\pi^2 r^3}{t_0^2}$$

in

$$v = \sqrt{\frac{8\pi^2 r^2}{t_0^2}} = \frac{r\pi\sqrt{8}}{t_0} = 42,2\text{km/s}$$

2010 ST Oseba z maso 60 kg bi imela na nekem eksoplanetu težo 700 N. Kolikšen je težni pospešek na tem eksoplanetu?

Teža telesa F_g je produkt mase m in težnega pospeška g. Če sta znani teža in masa telesa na eksoplanetu, potem za težni pospešek velja $g = F_g/m = 11,67 m/s^2$.

2010 DT Izračunaj obhodni čas asteroida Evropa okoli Sonca, če je ta od Sonca na povprečni oddaljenosti 3,10 astronomske enote. Predpostavi, da se Evropa giblje po krožni orbiti in pomagaj si z gravitacijskim zakonom $F_g = G\ m_1\ m_2/r^2$ ter enačbo za centripetalni pospešek krožečega telesa $a_c = (2\pi/t_0)^2 r$. Astronomska enota 1 a. e. $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m, gravitacijska konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2.

Za telo, ki kroži okoli Sonca, velja, da je centripetalna sila enaka gravitacijski sili med telesoma. Z r_E označimo oddaljenost asteroida Evropa od Sonca, m_e njegovo maso, m_S maso Sonca in t_{0E} obhodni čas Evrope okoli Sonca.

Sledi:

$$m_E \left(\frac{2\pi}{t_{0E}^2}\right) r_E = \frac{G m_E m_S}{r_E^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{t_{0E}^2} = \frac{G m_S}{r_E^3}$$

$$t_{0E}^2 = \frac{4\pi^2 r_E^3}{G m_S}$$

Tako dobimo Keplerjev zakon. Ta velja tudi za vsa druga telesa, ki krožijo okoli Sonca, torej tudi za Zemljo. Zemljo si izberemo, ker za njo vemo, da je od Sonca oddaljena $r_Z = 1$ a.e. in je njen obhodni čas $t_{0Z} = 1$ leto.

Zapišemo Keplerjev zakon še za Zemljo:

$$t_{0Z}^2 = \frac{4\pi^2 r_Z^3}{G m_S}$$

Enačbi za Evropo in Zemljo delimo, ter se tako znebimo mase Sonca.

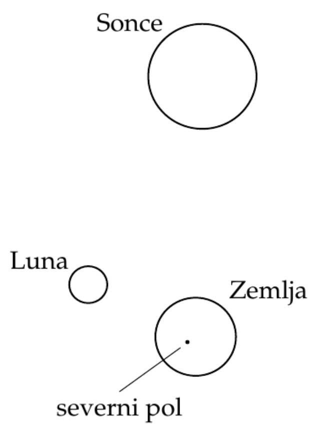
$$\frac{t_{0Z}^2}{t_{0E}^2} = \frac{r_Z^3}{r_E^3}$$

Sledi, da je obhodni čas asteroida Evropa okoli Sonca

$$t_{0E}^2 = t_{0Z}^2 \frac{r_E^3}{r_Z^3}$$

$$t_{0E} = 1\text{leto}\sqrt{\frac{r_E^3}{(1a.e.^3)}} = 1\text{leto}\sqrt{3 \cdot 10^3} = 5.46\text{leta}$$

Na sliki je pogled na razporeditev Sonca, Lune in Zemlje v prostoru (pogled nad severnim polom Zemlje) v trenutku, ko je v nekem obmorskem kraju plima največja. Pojasni, ali bo naslednja plima v tem kraju večja ali manjša? Pomagaj si s skico in določitvijo smeri gibanja Zemlje in Lune. (Mišljena je samo plima, ki je posledica sil med vesoljskimi telesi, brez upoštevanja drugih faktorjev (veter, valovanje, resonančni učinki itd.). Razdalje in velikosti teles niso v merilu.) 2010 DT



Najprej na sliki določimo smer vrtenja Zemlje in kroženja Lune. Zemlja se vrti v nasprotni smeri urinega kazalca. V isti smeri kroži tudi Luna. Višina plime je povezana z gravitacijsko silo Lune, v manjši meri pa z gravitacijsko silo Sonca. To pomeni, da je plima najvišja, ko so Sonce, Luna in Zemlja poravnani. Ker se v našem primeru Luna giblje stran od zveznice med Zemljo in Soncem, bo naslednji dan plima manj izrazita.

2012 ST Umetni satelit z maso 750 kg se okoli Zemlje giblje po krožni orbiti 500 km nad površjem. Predpostavi, da je Zemlja idealna krogla s polmerom 6370 km in maso $6 \cdot 10^{24}$ kg.

(a) Izračunaj obhodni čas satelita.

(b) Izračunaj razmerje med potencialno in kinetično energijo satelita.

(c) Satelit zaradi zračnega upora počasi izgublja višino. Izračunaj, za koliko se zaradi tega spremeni kinetična energija satelita, če se z začetne orbite spusti za 50 km. Računaj, kot da je tudi spremenjena orbita krožna.

(d) Izračunaj, za koliko se spremeni skupna (kinetična in potencialna) energija satelita, ko se spusti na novo orbito? Je skupna energija satelita na nižji orbiti večja ali manjša kot na začetku? Dokaži z računom!

Pomagala:
Centripetalni pospešek: $a_c = v^2/r$; v je hitrost krožečega telesa, r polmer krožnice. Gravitacijska sila med točkastima oz. krogelnosimetričnima telesoma: $F_g = GMm/r^2$; gravitacijska konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2; M masa enega telesa, m masa drugega telesa, r oddaljenost med središčema teles. Potencialna energija v okolici krogelnosimetričnega planeta z maso M: $W_p = -GMm/r$; r je oddaljenost od središča planeta, m je masa satelita.

Ker se umetni satelit giblje po krožni orbiti polmera r_1, velja, da je centripetalni pospešek satelita enak težnemu pospešku oz. je centripetalna sila enaka gravitacijski sili. Ker je v nalogi podana višina satelita nad Zemljinim površjem h in polmer Zemlje R_Z, velja:

$$r_1 = R_Z + h = 6370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6870 \text{ km} \tag{1}$$

$$a_c = g \,, \quad (2a)$$
$$v^2/r_1 = GM/r_1^2 \quad (2b)$$
$$v^2 = GM/r_1 \text{oz.} \quad (2c)$$
$$v = \sqrt{GM/r_1} \quad (2d)$$

Pri enakomernem kroženju velja

$$v = 2\pi r_1/t_0 \,, \quad (3)$$

kjer je t_0 obhodni čas satelita. Enačbi 2d in 3 združimo $2\pi r_1/t_0 = \sqrt{GM/r_1}$.

Obhodni čas je torej

$$t_0 = 2\pi r_1/\sqrt{GM/r_1}\,, \text{oz.} \quad (4a)$$
$$t_0 = 2\pi\sqrt{r_1^3/GM} = 5656 \text{ s} = 1h34 \text{ min} \pm 5 \text{ minut} \,. \quad (4b)$$

Razmerje med potencialno in kinetično energijo satelita s polmerom orbite r_1:

$$W_p/W_k = -GMm/r/mv^2/2 = -2M/r_1v^2 \,. \quad (5)$$

V enačbo 5 vstavimo 2c:

$$W_p/W_k = -2M/r_1/GM/r_1 = -2 \,. \quad (6)$$

Razmerje med potencialno in kinetično energijo satelita je -2. Absolutna vrednost potencialne energije je natanko dvakrat večja od kinetične energije.

Nova orbita ima polmer $r_2 = r_1 - 50$ km $= 6820$ km.

Kinetična energija na prvi orbiti je:

$$W_{k1} = mv_1^2/2 \,. \quad (7)$$

Kvadrat hitrosti je izražen z enačbo 2c. Sledi

$$W_{k1} = GMm/2r_1 \,. \quad (8)$$

Enako zapišemo tudi kinetično energijo na drugi orbiti:

$$W_{k2} = GMm/2r_2 \,. \quad (9)$$

Sprememba kinetične energije satelita delta W_k je potemtakem

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = GMm/2 \cdot (1/r_2 - 1/r_1) \doteq 1,6 \cdot 10^8 J \ . \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

Kinetična energija se poveča za $1,6 \cdot 10^8$ J.

Iz enačbe 6 sledi, da je skupna kinetična in potencialna energija satelita

$$W_p + W_k = -2W_k + W_k = -W_k \text{ ali} \tag{12a}$$
$$W_p + W_k = W_p - W_p/2 = W_p/2 \ . \tag{12b}$$

Skupno potencialno in kinetično energijo lahko računamo po 12a ali 12b. Zapišemo skupno energijo na prvi in drugi orbiti:

$$W_{p1} + W_{k1} = W_{p1}/2 = -GMm/r_1 \ , \tag{13a}$$
$$W_{p2} + W_{k2} = W_{p2}/2 = -GMm/r_2 \ . \tag{13b}$$

Ker iščemo spremembo skupne energije, ko se satelit spusti na nižjo orbito, enačbi 13a in 13b odštejemo:

$$\begin{aligned} \Delta W_p + W_k &= -GMm/r_2 - (-GMm/r_1) \\ &= -GMm \cdot (1/r_2 - 1/r_1) = -3,2 \cdot 10^8 \text{ J} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Sprememba skupne energije satelita je $-3,2 \cdot 10^8$ J. Do tega rezultata bi lahko prišli tudi iz enačbe 12a. Sprememba celotne energije je negativna, zato je celotna energija satelita na nižji orbiti manjša kot na višji, čeprav se je kinetična energija povečala. Negativni predznak v enačbi 14 je dokaz za zmanjšanje skupne energije.

2013 ST Komet 11P/Tempel-Swift-LINEAR je periodični komet, ki je v afeliju od Sonca oddaljen 5,29 astronomske enote. Njegova hitrost v afeliju je 10,45 km/s. Kolikšna je velika polos tira njegove orbite v astronomskih enotah? (Namig. Ker nimaš podane gravitacijske konstante in mase Sonca, si pomagaj s tem, kar veš o gibanju Zemlje okoli Sonca.)

Komet z maso m_k je gravitacijsko vezan na Sonce, saj kroži po eliptični orbiti z veliko polosjo a, zato za vsoto njegove kinetične in potencialne energije velja:

$$W_{kinetična} + W_{potencialna} = -\frac{Gm_k M}{2a} \ , \tag{1}$$

kjer je G gravitacijska konstanta, M pa masa Sonca. Ker to velja za vsako točko na orbiti, zgornji izraz zapišemo za afelij, ko je komet od Sonca oddaljen r_a in je njegova hitrost v_a:

$$\frac{m_k v_a^2}{2} - \frac{G m_k M}{r_a} = -\frac{G m_k M}{2a} \ . \tag{2}$$

Iz enačbe 2 izrazimo veliko polos tira kometa:

$$a = \frac{G M r_a}{2GM - r_a v_a^2} \ . \tag{3}$$

Ker nimamo podane gravitacijske konstante in mase Sonca, izkoristimo 3. Keplerjev zakon za Zemljo:

$$\frac{a_Z^3}{t_Z^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \ , \tag{4}$$

kjer je a_Z velika polos Zemljine orbite okoli Sonca oz. kar 1 astronomska enota, t_Z pa obhodni čas Zemlje oz. 1 leto.

Iz 4 izrazimo produkt gravitacijske konstante in mase Sonca:

$$GM = 4\pi^2 \frac{a_Z^3}{t_Z^2}$$

in ga nadomestimo v enačbi 3:

$$a = \frac{4\pi^2 r_a \frac{a_Z^3}{t_Z^2}}{8\pi^2 \frac{a_Z^3}{t_Z^2} - r_a v_a^2} \ .$$

Pred vstavljanjem vrednosti moramo še urediti enote. Najenostavneje je spremeniti enote pri hitrosti kometa:
$v_a = 10,45$ km/s $= 2,2$ a.e./leto. Tako za veliko polos tira kometa a dobimo:
$a = 3{,}9$ a.e.

Velika polos tira kometa je 3,9 astronomske enote.

---

1. S podanimi podatki izračunaj, s kolikšno hitrostjo bi padla Zemlja na Sonce, če bi se na svoji orbiti nenadoma ustavila? Oddaljenost Zemlje od Sonca je 150 000 000 km, polmer Sonca 700 000 km, kotna hitrost Zemlje pri gibanju okoli Sonca je 1°/dan.

Za izračun rezultata imamo na razpolago podatke: oddaljenost Zemlje od Sonca r = 150000000 km, polmer Sonca R_S = 700000 km, kotna hitrost Zemlje pri gibanju okoli Sonca $\omega = 1^\circ/\text{dan} = 2 \cdot 10^{-7}$ rad/s.

Če bi se Zemlja ustavila, bi začela padati proti središču Sonca. Pri tem bi bila sprememba njene kinetične energije enaka spremembi potencialne energije glede na Sonce. Razlika potencialne energije od orbite do površja Sonca je enaka kar kinetični energiji, ki bi jo imela Zemlja ob padcu na Sonce. Naj bo m_S masa Sonca, m_Z pa masa Zemlje. Upoštevamo še, da je potencialna energija negativna. G je gravitacijska konstanta. Sledi:

$$Gm_S m_Z/R - Gm_S m_Z/r = m_Z v^2/2 \ .$$

Masa zemlje se okrajša:

$$Gm_S m_Z/R - Gm_S m_Z/r = m_Z v^2/2 \ .$$

Izrazimo hitrost v, s katero pade Zemlja na Sonce:

$$v = \sqrt{2Gm_S/R - 2Gm_S/r} = \sqrt{2Gm_S(1/R - 1/r} \ . \tag{1}$$

Ker nimamo podatkov za maso Sonca in gravitacijske konstante, si pomagamo s podanimi podatki. Pri gibanju Zemlje okoli Sonca in pri predpostavki, da se giblje po krožnici s polmerom r, je gravitacijska sila med Soncem in Zemljo F_g enaka centripetalni sili F_c:

$$F_g = Gm_S m_Z/r^2 \ , \tag{2}$$

$$F_c = m_Z \omega^2 r \ . \tag{3}$$

Enačbi 2 in 3 izenačimo in dobimo:

$$Gm_S m_Z/r^2 = m_Z \omega^2 r \ . \tag{4}$$

Masa Zemlje se okrajša in iz 4 izrazimo:

$$Gm_S = \omega^2 r^3 \ .$$

S tem izrazom nadomestimo produkt gravitacijske konstante in mase Sonca v enačbi 1: $v = \sqrt{2\omega^2 r^3 (1/R - 1/r} = 620$ km/s.

Zemlja, ki bi obstala na svoji orbiti, bi na Sonce padla s hitrostjo 620 km/s.

Med zaporednima ščipoma Lune mine 29,5 dneva. Predpostavi, da se Luna okoli Zemlje giblje enakomerno po krožnici in iz **v nalogi danih podatkov** izračunaj njeno oddaljenost od središča Zemlje. Težni pospešek na površju Zemlje je 10 m/s^2, polmer Zemlje je 6400 km, obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 365,25 dneva. 2014 ST

Čas med zaporednima ščipoma oz. trajanje lunacije $t_L = 29{,}5$ dneva je sinodska obhodna doba Lune (Luna pride v isto lego glede na Sonce). Za izračun oddaljenosti r Lune imamo še sledeče podatke: težni pospešek na površju Zemlje $g = 10$ m/s^2, polmer Zemlje $R = 6400$ km in obhodno dobo Zemlje okoli Sonca $t_Z = 365{,}25$ dneva.

Oddaljenost Lune od Zemlje izračunamo s Keplerjevim oz. gravitacijskim zakonom za kroženje Lune okoli Zemlje, pri čemer velja, da je gravitacijska sila F_g enaka centripetalni sili F_c:

$$\begin{aligned} F_g &= G m_L m_Z / r^2 \ , && (1) \\ F_c &= m_L \omega_{Ls}^2 r \ , && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

kjer je G gravitacijska konstanta, m_L masa Lune, m_Z masa Zemlje, ω_{Ls} siderska kotna hitrost Lune okoli Zemlje.

ω_{Ls} izrazimo s siderskim obhodnim časom Lune okoli Zemlje: $\omega_{Ls} = 2\pi / t_{Ls}$, in enačbi 2 in 3 izenačimo:

$$G m_L m_Z / r^2 = m_L (2\pi / t_{Ls})^2 r \ . \tag{4}$$

Iz enačbe 4 izrazimo iskano oddaljenost Lune od Zemlje:

$$r = \sqrt[3]{G m_Z t_{Ls}^2 / 4\pi^2} \ . \tag{5}$$

Vidimo, da za izračun oddaljenosti Lune potrebujemo gravitacijsko konstanto, maso Zemlje in sidersko obhodno dobo Lune okoli Zemlje, ki jih pa v nalogi niso podane. Produkt gravitacijske konstante in mase Zemlje lahko izrazimo s težnim pospeškom in polmerom Zemlje, saj iz gravitacijskega zakona vemo, da je:

$$g = G m_Z / R^2 \tag{6}$$

Iz enačbe 6 izrazimo ta produkt:

$$Gm_Z = gR^2 \tag{7}$$

in ga vstavimo v enačbo 5:

$$r = \sqrt[3]{gR^2 t_{Ls}^2 / 4\pi^2}\ . \tag{8}$$

Siderski obhodni čas Lune pa izrazimo iz sinodskega obhodnega časa in obhodne dobe Zemlje okoli Sonca, ki sta v nalogi podana. Za sinodsko kotno hitrost Lune ω_L velja, da je enaka razliki siderske kotne hitrosti Lune ω_{Ls} in kotne hitrosti Zemlje pri gibanju okoli Sonca ω_Z:

$$\omega_L = \omega_{Ls} - \omega_Z\ . \tag{9}$$

Kotne hitrosti izrazimo z obhodnimi časi:

$$2\pi/t_L = 2\pi/t_{Ls} - 2\pi/t_Z \tag{10}$$

oziroma okrajšano

$$1/t_L = 1/t_{Ls} - 1/t_Z\ . \tag{11}$$

Iz enačbe 11 izrazimo t_{Ls} z znanima količinama:

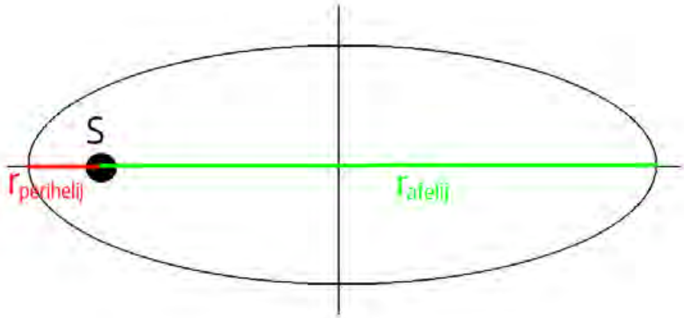
$$t_{Ls} = t_Z t_L/(t_Z + t_L) = 27{,}3\ \text{dneva.} \tag{12}$$

V enačbo 8 vstavimo 12 in za oddaljenost Lune dobimo končni izraz:

$$r = \sqrt[3]{gR^2 t_Z^2 t_L^2 / 4\pi^2 (t_Z + t_L)^2} = 3{,}86 \cdot 10^8\text{m} = 386000\text{km}\ . \tag{13}$$

Oddaljenost Lune od Zemlje, izračunana iz podatkov v nalogi, je 386000 km.

2014 DT Komet West je v začetku leta 1976 letel vsega 0,2 astronomske enote (a. e.) od Sonca. To je bil komet, ki je prišel iz 50 000 a. e. oddaljenega predela Oortovega oblaka, skrajnega roba Osončja. Izračunaj, koliko časa je komet West potoval od Oortovega oblaka do perihelija. Predpostavi, da se komet okoli Sonca giblje po eliptični orbiti in je bil v Oortovem oblaku v afeliju. Pri računanju uporabi znane podatke za orbito Zemlje: obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 1 leto, oddaljenost Zemlje od Sonca je 1 a. e.



$$a_w = \frac{r_{perihelij} + r_{afelij}}{2} = 25000,1 a.e.$$

$$\frac{a_w^3}{P_w^2} = \frac{a_{Zemlja}^3}{P_{Zemlja}^2} \Rightarrow P = P_{Zemlja}\sqrt{\frac{a_w}{a_{Zemlja}}}^{3} = 3,95 * 10^6 let$$

$$t = \frac{P_{kometa}}{2} = 1,98 * 10^6 let$$

Periodični komet v orbiti okrog Sonca je od njega najbolj oddaljen, ko se nahaja na razdalji 31.5 a.e., najbližje pa na razdalji 0.5 a.e. Kolikšna je perioda orbite tega kometa? Kolikšno površino (v kvadratnih a.e. na leto) opiše zveznica med kometom in Soncem? 2014 IT

Orbita je $(31.5 + 0.5)/2 = 16$ a.e. Perioda je $P = 16^{3/2} = 64$ let. Manjša polos orbite je $b = 3.97$ a.e. (iz $b^2 = a^2(1-e^2)$ in $a(1-e) = 0.5$ a.e.). Na leto opiše $\pi a\, b/P = \pi \cdot 16 \cdot 3.97/64 = 3.1$ a.e.^{2} / leto.

Svetloba

Svetloba je elektromagnetno valovanje. Svetloba v praznem prostoru potuje s hitrostjo $c = 2,99 \cdot 10^8$ m/s (izhaja iz definicije metra, glej AKMF).

Omeniti Roemerjevo meritev hitrosti svetlobe?

Svetlobna območja

Omeniti delitev na svetlobna območja.

Interferenca

Interferenca.

Uklon svetlobe

Rayleighev kriterij

Ločljivost

Polarizacija

Fotometrija

Absorpcija in sipanje svetlobe

Razklon svetlobe

Spektrometrija

Sevanje črnega telesa

Magnitude

Zvezo med gostoto svetlobnega toka dveh vesoljskih teles j_1 in j_2 ter njunima magnitudama m_1 in m_2 opisuje Pogsonov zakon:

$$j_2/j_1 = 10^{0,4(m_1-m_2)}$$

. Gostota svetlobnega toka pada s kvadratom oddaljenosti. Absolutna magnituda (M) je magnituda, ki bi jo imelo vesoljsko telo na oddaljenosti 10 parsekov.

1. Gostota svetlobnega toka, ki zapušča Sončevo fotosfero (površje), je $6,2 \cdot 10^7$ W/m. Z enačbo $E = mc^2$ izračunaj, koliko kilogramov snovi v Soncu se vsako sekundo pretvori v sevanje (energijo). Polmer Sonca je 700000 km, c pa hitrost svetlobe $c = 300000$ km/s. Op.: Gostota svetlobnega toka je energija v obliki svetlobe, ki gre vsako sekundo skozi kvadratni meter površja Sonca. Sonce je v ravnovesju. To pomeni, da toliko energije, kot jo proizvede, jo tudi odda v okoliški prostor. Računaj, kot daje Sonce krogla.

   Sonce obravnavamo kot kroglo s polmerom r. Vsak kvadratni meter površja oddaja gostoto energijskega toka $j = 6,2 \cdot 10^7$ W/m^2. Moč, ki jo oddaja celotna površina Sonca je $P = jS$, kjer je $S = 4\pi r^2$ površina Sonca. Sledi $P = j \cdot 4\pi r^2 = 3,8 \cdot 10^{26}$ W. Energija, ki jo Sonce odda v eni sekundi, je $E = P \cdot 1\text{s} = 3,8 \cdot 10^{26}$ J. Sonce je v energijskem ravnovesju: kolikor energije proizvede v jedrskih reakcijah, toliko je odda v okoliški prostor. Predpostavili smo, da oddaja energijo samo v obliki svetlobe (zanemarimo npr. 3% energije, ki jo odnesejo nevtrini). Izenačimo torej oddano energijo s proizvedeno energijo $E = mc^2$ in izrazimo koliko mase se mora v eni sekundi pretvoriti v energijo (sevanje): $m = E/c^2 = 3,8 \cdot 10^{26}\text{J}/(300.000\ \text{km/s})^2 = 4,2 \cdot 10^9$ kg.

2. Zvezde v prvem približku sevajo kot črno telo. Gostoto energijskega toka j, ki ga seva črno telo, opisuje Stefanov zakon $j = \sigma \cdot T^4$, kjer je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/m^2 K^4 Stefanova konstanta, T pa temperatura. Izsev neke zvezde je 6,6-krat večji od Sončevega, njena površinska temperatura je 30% višja kot na Soncu, masa pa 1,8-krat večja od mase Sonca. Newtonov gravitacijski zakon pravi, da je težni pospešek g na površju kakega telesa $g = G \cdot m/R^2$, kjer je gravitacijska konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3 /kg s^2, m masa telesa in R njegov polmer. Opomba: Gostota energijskega toka je energija v obliki svetlobe, ki gre vsako sekundo skozi kvadratni meter površja zvezde. Zvezde obravnavamo kot krogle. Izračunaj:

   A polmer zvezde v enotah polmerov Sonca;

   B razmerje povprečnih gostot zvezde in Sonca;

   C razmerje težnih pospeškov na "površju" zvezde in Sonca.

   Zvezdo si zamislimo kot kroglo s polmerom R in temperaturo T.

   A Izsev zvezde je enak produktu gostote svetlobnega toka na njenem površju in površini. $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Za Sonce velja enako $L_S =$

$4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$. ZapiĹˇemo razmerje njunih izsevov $L/L_S = (R/R_S)^2 (T/T_S)^4$. Iz podatkov vemo, da je $L/L_S = 6,6$. Sledi: $R/R_S = \sqrt{6,6}(T_S/T)^2 = 1,52 \sim 1,5$ oz.$R = 1,5R_S$.

B Ker obravnavamo zvezdo in Sonce kot kroglo, povprečno gostoto zvezde zapiĹˇemo kot $\rho = m/(4\pi R^3/3)$, Sonca pa $\rho_S = m_S/(4\pi R_S^3/3)$. Razmerje gostote zvezde in Sonca je $\rho/\rho_S = m/m_S(R_S/R)^3$. Iz podatkov vemo, da je $M = 1,8m_S$, razmerje njunih polmerov pa smo izračunali pod prejšnjo točko. Za razmerje njunih gostot tako dobimo $\rho/\rho_S = 1,8(1/1,5)^3 = 0,53$.

C Zapišimo težni pospešek na "površju" zvezde g in Sonca g_S: $g = Gm/R^2$, $g_S = Gm_S/R_S^2$. Za razmerje težnih pospeškov dobimo $g/g_S = m/m_S(R_S/R)^2$. Iz prej izračunanih vrednosti in podatkov pa rezultat $g/g_S = 1,8(1/1,5)^2 = 0,8$.

3. Kolikšna je temperatura v prisončni točki Merkurja ($d_M = 58 \times 10^6$ km), če privzamemo, da je Merkurjevo površje črno telo in da je doseženo toplotno ravnovesje? Kot vrednost solarne konstante upoštevaj 1370 W m^{-2}.

Podatki:
$d_M = 58 \times 10^6$ km $= 58 \times 10^9$ m
$d_Z = 149597870691$ m $= 150 \times 10^9$ m
$j_Z = 1370$ W m^{-2}
$\sigma = 5.6705 \times 10^{-8}$ J s^{-1} m^{-2} K^{-4}

$$j_M = j_Z \left(\frac{d_Z}{d_M}\right)^2 \tag{14}$$

$$\sigma T^4 = j_Z \left(\frac{d_Z}{d_M}\right)^2 \tag{15}$$

$$T = \left(\frac{j_Z}{\sigma}\left(\frac{d_Z}{d_M}\right)^2\right)^{1/4} \tag{16}$$

$$T = 634\,\mathrm{K} \tag{17}$$

2013 IT Sistem treh zvezd ima skupno navidezno magnitudo 0.0. Dve zvezdi imata navidezno magnitudo $\mathrm{m}_1 = 1.2$ in $\mathrm{m}_2 = 4.5$. Kolikšna je navidezna magnituda tretje zvezde? Predpostavimo, da imata najsvetlejši zvezdi trojnega sistema enak radij. Zapiši razmerje površinskih temperatur, če svetita kot črni telesi. Podatki:
$\mathrm{m}_{tot} = 0.0$
$\mathrm{m}_1 = 1.2$

$\mathrm{m}_2 = 4.5$

Zakon za magnitude lahko zapišemo kot

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{j}{j_0} \ ,$$

kjer sta m_0 in $\mathrm{j}_=$ referenčna magnituda oziroma jakost svetlobnega toka. Zato, da dobimo tretjo magnitudo, moramo upoštevati jakosti svetlobnega toka. Zgornjo formulo lahko izrazimo

$$j = j_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m-m_0)} \, .$$

Torej lahko zapišemo:

$$j_{tot} = j_1 + j_2 + j_3$$

saj so vse zvezde na isti razdalji.

$$\begin{aligned}
j_3 &= j_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_3-m_0)} \\
&= j_{tot} - j_1 - j_2 \\
&= j_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_{tot}-m_0)} - j_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(m_1-m_0)} - j_0 \cdot 10^{-0.4\cdot(} \\
j_0 \cdot 10^{0.4m_0} \cdot 10^{-0.4m_3} &= j_0 \cdot 10^{0.4m_0} \cdot (10^{-0.4m_{tot}} - 10^{-0.4m_1} - 10^{-0.4m_2}) \\
10^{-0.4m_3} &= 10^{-0.4m_{tot}} - 10^{-0.4m_1} - 10^{-0.4m_2} \\
&= 1 - 10^{-0.48} - 10^{-1.8} = 0.653 \\
m_3 &= \log(0.653)/(-0.4) = 0.46
\end{aligned}$$

Za najsvetlejši zvezdi trojnega sistema, torej zvezdi z magnitudama m_3 in m_1 lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
m_3 - m_1 &= -2.5 \log(\frac{j_3}{j_1}) && (25) \\
&= -2.5 \log(\frac{L_3/4\pi d^2}{L_1/4\pi d^2}) && (26) \\
&= -2.5 \log(\frac{\sigma T_3^4 \, 4\pi R^2}{\sigma T_1^4 \, 4\pi R^2}) && (27) \\
&= -2.5 \log(\frac{T_3^4}{T_1^4}) = -10 \log(\frac{T_3}{T_1}) && (28)
\end{aligned}$$

Torej je razmerje temperatur T_3/T_1 enako

$$\frac{T_3}{T_1} = 10^{-0.1\cdot(m_3-m_1)} = 1.18 \, .$$

2014 ST Neka zvezda ima izsev L $= 10^{27}$ W. Izračunaj, na kolikšni največji oddaljenosti bi jo lahko še videli brez teleskopa, če je najmanjša vstopna moč svetlobe, ki jo še zazna oko, 10^{-17} W. Premer zenice očesa je 8 mm. Predpostavi, da je med zvezdo in nami prazen prostor. Izsev zvezde L $= 10^{27}$ W je tudi svetlobna moč zvezde. Najmanjša vstopna moč svetlobe, ki jo še zazna oko $P_{min} = 10^{-17}$ W, premer zenice očesa $2R = 8$ mm oz. $R = 4\cdot\, 10^{-3}$ m.

Gostota svetlobnega toka j pada obratno sorazmerno s kvadratom oddaljenosti r od zvezde. Drugače povedano, ker je med zvezdo in nami prazen prostor, gre skozi površino $(4\pi r^2)$ vsake koncentrične krogelne lupine s polmerom r in središčem v zvezdi vsa izsevana energija zvezde. Zato za gostoto svetlobnega toka j na oddaljenosti r od zvezde velja:

$$j = L/4\pi r^2 \; . \tag{29}$$

Najmanjšo gostoto svetlobnega toka j_{min}, ki jo še zazna oko, izrazimo s P_{min} in površino zenice očesa:

$$j_{min} = P_{min}/\pi R^2 \; . \tag{30}$$

Zvezdo bomo še videli, če bo $j = j_{min}$. Iz enačb 29 in 30 tako sledi:

$$L/4\pi r^2 = P_{min}/\pi R^2 \; . \tag{31}$$

Iz enačbe 31 izrazimo iskano oddaljenost zvezde:

$$r = R\sqrt{L/4P_{min}} \; . \tag{32}$$

$$r = 4\cdot 10^{-3} m\sqrt{10^{27}W/4\cdot 10^{-17}W} = 2\cdot 10^{19} \text{ m} \tag{33}$$

Zvezdo bi še videli na oddaljenosti $2\cdot 10^{19}$ metrov.

2014 DT Zvezdana je v razsuti zvezdni kopici opazovala dve zvezdi. Ugotovila je, da zvezdi pripadata glavni veji H-R diagrama, njuna navidezna sija pa se razlikujeta za 2 magnitudi. Nato je izmerila še njuni efektivni (površinski) temperaturi. Pokazalo se je, da ima ena zvezda efektivno temperaturo 6000 K, druga pa 5000 K. Zvezdani pomagaj izračunati razmerje polmerov teh zvezd. Predpostavi, da zvezdi sevata kot črni telesi po Stefanovem zakonu ($j = \sigma T^4$; j je gostota svetlobnega toka na površju, T je efektivna temperatura zvezde, Stefanova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4). Razdalje med zvezdami v kopici so zelo majhne v primerjavi z oddaljenostjo kopice od Zemlje.

$\Delta M = 2$
$T_1 = 5000K$
$T_2 = 6000K$

(a) **Prva rešitev:**

$$\frac{j_1}{j_2} = 10^{-0,4(M_1-M_2)} = \frac{\sigma T_1^4 * 4\pi R_1^2}{\sigma T_2^4 * 4\pi R_2^2} = \frac{T_1^4 R_1^2}{T_2^4 R_2^2} = 10^{-0,4(M_1-M_2)}$$

$$(\frac{R_1}{R_2})^2 = (\frac{T_1}{T_2})^4 10^{-0,4(M_1-M_2)}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = (\frac{6000}{5000})^2 * 10^{-0,4}$$

(b) **Druga rešitev:**

$$P = j * S = \sigma T^4 * 4\pi R^2$$

$$\frac{j_1}{j_2} = 2,512^{\Delta M} = \frac{P_1 2\pi d_1^2}{P_2 2\pi d_2^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{\sigma T_1^4 * 4\pi R_1^2}{\sigma T_2^4 * 4\pi R_2^2} = 2,5^2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2,5\frac{T_2^2}{T_1^2} = 1,75$$

(c) **Tretja rešitev:**

$$M_1 - M_2 = -2,5log\frac{j_1}{j_2}$$

$$j_1 = \frac{L_1}{4\pi d_1^2}$$

$$M_1 - M_2 = -2,5log\frac{L_1}{L_2}\frac{4\pi d_2^2}{4\pi d_1^2} = -2,5log\frac{L_1}{L_2}$$

$$L_1 = \sigma T_1^4 * 4\pi R_1^2$$

$$\Delta M = -2,5log\frac{\sigma T_1^4 * 4\pi R_1^2}{\sigma T_2^4 * 4\pi R_2^2} = -10log\frac{T_1}{T_2} - 5log\frac{R_1}{R_2}$$

$$\log\frac{R_2}{R_1} = \frac{\Delta M + 10log\frac{T_1}{T_2}}{5} = \frac{1,208}{5} = 0,242$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 10^{\frac{2+10log\frac{5000}{6000}}{5}} = 10^{0,242} = 1,74$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{\frac{-2+10log\frac{6000}{5000}}{5}} = 10^{-0,242} = 0,57$$

2014 IT Pred 10 leti so v Rimski cesti opazili izbruh nove (t.j. eksplozija površinskih plasti na zvezdi, pri čemer snov odnese enakomerno na vse strani). Iz spektroskopskih opazovanj so ugotovili, da se je spektralna črta Hα (656.3 nm) zaradi širjenja ovojnice razmazala vse od 606.3 nm do 706.3 nm. Ti skrajni vrednosti pripadata snovi, ki se giblje direktno proti nam oziroma od nas.

(a) Kolikšna je hitrost s katero se širi ovojnica? Kako daleč od zvezde se je v 10 letih po eksploziji razširila ovojnica, če je širjenje vseskozi enakomerno?

(b) Kolikšna je oddaljenost nove, če po 10 letih ovojnico vidimo na nebu kot majhen krožec s polmerom 3 ločne sekunde?

(c) Pred koliko leti je v resnici eksplodirala ta nova?

Podatki:
$\lambda_{H\alpha} = 656,3$ nm
$\lambda_{+} = 703.3$ nm
$\lambda_{-} = 603.3$ nm
$\theta = 3''$

(a) Hitrost ovojnice je

$$v = \frac{\lambda - \lambda_{H\alpha}}{\lambda} \cdot c = 22855 \text{ m/s}$$

Oddaljenost do katere se je razširila ovojnica je

$$R = v \cdot t = 22855 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ let} = 7.2 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

(b) Oddaljenost nove je

$$d = \frac{2\ R}{\theta} = \frac{2 \cdot 7.2 \cdot 10^{12} \text{ m}}{1.45 \cdot 10^{-5}} = 9.9 \cdot 10^{17} \text{m}$$

V galaksiji Veliki Magellanov oblak (VMO) je 10^{10} zvezd. Navidezna 2015
magnituda VMO (prispevek svetlobe vseh zvezd v VMO) na nebu ST
je +1m. Predpostavi, da so vse zvezde v VMO enake, se ne prekrivajo in so od nas enako oddaljene. Izračunaj navidezno magnitudo posamezne zvezde v VMO. **B4.**

Število zvezd v Velikem Magellanovem oblaku (VMO) N = 10^{10}.
Navidezna magnituda VMO m = +1.
Navidezni sij VMO in z njim povezana gostota svetlobnega toka galaksije j je vsota svetlobnih tokov j_z vse zvezd v njem:
$j = 10^{10} \cdot j_z$.
Ker nas zanima, koliko znaša navidezna magnituda posamezne zvezde m_z, zapišemo Pogsonov zakon za razliko magnitud dveh nebesnih teles:
$m - m_z = -2,5 \log(j/j_z)$,
$m - m_z = -2,5 \log(10^{10} j_z/j_z)$,
$m - m_z = -2,5 \log(10^{10} j_z/j_z)$.
j_z se okrajša in dobimo:
$m_z = m + 25 = +1 + 25 = +26$.

Magnituda posamezne zvezde v Velikem Magellanovem oblaku je +26.

Tekmovalec lahko nalogo reši tudi na drugačen način. Svetlobni tok dveh nebesnih teles, ki se po navideznem siju razlikujeta za 5 magnitud, je pri manj svetlem telesu 100-krat manjši kot pri svetlejšem. Ker svetlobni tok VMO sestavlja $j = 10^{10} \cdot j_z$, sklepamo, da je svetlobni tok posamezne zvezde 10^{10}-krat manjši kot VMO, zato vsak faktor $100 = 10^2$ pomeni 5 magnitud manj, skupaj torej 5· 5m = 25 m. Sledi, da je magnituda posamezne zvezde
$m_z = m + 25 = +1 + 25 = +26.$

2015 DT Sredi 17. stoletja je Christiaan Huygens prvi izmeril navidezne premere planetov. S pomočjo te meritve je lahko naredil tudi prvo realno oceno oddaljenosti bližnjih zvezd. Razmišljal je nekako tako: Šaturnov navidezni sij je ob opoziciji enak navideznemu siju svetlih zvezd na nebu, zvezde pa naj so po vseh fizikalnih lastnostih enake Soncu. Ker poznam oddaljenost Saturna od Sonca v astronomskih enotah in sem izmeril njegov zorni kot ob opoziciji, lahko izračunam oddaljenost zvezd v astronomskih enotah. Da bo lažje, bom privzel, da je albedo Saturna 1."Pojdi po Huygensovih stopinjah in z danimi podatki izračunaj/oceni oddaljenost blližjih zvezd v astronomskih enotah. Zorni kot Saturna ob opoziciji je 20”. Predpostavi, da se Saturn okoli Sonca giblje po krožnici s polmerom 10 a. e. Oddaljenost Saturna od Sonca $r_S = 10$ a.e.
Oddaljenost Zemlje od Saturna ob opoziciji $r_Z = r_S$ - 1 a.e.
Zorni kot Saturna $\varphi = 20$"

Ker poznamo podatke za navidezni sij Saturna ob opoziciji, lahko izrazimo svetlobni tok Saturna j_S na Zemlji. Sonce osvetljuje Saturn z gostotot svetlobnega toka
$j = \mathrm{L}/(4\pi r_S^2)$, (1)
kjer je L izsev Sonca.
S Soncem je osvetljena le polovica Saturna, ki to svetlobo odbija v polovico prostora (privzamememo, da je albedo 1 oz, da se vsa Sončeva svetloba odbije od Saturna), zato lahko zapišemo gostoto svetlobnega toka j_S, ki pride od Saturna na Zemljo:
$j_S = j\pi R_S^2/(2\pi r_Z^2)$, (2)
Kjer je R_S polmer Saturna.
V enačbo (2) vstavimo (1) in dobimo:

$j_S = LR_S^2/(8\pi r_Z^2 r_S^2)$. (3)
Huyghens je predpostavil, da je izsev zvezd enak izsevu Sonca in da je navidezna magnituda oz. svetlobni tok zvezd j_Z na Zemlji enak kot s Saturna:
$j_Z = j_S$ (4a)
in
$j_Z = L/(4\pi r^2)$, (4b)
kjer je r iskana oddaljenost zvezd.
Izenačimo (4b) in (3):
$LR_S^2/(8\pi r_Z^2 r_S^2) = L/(4\pi r^2)$
in izrazimo
$r_Z = \sqrt{2} r_S r_Z / R_S$. (5)
Polmer Saturna r_S izrazimo z izmerjenim polmerom njegovega zornega kota ob opoziciji:
$\tan(\varphi/2) = R_S/r_Z$.
Ker je φ majhen, dobimo:
$R_S = r_Z\varphi/2, (6)$
kjer je φ v radianih.
S (6) nadomestimo polmer Saturna v (5) in dobimo:

$$r_Z = \sqrt{2} r_S/(\varphi/2) = 2\sqrt{2} r_S/\varphi = 292000 \text{ a.e.}$$

S Huyghensovo oceno smo za oddaljenost bližnjih zvezd dobili 292000 astronomskih enost.

Če to vrednost prevedemo v bolj domača svetlobna leta, znaša približno 4,6 svetlobnega leta, kar se zelo dobo ujema z dejanskimi vrednostmi oz. se ujema v velikostnem razredu oddaljenosti zvezd.

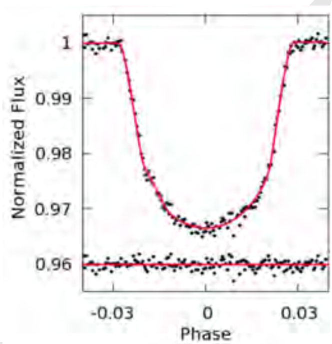
Okoli zvezde so odkrili planet tako, da so posneli njen sij ob različnih 2016
časih in ugotovili, da prihaja do mrkov. Zvezda ima površinsko IT
temperaturo $T = 4000$ K, maso $M = 1.17 M_\odot$, navidezno magnitudo izven mrka $m_\star = 16.6$, oddaljena pa je 5000 svetlobnih let.

(a) Kolikšen je radij zvezde $R_\star$?

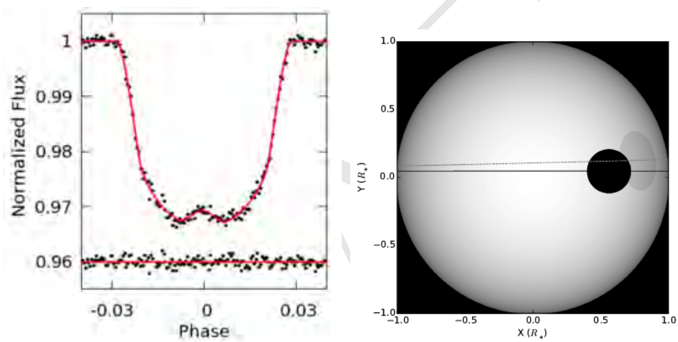
(b) Kako velik je planet, ki kroži okrog te zvezde (R_p)? (*Namig: pri izračunu radija planeta boš potreboval/a svetlobno krivuljo na spodnji sliki levo.*)

(c) Planet obkroži zvezdo v 1.2 dneva. Kolikšna je temperatura na njegovem površju (upoštevaj albedo $a = 0.1$)? Privzemi, da je ekscentričnost planetove orbite enaka 0.

(d) V drugi svetlobni krivulji opaziš rahlo gubico, ki je posledica tega, da je planet med prehodom zakril pego na zvezdi. Planet in pega sta podobnih navideznih velikosti. Iz krivulje oceni kolikšno temperaturo ima pega. Pri tem upoštevaj, da tudi območje pege seva kot črno telo.



Slika 1: Svetlobna krivulja zvezde, okoli katere kroži planet.



Slika 2: Svetlobna krivulja zvezde s pego, ko okoli nje kroži planet. Gubica v svetlobni krivulji nastane, ko planet zakrije pego (prikaz na desni). V vaji upoštevaj, da sta planet in pega podobnih navideznih velikosti.

Podatki:
$T = 4000$ K
$M = 1.17 M_\odot$
$m = 16.6$
$d = 5000$ sv.let
$P = 1.2$ dneva
$m_\odot = -26.7$
krožna orbita

Gostota svetlobnega toka, ki z zvezde prispe na Zemljo, je (ob predpostavki, da sveti zvezda kot črno telo)

$$j = j_\star \frac{R^2}{d^2} = \sigma \cdot T^4 \frac{R^2}{d^2} \,. \tag{34}$$

Ker poznamo navidezno magnitudo (zvezde) lahko zapišemo, da je

$$j = j_z \cdot 10^{-0.4(m - m_\odot)} \,, \tag{35}$$

kjer je j_z solarna konstanta (gostota svetlobnega toka Sonca na Zemlji) in meri 1370 W/m^2. Od tu lahko enostavno izračunamo radij zvezde:

$$\sigma \cdot T^4 \frac{R^2}{d^2} = j_z \cdot 10^{-0.4(m - m_\odot)} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} R &= \left(j_z \cdot 10^{-0.4(m-m_\odot)} \cdot \frac{d^2}{\sigma \cdot T^4} \right)^{1/2} && (37) \\ &= \left(1370\mathrm{W/m}^2 \cdot 10^{-0.4(16.6+26.7)} \cdot \frac{25 \cdot 10^6 \mathrm{sv.let}^2}{5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4} \cdot 4^4 10^{12} K^4} \right)^{1/2} && (38) \\ &= 1.06 \cdot 10^{-7} \mathrm{sv.let} && (39) \\ &= 10^9 \mathrm{m}\,, && (40) \end{aligned}$$

kjer je 1sv.leto $= 9.46 \cdot 10^{15}$m.

Radij planeta dobimo iz zveze med obema gostotama svetlobnega toka s pomočjo slike in sicer

$$\frac{j_{izvenmrka} - j_{medmrkom}}{j_{izvenmrka}} = \frac{0.01}{1} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R^2} = 1.0 - 0.967 = 0.033 \tag{41}$$

Torej je $R_p = 0.18 R = 1.8 \cdot 10^8$ m.

Temperaturo planeta izračunamo iz formule

$$\begin{aligned} (1-a)\frac{L}{4\pi r_p^2} \pi R_p^2 &= (4\pi R_p^2) \sigma T_p^4 && (42) \\ T_p &= \left(\frac{(1-a)L}{16\pi\sigma r_p^2)} \right)^{1/4} && (43) \end{aligned}$$

pri tem pa moramo poznati razdaljo zvezde do planeta, r_p. Izsev zvezde pa vemo, da je $\sigma T^4 4\pi R^2$.

Razdaljo r_p izračunamo tako, da predpostavimo $M >> M_p$ in zapišemo 3. Keplerjev zakon:

$$\begin{aligned} r_p &= \left(\frac{P^2}{4\pi^2}\cdot G\cdot M\right)^{1/3} && (44)\\ &= \left(\frac{(1.2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}\cdot 6.7\cdot 10^{-11}\cdot 1.17\cdot 2\cdot 10^{30}\right)^{1/3} && (45)\\ &= 3.5\cdot 10^9\mathrm{m} && (46)\end{aligned}$$

in v primeru, da ne pride do absorpcije (planet je plinski velikan, $a \simeq 0.1$), bo njegova temperatura

$$\begin{aligned} T_p &= \left(\frac{(1-a)L}{16\pi\sigma r_p^2}\right)^{1/4} && (47)\\ &= \left(\frac{(1-a)\sigma T^4 4\pi R^2}{16\pi\sigma r_p^2}\right)^{1/4} && (48)\\ &= \left(\frac{(1-a)T^4R^2}{4r_p^2}\right)^{1/4} && (49)\\ &= \left(\frac{(1-a)4^4\cdot 10^{12}K^4\cdot 10^{18}m^2}{4\cdot 3.5^2\cdot 10^{18}m^2}\right)^{1/4} && (50)\\ &\simeq 1472\mathrm{K}\,. && (51)\end{aligned}$$

Uporabimo podoben razmislek kot za radij planeta, pri tem pa upoštevamo, da je $R_{pe} = R_p$. Namesto gostot svetlobnega toka pišemo izseve (ocenimo, da sta zvezda in planet sta enako oddaljena od nas). Označimo (normalizirani) izsev zvezde s pego kot

$$L_i = \sigma T^4(\pi R^2 - \pi R_{pe}^2) + \sigma T_{pe}^4 \pi R_{pe}^2 = 1\ .$$

Označimo izsev zvezde s planetom, ki popolnoma prekrije pego kot

$$L_{up} = \sigma T^4(\pi R^2 - \pi R_{pe}^2) = 0.97\ .$$

Označimo izsev zvezde s pego, ko zvezdo (ne pa pego) prekriva planet kot

$$L_{down} = \sigma T^4(\pi R^2 - \pi R_{pe}^2) + \sigma T_{pe}^4\pi R_{pe}^2 - \sigma T^4 \pi R_p^2 = 0.967\,.$$

Temperaturo pege ocenimo tako, da naredimo razmerje:

$$\frac{L_i - L_{up}}{L_i - L_{down}} = \frac{1 - 0.97}{1 - 0.967} = \frac{T_{pe}^4}{T^4} \tag{52}$$

$$T_{pe}^4 = T^4 \cdot 0.909 \tag{53}$$

$$= 3906\text{K} . \tag{54}$$

Zvezde in zvezdni sistemi

0.1. Zvezde

0.1.1. Spektri zvezd

Večino informacij o zvezdah pridobivamo s pomočjo svetlobe, ki jo zvezde oddajajo.

Zvezdno svetlobo lahko razčlenimo s prizmo ali uklonsko mrežico in pri tem dobimo porazdelitev gostote svetlobnega toka j po valovni dolžini λ, ki mu pravimo **zvezdni spekter** (glej poglavje **Svetloba**).

Spektre zvezd sestavlja kontinuum v katerem so prisotne **absorpcijske črte**, redkokdaj tudi **emisijske**.

V prvih letih 20. stoletja so na Harvardskem observatoriju v ZDA pripravili shemo, znotraj katere so klasificirali skoraj 400.000 zvezd (glej npr. [?]). **Harvardska spektralna klasifikacija** temelji na prisotnosti in globini nekaterih spektralnih črt, ki so občutljive na temperaturo zvezd. Zvezde z visokimi temperaturami vsebujejo več črt ioniziranih atomov, hladnejše nevtralnih atomov, zelo hladne pa tudi molekulske absorpcijske črte.

Harvardska klasifikacija deli zvezde na glavne razrede, ki so razvrščeni glede na njihovo površinsko temperaturo: O (20.000 – 35.000 K), B ($\sim$ 15.000 K), A ($\sim$ 9000 K), F ($\sim$ 7000 K), G ($\sim$ 5500 K), K ($\sim$ 4000 K) in M ($\sim$ 3000 K). Obstajajo še drugi razredi, v katere uvrščamo nove, planetarne meglice, Wolf-Rayetove zvezde, rjave pritlikavke ter hladnejše zvezde s kompleksno kemično sestavo. Vsak razred je dodatno razdeljen na deset podrazredov, od 0 do 9.

Vendar dve zvezdi z isto temperaturo imata lahko zelo različen izsev. Nadgradnjo opisane klasifikacije predstavlja **Yerkesova spektralna klasifikacija**, ki upošteva šest izsevnih razredov, razvrščenih po padajočem izsevu (Ia, Ib, II, III, IV, V). Izsevni razred je določen na podlagi spektralnih črt, ki so občutljive na površinsko gravitacijo zvezde.

Sonce spada v razred G2 V.

Hertzprung-Russellov diagram

V začetku dvajsetega stoletja sta Ejnar Hertzprung in Henry Russell neodvisno raziskovala zvezo med absolutno magnitudo zvezd in njihovim spektralnim tipom (oziroma izsevom). Po njiju imenujemo **Hertzsprung-Russellov diagram** ali **HR diagram**, na katerem prikazujemo izsev zvezde (ali absolutno magnitudo) v odvisnosti od njene temperature (ali spektralnega tipa).

Glede na raznolikost zvezdnih radijev, izsevov in temperatur bi pričakovali, da so na takem diagramu zvezde enakomerno porazdeljene. V resnici pa opazimo, da se večina zvezd nahaja na **glavni veji** (med njimi tudi Sonce). Na HR diagramu najdemo tudi **orjakinje** (horizontalna veja, veja rdečih orjakinj ter asimptotska veja), **nadorjakinje** in **bele pritlikavke**.

(DODATI PRIMEREN DIAGRAM! Na diagramu naj bodo tudi oznake za radije)

0.1.2. Osnovne lastnosti zvezd

Z zvezdno spektroskopijo lahko izmerimo nekatere izmed osnovnih lastnosti zvezd.

Maso zvezd lahko direktno izmerimo v primeru dvojnih zvezd (glej poglavje **??**). S takimi opazovanji je bilo možno določiti empirično relacijo med maso in izsevom za zvezde na glavni veji:

$$L \propto M^{\alpha} \ ,$$

kjer se parameter α giblje med vrednostmi $3 - 3,5$. Ker je Sonce zvezda glavne veje lahko zapišemo

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\alpha} \ .$$

Mase zvezd na glavni veji se gibljejo med 0.1 in $10 M_{sun}$, nadorjakinje tudi $150 M_{\odot}$, bele prizlikavke pa $< 1 M_{\odot}$.

Radij zvezd so v preteklosti (za zvezde na majhnih razdaljah) izmerili s pomočjo zvezdne interferometrije (dodati razlago za iterferometer, ce ni ze v Optiki), s katero je bilo možno pridobiti kotni premer zvezde. S poznavanjem razdalje zvezde pa njen radij. V eklipsnih spremenljivkah (glej poglavje **??**) lahko direktno izmerimo radij. V ostalih primerih lahko radij R ocenimo s pomočjo Stefanovega zakona (glej poglavje Svetloba)

$$L = \sigma T^4 4\pi R^2 \ ,$$

kjer poznamo izsev L in efektivno temperaturo T. Vrednosti radijev za različne zvezde razberemo iz HR diagrama: bele pritlikavke imajo radije okrog 0.01 $R_\odot$, največje nadorjakinje pa do $1000 R_\odot$.

Efektivna temperatura zvezde je površinska temperatura zvezde (pri navadnih zvezdah površino enačimo s fotosfero). Definirana je kot temperatura črnega telesa, ki odda isto skupno gostoto svetlobnega toka kot zvezda. Iz enačbe $j = \sigma T^4$ vidimo, da efektivna temperatura ni odvisna od frekvence/valovne dolžine ampak od skupne izsevane moči. Efektivne temperature zvezd se gibljejo med vrednostmi 2000 do 40000 K.

Preostale glavne lastnosti zvezd so povprečna gostota (giblje se med 10^9 kg/m^3 za bele pritlikavke do 10^{-4} kg/m^3 za orjakinje), izsev (med 10^{-4} in $10^6 L_\odot$), hitrost vrtenja zvezd (med $200 - 250$ km/s za spektralne tipe O in B do 20 km/s za spektralne tipe G) ter kemična kompozicija (2% težjih elementov v mladih zvezdah, stare pa imajo manj kot 0.02%).

0.1.3. Osnovni koncepti

gravitational contraction, free fall, hidrostatsko ravnovesje

Razvoj zvezd urejujeta dve sili, gravitacija in sila tlaka.

0.1.4. Sestava zvezd

sevanje črnega telesa, Wienov zakon

0.1.5. Virialni teorem

0.1.6. Nastanek zvezd

0.1.7. Razvoj zvezd

Zvezde pred glavno vejo

Zvezde na glavni veji

Končne faze razvoja zvezd

0.1.8. Spremenljivke in dvojne zvezde

prekrivalna dvojnica, spremenljivke, krivulja sija

0.2. Zvezdni sistemi

0.2.1. Zvezdne kopice

ocena starosti iz kolena HR diagrama

0.2.2. Galaksije

spin-flip tranzicija v atomarnem vodiku, črna luknja, tully-fisher in faber jackson, Hubble?!

0.2.3. Jate galaksij

(lahko se omeni na koncu poglavja o galaksijah)

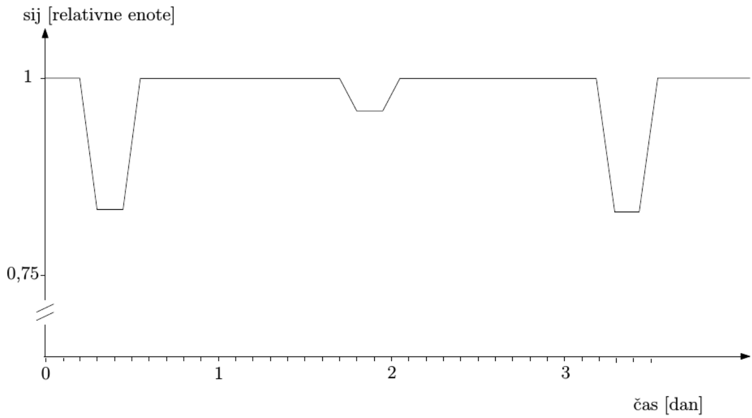
1. Prekrivalna spremenljivka je dvozvezdje, ki je v prostoru poravnano tako, da se za opazovalca na Zemlji zvezdi medsebojno izmenično prekrivata in se zato sij dvozvezdja spreminja po značilni krivulji. Na podlagi krivulje sija (graf spodaj) določi lastnosti dvozvezdja, ki ga sestavljata zvezdi A in B, ki imata enaki masi: $m_A = m_B = m_{Sonca}$. Predpostavi, da je ravnina gibanja zvezd v dvozvezdju natanko poravnana z opazovalcem na Zemlji, da se zvezdi gibljeta po krožnih orbitah s skupnim središčem in nista v stiku. Keplerjev zakon pravi, da je $a^3/t_0^2 = (m_A + m_B)G/4\pi^2$, kjer je a polmer tira zvezd okoli skupnega težišča, t_0 obhodni čas zvezd, gravitacijska konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2. Masa Sonca $m_{Sonca} = 2 \cdot 10^{30}$

kg.

A Na podlagi krivulje sija določi obhodni čas t_0.

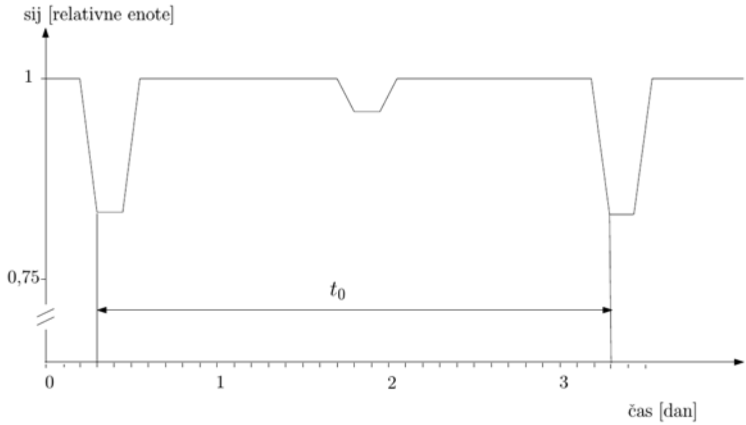
B Izračunaj razdaljo zvezd a od skupnega središča kroženja.

C Na podlagi krivulje sija izračunaj polmera zvezd A in B.



Krivulja sija prikazuje spremembe sija prekrivalnega dvozvezdja. Iz podatkov sklepamo, da se zvezdi gibljeta po eni krožnici.

A Obhodni čas t_0 zvezd okoli skupnega težišča je na krivulji sija čas, v katerem se ponovi enaka situacija - na primer med začetkoma globljih minimumov. Iz krivulje je tako odčitani čas $t_0 = 3$ dni.

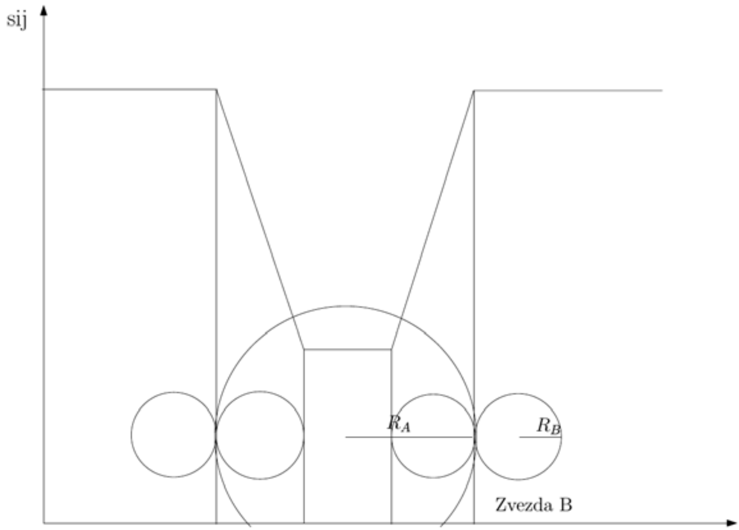


B Ko enkrat poznamo t_0, lahko iz Keplerjevega zakona izračunamo razdaljo a od skupnega težišča. Vemo tudi, da imata zvezdi enako maso $m_A = m_B$.

$$a_3/t_0^2 = (m_A + m_B)G/4\pi^2$$

$$a = \sqrt[3]{2Gm_{\text{Sonca}}t_0^2/4\pi^2} = 7,7 \cdot 10^9\,\text{m}.$$

C Iz krivulje sija sklepamo, da sta polmera zvezd različna. Čas zahajanja oz. ene zvezde je namreč enak intervalu med točkama 1 in 2, medtem ko je trajanje mrka enako intervalu med točkama 2 in 3. Intervala sta namreč različno dolga. Te intervale lahko odčitavamo na večjem ali manjšem minimumu krivulje.



Iz krivulje sija odčitamo čas zahajanja manjše zvezde - čas t_1 med točkama 1 in 2. Ta znaša $0,1$ dneva. Ker poznamo periodo kroženja t_0 in smo izračunali polmer njunih orbit, si lahko pomagamo s sklepnim računom. Razmerje med premerom manjše zvezde $2R_B$ in časom njenega zahajanja t_1 je enako razmerju dolžine orbite in časom t_0:

$$2R_B/t_1 = 2\pi a/t_0$$

Sledi: $R_B = \pi a t_1/t_0 = 8 \cdot 10^8$ m. Premer večje zvezde R_A pa izračunamo iz časovnega intervala t_2 med točko 1 (prvi stik manjše zvezde) in 3 na krivulji sija. Vrednost $t_2 = 0,25$ dneva.

Spet si pomagamo s sklepnim računom kot pri manjši zvezdi:

$$2R_A/t_2 = 2\pi a/t_0 \text{ in}$$

$$R_A = \pi a t_2/t_0 = 2,0 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

2. Iz radijskih opazovanj oblaka plina, ki kroži in pada v črno luknjo v središču naše Galaksije, opazimo, da je sevanje zaradi spin-flip tranzicije v vodiku (mirovna frekvenca 1420.41 MHz) pomaknjeno proti frekvencam 1421.23 MHz. ÄŠe je oblak plina od črne luknje oddaljen 0.2 pc in je njegova orbita krožna ugotovi hitrost gibanja

oblaka in zapiši, če se giblje proti nam ali proč od nas ter izračunaj maso črne luknje.

Podatki:
$\nu_0 = 1420.41$ MHz
$\nu = 1421.23$ MHz
$d = 0.2$ pc

Frekvenca ν je viĹˇja od mirovne, torej se oblak pomika proti nam.

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &= \frac{\Delta\nu}{\nu_0} && (55)\\
&= \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} && (56)\\
v &= \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \cdot c && (57)\\
&= \frac{1421.23 - 1420.41}{1420.41} \cdot 2.9979 \times 10^8 \mathrm{m/s} && (58)\\
&= 173000\,\mathrm{m/s} && (59)
\end{aligned}$$

ÄŚe je m masa oblaka plina in M Masa ÄŤrne luknje bo veljalo

$$\begin{aligned}
m \cdot \frac{v^2}{d} &= G\frac{M \cdot m}{d^2} && (60)\\
v^2 &= G\frac{M}{d} && (61)\\
M &= \frac{d \cdot v^2}{G} && (62)\\
&= \frac{0.2\,\mathrm{pc} \cdot (173000\mathrm{m/s})^2}{6.6726 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}} && (63)\\
&= \frac{0.2 \cdot 3.0860 \times 10^{16} m \cdot (173000\mathrm{m/s})^2}{6.6726 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}} && (64)\\
&= 2.768 \cdot 10^{36} kg && (65)\\
&= 1.4 \cdot 10^6\, M_\odot && (66)
\end{aligned}$$

3. Zvezda glavne veje na razdalji 20 pc je komajda vidna v vesoljskem teleskopu, ki lahko zaznava širok spekter valovnih dolžin. Zvezda se bo pomaknila po veji rdečih orjakinj, njena temperatura bo padla za faktor 3, njen radij pa bo postal 100-krat večji. Katera je nova maksimalna razdalja na kateri bo lahko zvezda (komajda) vidna z uporabo istega teleskopa?

Podatki:
$d_0 = 20$ pc
$T_1 = 1/3T_0$
$R_1 = 100R_0$
$d_1 =?$

Gostota svetlobnega toka zvezde, ko je na glavni veji, mora ostati enaka svetlobnemu toku zvezde, ko bo postala rdeÄŤa orjakinja. Iz te enakosti lahko pridobimo razdaljo d_1.

$$\begin{aligned}
j_0 &= j_1 && (67)\\
\frac{\sigma T_0^4 \cdot 4\pi R_0^2}{4\pi d_0^2} &= \frac{\sigma T_1^4 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi d_1^2} && (68)\\
\frac{\sigma T_0^4 \cdot 4\pi R_0^2}{4\pi d_0^2} &= \frac{\sigma T_0^4 (1/3)^4 \cdot 4\pi 10^4 \cdot R_0^2}{4\pi d_1^2} && (69)\\
\frac{d_1^2}{d_0^2} &= (1/3)^4 \cdot 10^4 && (70)\\
d_1^2 &= (1/3)^4 \cdot 10^4 \cdot d_0^2 && (71)\\
d_1 &= 100/9 \cdot d_0 && (72)\\
d_1 &= 222 \text{ pc} && (73)
\end{aligned}$$

4. Določi maso kroglaste kopice z radijem $r = 20$ pc in korenom povprečja kvadrata hitrosti zvezd $v = 3$ km/s.

Podatki:
$r = 20 \text{ pc} = 20 \cdot 3.0860 \times 10^{16}$ m
$v = 3 \text{ km/s} = 3000$ m/s
6.6726×10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Uporabimo Virialni teorem (podobno kot na Bledu), in predpostavimo, da je v kopici n pribliĹľno enakih zvezd.

$$\begin{aligned}
W_{kin} &= -\frac{1}{2} W_{pot} && (74)\\
\frac{1}{2} M \cdot n \cdot v^2 &= \frac{1}{2} G \frac{M^2\, n^2}{2 \cdot r} && (75)\\
M_{tot} &= \frac{2\, v^2\, r}{G} && (76)\\
&= 1.66 \cdot 10^{35} && (77)\\
&= 83704\ M_\odot && (78)
\end{aligned}$$

5. Prekrivalno dvozvezdje sestavljata manjša zvezda z efektivno temperaturo $T_1 = 4000$ K in večja zvezda s temperaturo $T_2 = 6000$ K. Za opazovalca na Zemlji gresta zvezdi periodično ena pred drugo in se zakrivata. Zakritje zvezd je centralno: ravnina gibanja zvezd okoli skupnega težišča leži natanko v smeri proti Zemlji. Ko gre hladnejša zvezda pred zvezdo z višjo temperaturo, je gostota svetlobnega toka dvozvezdja na Zemlji 10 % manjša kot takrat, ko gre zvezda z višjo temperaturo pred hladnejšo zvezdo. Izračunaj razmerje polmerov zvezd. Predpostavi, da zvezde sevajo kot črna telesa po Stefanovem zakonu ($j = \sigma T^4$; j je gostota svetlobnega toka na površju, T je temperatura zvezde, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4). Zvezdi obravnavaj kot enakomerno svetli okrogli ploskvici na nebu. Razdalja med zvezdama v dvozvezdju je zelo majhna v primerjavi z oddaljenostjo od Zemlje.

Če zvezdo obravnavamo kot enakomerno svetlo ploskvico, ki seva kot črno telo po Stefanovem zakonu, potem je svetlobni tok J, ki prihaja do nas, sorazmeren s površino ploskivice in četrto potenco temperature:

$$J \propto R^2 T^4 \ . \tag{1}$$

Manjša zvezda ima efektivno temperaturo $T_1 = 4000$ K in polmer R_1, večja zvezda pa temperaturo $T_2 = 6000$ K in polmer R_2.

Po enačbi 1 zanju velja:

$$J_1 \propto R_1^2 T_1^4 \ , \tag{2a}$$
$$J_2 \propto R_2^2 T_2^4 \ . \tag{2b}$$

Ko je manjša in hladnejša zvezda pred svetlejšo in večjo zvezdo, prejemamo ves svetlobni tok z manjše zvezde, z večje pa le iz nezakritega dela (prvi člen v spodnji enačbi):

$$J_{min} \propto (R_2^2 - R_1^2) T_2^4 + R_1^2 T_1^4 \ , \tag{3a}$$
$$J_{max} \propto R_2^2 T_2^4 \ . \tag{3b}$$

Iz podatkov razberemo, da je J_{min} 10 % manjši kot J_{max}. Njuno razmerje je torej:

$$J_{min}/J_{max} = 0,9 \ . \tag{4}$$

Enačbo 3a delimo z enačbo 3b, da dobimo to razmerje:

$$\frac{J_{min}}{J_{max}} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} + \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4} .(5) \tag{5}$$

Enačbo preuredimo, da izpostavimo kvadrat razmerja polmerov zvezd:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_1^4}{T_2^4} - 1\right) = \frac{J_1}{J_2} - 1 . \tag{6}$$

Iz enačbe 6 izrazimo iskano razmerje polmerov zvezd:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\frac{J_1}{J_2} - 1}{\frac{T_1^4}{T_2^4} - 1}} . \tag{7}$$

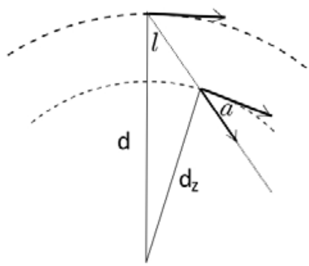
V končno enačbo 7 vstavimo podatke in za razmerje polmerov zvezd dobimo:

$$\frac{R_1}{R_2} = 0,35 . \tag{8}$$

Razmerje polmerov zvezd je 0,35 oz. polmer večje zvezde je približno 3-krat večji od polmera manjše zvezde.

Zvezda Galaktičnega diska se nahaja na galaktični dolžini $l = 15°$. 2013
Njena radialna hitrost glede na Sonce je $v_r = 100$ km/s. Privzemi, IT
da se zvezde v disku Galaksije gibljejo okrog središča po krožnih orbitah s konstantno hitrostjo $v_0 = 250$ km/s ter da je za vse zvezde v galaktični ravnini smer vrtenja ista. Izračunaj razdaljo te zvezde od središča Galaksije, če veš da je Sonce na razdalji 8.5 kpc.

Podatki:
$l = 15°$
$v_r = 100$ km/s
$v_0 = 250$ km/s
$d_\odot = 8.5$ kpc



Izračunamo lahko kot α in sicer

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= v_r/v_0 &(9)\\
\alpha &= \arccos(v_r/v_0) &(10)\\
&= \arccos(100/250) &(11)\\
&= 66.4^\circ &(12)
\end{aligned}$$

S pomočjo sinusnega izreka izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{\sin l} &= \frac{d_\odot}{\sin(90^\circ+\alpha)} &(13)\\
d &= d_\odot \cdot \frac{\sin l}{\sin(90^\circ+\alpha)} &(14)\\
&= 8500\,\mathrm{pc}\ \frac{\sin 15^\circ}{\sin(90^\circ+66.4^\circ)} &(15)\\
&= 5.5\,\mathrm{kpc} &(16)
\end{aligned}$$

2013 IT Oceni število zvezd v kroglasti kopici premera 40 pc, če je ubežna hitrost na robu kopice 6 km/s in je večina zvezd podobnih Soncu.

Podatki:
$d = 2 \cdot r = 40$ pc
$r = 20$ pc $= 20 \cdot 3.0860 \times 10^{16}$ m
$v_{ubezna} = 6$ km/s $= 6000$ m/s
$\bar{M} = M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg

Iz ubežne hitrosti

$$v_{ubezna} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{17}$$

lahko ocenimo maso kroglaste kopice:

$$\begin{aligned} M_{kopica} &= \frac{v_{ubezna}^2\, r}{2\,G} && (18)\\ &= \frac{(6\mathrm{km/s})^2\ 20\ \mathrm{pc}}{2\cdot 6.6726\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}} && (19)\\ &= \frac{(6000\mathrm{m/s})^2\ 20\cdot 3.0860\times 10^{16}\mathrm{m}}{2\cdot 6.6726\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}} && (20)\\ &= 1.6650\cdot 10^{35}\ \mathrm{kg} && (21)\end{aligned}$$

Ĺ tevilo zvezd je

$$\begin{aligned} N &= \frac{M_{kopica}}{\bar{M}} && (22)\\ &= \frac{1.6650\cdot 10^{35}\ \mathrm{kg}}{1.9891\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} && (23)\\ &= 83704 && (24)\end{aligned}$$

Starost zvezdnih kopic določamo po lastnostih zvezd v kolenu HR diagrama. Lahko se zgodi, da za dve zvezdi (na kolenu HR diagrama), ki sta na nebu tesno skupaj, mislimo, da je to ena sama. Zato napačno domnevamo, da imajo zvezde na kolenu HR diagrama dvakrat večji izsev od dejanskega. 2014 IT

(a) Za koliko odstotkov smo se zmotili v oceni starosti opazovane kopice?

(b) Se nam zdi, da je kopica mlajša ali starejša, kot je v resnici?

(a) Starost kopice ocenimo po času, ki ga preživijo zvezde v kolenu HR diagrama. V splošnem bo za zvezdo na glavni veji veljalo:

$$t = \frac{\eta\ 0.1\cdot M\cdot c^2}{L}$$

kjer je η izkoristek pretvorbe H v He, za jedrske reakcije pa je odgovornih le 0.1 celotne mase. Ker vemo, da za zvezde na glavni veji velja $L \propto M^{3.5}$, torej $M \propto L^{1/3.5}$. Čas na glavni veji bo:

$$t \propto \frac{L^{1/3.5}}{L} = L^{-2.5/3.5}$$

V oceni starosti smo se zmotili za

$$\frac{t - t_{prava}}{t_{prava}} = \frac{2^{-2.5/3.5} - 1}{1} = -0.39$$

Pri starosti t bomo upoštevali, da je opazovani izsev 2-krat pravi. Zmotili smo se za ~ 40 %.

(b) Kopica se nam bo zdela mlajša, kot je v resnici, saj lahko zgoraj napisano enačbo preuredimo v

$$t = (1 - 0.39)\ \cdot\ t_{prava} = 0.61\, t_{prava}$$

Zvezde v kolenu se nam bodo zdele bolj masivne, ker le-te preživijo na glavni veji manj časa, se nam bo res zdelo, da je kopica mlajša kot v resnici.

2014 IT Zvezda Severnica je kefeidna spremenljivka. Te zvezde so uporabne za določanje razdalj v vesolju, ker obstaja preprosta zveza med njihovo absolutno magnitudo M in periodo P spreminjanja izseva

$$M = -2.81\ \cdot\ \log\frac{P}{1\ \mathrm{dan}} - 1.43\,.$$

Za Severnico je izmerjena perioda spreminjanja izseva $P = 3.97$ dni. Okoli Severnice kroži šibkejša zvezda, ki ima temperaturo $T_B = 6900$ K in navidezno magnitudo $m_B = 8.39$. Kolikšen je radij šibkejše zvezde (R_B)? Kolikšna je razdalja do zvezd? Navidezna magnituda severnice je $m_\mathrm{A} = 1.97$.

Podatki:

$m_A = 1.97$
$m_B = 8.39$
$T_B = 6900$ K
$M_A = -3.112$ (iz formule za kefeide)

Najprej izračunamo razdaljo do zvezd:

$$\begin{aligned} m_A - M_A &= -2.5\log\left(\frac{10\mathrm{pc}}{d}\right)^2 && (25)\\ d &= 10\,\mathrm{pc}\,10^{(m_A - M_A)/5} && (26)\\ d &= 10\,\mathrm{pc}\,10^{(1.97-(-3.112))/5} && (27)\\ &= 103.8\ \mathrm{pc} && (28) \end{aligned}$$

Za izračun radija druge zvezde moramo izračunati izseva Severnice in druge zvezde.

$$\begin{aligned} M_A - M_\odot &= -2.5 \log\left(\frac{L_A}{L_\odot}\right) && (29)\\ L_A &= 10^{(M_A - M_\odot)/-2.5} \cdot L_\odot && (30)\\ &= 10^{(-3.11-4.82)/-2.5} \cdot L_\odot && (31)\\ &= 1486 \cdot L_\odot && (32)\\ &\simeq 1500 \cdot L_\odot && (33) \end{aligned}$$

Izsev druge zvezde je

$$\begin{aligned} m_B - m_A &= -2.5 \log\left(\frac{L_B}{L_A}\right) && (34)\\ L_B &= 10^{(m_B - m_A)/-2.5} \cdot L_A && (35)\\ &= 10^{(8.39-1.97)/-2.5} \cdot L_A && (36)\\ &\simeq 4 \cdot L_\odot && (37) \end{aligned}$$

Radij druge zvezde je

$$\begin{aligned} R_B^2 &= \frac{L_B}{\sigma T_B^4 4\pi} && (38)\\ &= \frac{4L_\odot}{\sigma T_B^4 4\pi} && (39)\\ &= \frac{L_\odot}{\sigma T_B^4 \pi} && (40)\\ &= \frac{3.96 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}}{5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W}m^{-2}K^{-4}\ 6900^4\ K^4\ \pi} && (41)\\ &= 9.8 \cdot 10^{17} \mathrm{m}^2 && (42)\\ R_B &= 9.9 \cdot 10^8\ \mathrm{m} && (43) \end{aligned}$$

Opazujemo spektroskopsko dvojno zvezdo s periodo $P = 8.6$ let. 2015
Odmik spektralne črte Hα (656.3 nm) je $\Delta\lambda_1 = 0.072$ nm za manjšo IT
zvezdo, $\Delta\lambda_2 = 0.0068$ nm za večjo zvezdo. Zvezdi se gibljeta okoli skupnega težišča po krožnih tirih.

(a) Uporabi zgornje podatke in izračunaj za obe zvezdi hitrost (v km/s) in maso (v $M_\odot$) v primeru, da je inklinacija orbite sistema $i = 60°$ (t.j. kot med normalo na ravnino kroženja in smerjo pogleda).

(b) V primeru prekrivalne spektroskopske dvojne zvezde ($i = 90°$) izračunaj obe hitrosti. Izračunaj tudi radij obeh zvezd (v $R_\odot$) za ta primer če veš, da so časovni razmiki $t_b - t_a = 11.7$ ur, $t_c - t_b$ pa 164 dni. t_a, t_b in t_c so navedeni na svetlobni krivulji spodaj. (Namig: upoštevaj *relativno* hitrost obeh zvezd.)

Slika 3: Svetlobna krivulja prekrivalne spektroskopske dvojne zvezde.

Opazovani hitrosti za manjšo (1) in večjo (2) zvezdo sta (v prvem primeru, $i = 60°$) sta

$$v_{o,1} = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_{H\alpha}} \cdot c \tag{44}$$

$$v_{o,1} = v_1 \cdot \sin i \tag{45}$$

$$v_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_{H\alpha}} \frac{c}{\sin i} \tag{46}$$

$$= \frac{0.072}{656.3} \frac{300000 \text{ km/s}}{\sqrt(3)/2} \tag{47}$$

$$= 38 \text{ km/s} \tag{48}$$

in

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_{H\alpha}} \frac{c}{\sin i} && (49) \\ &= \frac{0.0068}{656.3} \frac{300000 \text{ km/s}}{\sqrt(3)/2} && (50) \\ &= 3.58 \text{ km/s}\,. && (51) \end{aligned}$$

Za izračun mase uporabimo

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_{o,1}}{v_{o,2}} = \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}$$

in

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{o,1}+v_{o,2})^3}{\sin^3 i} && (52) \\ M_1\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right) &= \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_1+v_2)^3 \ \sin^3 i}{\sin^3 i} && (53) \\ M_1\left(1+\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}\right) &= \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_1+v_2)^3 \ \sin^3 i}{\sin^3 i} && (54) \\ M_1 &= \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_1+v_2)^3}{1+\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}} && (55) \\ &= 4,01 \cdot 10^{30} \text{ kg} && (56) \\ &= 2\, M_\odot && (57) \end{aligned}$$

Masa večje zvezde pa je $M_2 = \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} \cdot M_1 = 21,25\, M_\odot$.
V primeru $i = 90^\circ$ sta hitrosti $v_1 = 32.9$ km/s, $v_2 = 3.1$ km/s. Radij manjše zvezde je

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{v_1+v_2}{2} \cdot (t_b - t_a) && (58) \\ &= \frac{36 \text{ km/s}}{2} \cdot (11.7 \cdot 3600\,\text{s}) && (59) \\ &= 7.58 \cdot 10^5 \,\text{km} && (60) \\ &= 1.08\ R_\odot && (61) \end{aligned}$$

Radij večje zvezde je

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \frac{v_1+v_2}{2} \cdot (t_c - t_b) && (62) \\ &= 7.58 \cdot 10^5 \text{ km} + \frac{36 \text{ km/s}}{2} \cdot (164 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}) && (63) \\ &= 2.558 \cdot 10^8 \,\text{km} && (64) \\ &= 365.4\ R_\odot && (65) \end{aligned}$$

2015 IT Na spodnji sliki je HR diagram kroglaste kopice M5.

(a) S pomočjo priloženega diagrama izračunaj oddaljenost kopice (izrazi jo v astronomskih enotah). Upoštevaj, da ima Sonce indeks $(B-V)_\odot = 0.65$, navidezno magnitudo v V filtru $m_{V,\odot} = -26.74$.

(b) Oceni starost kopice.

(c) Oceni maso kopice. Predpostavi, da je povprečna hitrost zvezd 2km/s ter da meri radij kopice 80 svetlobnih let.

Slika 4: Hertzprung-Russellov diagram kroglaste kopice M5 (navidezna magnituda v V filtru v odvisnosti od B-V indeksa). Vir: SEDS, AAO

(a) Za Sončni barvni indeks $(B-V)_\odot = 0.65$ je navidezna magnituda m_V v kopici ~ 20. Razdalja do kopice je torej

$$m_{V,\odot} - m_V = -2.5 \log \frac{d^2}{d_\odot^2} \tag{66}$$

$$= -5 \log \frac{d}{d_\odot} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_\odot} &= 10^{\frac{m_{V,\odot}-m_V}{-5}} & (68)\\
&= 10^{\frac{-26.74-20}{-5}} & (69)\\
&= 10^{9.348} & (70)\\
d &= 2.23 \cdot 10^9\, d_\odot & (71)
\end{aligned}$$

(b) Starost kopice ocenimo iz kolena glavne veje. Iz HR diagrama ugotovimo maso zvezd v kolenu glavne veje: ocenimo, da gre za zvezde s srednjo magnitudo $m_{kol} = 18$. Primerjamo z magnitudo Sonca na glavni veji (na razdalji kopice), torej $m_\odot = 20$. (Upoštevamo, da so to V magnitude.)

Uporabimo povezavo med izsevom in maso za zvezde na glavni veji:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5} \qquad (72)$$

in zapišemo Pogsonov zakon

$$\begin{aligned}
m_{kol} - m_\odot &= -2.5 \log \frac{L}{L_\odot} & (73)\\
\frac{L_{kol}}{L_\odot} &= 10^{\frac{m_{kol}-m_\odot}{-2.5}} & (74)\\
\left(\frac{M_{kol}}{M_\odot}\right)^{3.5} &= 10^{\frac{m_{kol}-m_\odot}{-2.5}} & (75)\\
\left(\frac{M_{kol}}{M_\odot}\right) &= 10^{\frac{m_{kol}-m_\odot}{-8.75}} & (76)
\end{aligned}$$

Izračunamo $M_{kol} = 1.69\, M_\odot$.

Predpostavimo, da je tekmovalcem znano, da se na glavni veji le desetina mase zvezde spremeni v helij ($\epsilon = 0.10$) in da je pri tem izkoristek 7 promilov ($\eta = 0.007$).

$$\begin{aligned}
\frac{\eta\epsilon M c^2}{t} &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\alpha} \cdot L_\odot && (77)\\
t &= \frac{\eta\epsilon M c^2}{M^\alpha} \cdot \frac{M_\odot^\alpha}{L_\odot} && (78)\\
&= \eta\epsilon M^{(1-\alpha)} c^2 \cdot \frac{M_\odot^\alpha}{L_\odot} && (79)\\
&= \eta\epsilon \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{(1-\alpha)} c^2 \cdot \frac{M_\odot}{L_\odot} && (80)\\
&= 0.007 \cdot 0.1 \cdot 1.69^{(1-3.5)} (3 \cdot 10^8)^2 \frac{2 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 10^{26}} && (81)\\
&= 0.848 \cdot 10^{17} s = 2.7 \cdot 10^9 \text{ let } (\alpha = 3.5) && (82)\\
& && (83)
\end{aligned}$$

(c) Maso kopice ocenimo s pomočjo virialnega teorema. $R = 80\text{ly} = 7.57 \cdot 10^{17}$ m.

$$\begin{aligned}
M_{kopice} &= \frac{2Rv^2}{G} && (84)\\
&= \frac{2 \cdot 7.57 \cdot 10^{17}\text{m}(2000\text{m/s})^2}{G} && (85)\\
&= 9.076 \cdot 10^{34}\text{kg} = 4.5 \cdot 10^4 M_\odot && (86)
\end{aligned}$$

2016 IT Neka spiralna galaksija ima profil sevanja 21 cm črte nevtralnega atomarnega vodika kot na spodnji sliki 5. Inklinacija diska te galaksije je ocenjena na 45°. Opazovana navidezna magnituda v K filtru $m_K = 15.0$, polmer velike polosi pa je $5'$.

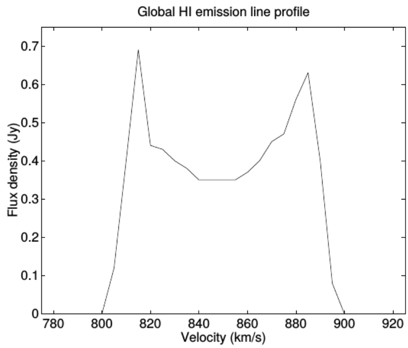
(a) Oceni oddaljenost galaksije z uporabo Tully-Fisherjeve relacije, kjer je V_{max} maksimalna hitrost:

$$\frac{L_K}{3 \cdot 10^{10}\, L_{K,\odot}} \simeq \left(\frac{V_{max}}{200\text{km/s}}\right)^{3.8} .$$

Pri tem uporabi spodnji graf.

(b) Kolikšna je razdalja, ki jo dobiš s pomočjo Hubblovega zakona?

(c) Oceni maso galaksije (uporabi razdaljo iz točke (b)).



Slika 5: Profil sevanja atomarnega vodika pri valovni dolžini 21 cm za spiralno galaksijo. Na abscisni osi je podana izmerjena hitrost v km/s, na ordinatni osi pa svetlobni tok v Jansky-jih.

Podatki:
$i = 45°$
$m_K = 15.0$
$r = 5'$

S slike ocenimo razmik med obema vrhovoma sevanja črte pri 21 cm na $W = 75$ km/s, med 815 in 890 km/s. Ostale ocene se lahko gibljejo v območju $60 - 80$ km/s, nikakor pa ne 100 km/s (upoštevajo se vrhovi, ne pa skrajne vrednosti hitrosti).

Ocenimo maksimalno hitrost V_{max} kot

$$2\,V_{max}\ \sin i = W \tag{87}$$

$$V_{max} = \frac{W}{2\sin i} \tag{88}$$

$$= \frac{75\mathrm{km/s}}{\sqrt{2}} \tag{89}$$

$$= 53\mathrm{km/s} \tag{90}$$

Vrednosti za V_{max} se gibljejo med 42 in 57 km/s.

Za oceno oddaljenosti je potrebna uporaba absolutne magnitude Sonca v K filtru, ki je podana med konstantami.

Uporabimo Pogsonov zakon in Tully-Fisherjevo enačbo:

$$
\begin{aligned}
m_K - M_{K,\odot} &= -2.5\log\frac{L_K/d^2}{L_{K,\odot}/(10\mathrm{pc})^2} && (91)\\
&= -2.5\log\left(3\cdot 10^{10}\left(\frac{V_{max}}{200\mathrm{km/s}}\right)^{3.8}\frac{10\mathrm{pc})^2}{d^2}\right) && (92)\\
10^{-0.4(m_K - M_{K,\odot})} &= 3\cdot 10^{10}\left(\frac{V_{max}}{200\mathrm{km/s}}\right)^{3.8}\frac{10\mathrm{pc})^2}{d^2} && (93)\\
d^2 &= 10^{0.4(m_K - M_{K,\odot})}\,3\cdot 10^{10}\left(\frac{V_{max}}{200\mathrm{km/s}}\right)^{3.8}\frac{10\mathrm{pc})^2}{d^2} && (94)\\
d &= 1.423\cdot\left(\frac{V_{max}}{200\mathrm{km/s}}\right)^{3.8} && (95)\\
&= 30\ \mathrm{Mpc} && (96)
\end{aligned}
$$

Možne rešitve se gibljejo med 19 Mpc in 35 Mpc.

Pravo razdaljo izmerimo s pomočjo Hubblove konstante in središčne hitrosti, ki jo lahko ocenimo iz grafa na 850 km/s. Možne ocene se gibljejo med 840 in 860 km/s.

Uporabimo Hubblov zakon, kjer je $d = v/H_0 = 12$ Mpc.

Za oceno mase najprej izračunamo radij galaksije, pri tem pa uporabimo razdaljo iz Hubblovega zakona.

$$R = 5'\cdot d = 1.4544\cdot 10^{-3}\cdot d = 17453\mathrm{pc}$$

Maso ocenimo z uporabo klasične formule

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{RV_{max}^2}{G} && (97)\\
&= 1.132\cdot 10^{10} M_\odot && (98)
\end{aligned}
$$

Kozmologija

Kozmologija je veja astronomije, ki se ukvarja z nastankom, razvojem in zgradbo vesolja kot celote.

Kozmološke teorije so osnovane na **kozmološkem principu**, ki pravi da je v povprečju na dovolj velikih skalah (območjih) vesolje homogeno in izotropno. Posledica tega načela je, da v vesolju ni privilegiranega položaja in torej veljajo isti zakoni povsod v vesolju.

0.3. Opazovalna kozmologija

Opazovalna kozmologija se ukvarja z meritvami astrofizikalnih lastnosti teles na različnih rdečih premikih in ugotavlja splošne lastnosti vesolja (npr. hitrost širjenja vesolja s pomočjo meritev izseva supernov tipa Ia, prasevanje itd.).[**?**]

0.3.1. Rdeči premik

Premik spektralnih črt v **spektrih** proti večjim ali manjšim valovnim dolžinam glede na črte, ki bi jih opazovali v laboratoriju, označujemo kot **rdeči** ali **modri premik**.

Relativno razliko valovnih dolžin spektralnih črt definiramo kot **rdeči premik** z:

$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{op}} - \lambda_{\mathrm{lab}}}{\lambda_{\mathrm{lab}}} \ , \tag{99}$$

kjer je λ_{op} valovna dolžina spektralne črte v opazovanem spektru, λ_{lab} pa valovna dolžina, ki bi jo opazovali v laboratoriju.

Večina oddaljenih galaksij v svojem spektru kaže premik proti višjim valovnim dolžinam.

0.3.2. Hubblov zakon

V dvajsetih letih prejšnjega stoletja so astronomi pričeli sistematično meriti spektre galaksij (takrat imenovanih meglic). Za večino izmed njih je ameriški astronom Melvin Slipher izmeril, da se oddaljujejo. Leta 1925 je drug ameriški astronom Edward Hubble z opazovanjem kefeid* določil oddaljenost meglice M31 (Andromedine galaksije) in dokazal, da gre za galaksijo (in ne objekt v naši Galaksiji).

Hubble je v naslednjih letih odkril, da so Slipherjevi resultati o oddaljevanju galaksij povezani z njihovimi oddaljenostmi z linearnim zakonom, ki ga danes poznamo kot Hubblov zakon.

Po Hubblovem zakonu je hitrost oddaljevanja galaksij v premo sorazmerna njihovi oddaljenosti d:

$$v = zc = H_0 d \tag{100}$$

kjer je z rdeči premik galaksije, c svetlobna hitrost, $H_0 = H(t_0)$ pa Hubblova konstanta danes, ko ima vesolje starost t_0. Tako zapisani zakon velja za rdeči premik $z \leq 0,2$ in ne velja lokalno, za bližnje galaksije (primer je galaksija Andromeda, ki se nam približuje). Za višje rdeče premike Hubblov zakon ni več linearen in je odvisen od ostalih **osnovnih parametrov** (več v [**?**]).

Današnja vrednost Hubblove konstante se giblje med 67 in 73 km/s/Mpc. Hubblovo konstanto lahko opišemo tudi z **adimenzijskim Hubblovim parametrom** h, kjer je $H_0 = h \times 100$ km s^{-1} Mpc^{-1}, h pa ima vrednosti $0,67 - 0,73$.

Opazovalec, ki se nahaja v katerikoli drugi galaksiji, ravno tako opazi oddaljevanje galaksij po Hubblovem zakonu (glej kozmološki princip). Galaksije se torej oddaljujejo druga od druge kot posledica širjenja vesolja. Ker velja Hubblov zakon povsod v vesolju to pomeni, da ne obstaja preferenčna središčna točka širjenja. V primeru, da se je širjenje nadaljevalo dovolj časa je moral obstajati trenutek, ko so bile galaksije tesno skupaj. Vesolje ima zato končno starost. V primeru konstantne hitrosti širjenja ocenimo današnjo starost vesolja (**Hubblov čas**) na

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \simeq 14\text{Gyr} .$$

0.3.3. Pospešeno širjenje vesolja

Konec 90-ih let je znanstvenim skupinam uspelo izmeriti razdalje oddaljenih galaksij (nad $z > 0.2$) v katerih je prišlo do eksplozij supernov tipa Ia

*Glej poglavje ...

(glej XXX). S pomočjo teh standardnih svetilnikov so znanstveniki odkrili odstopanje od linearnega Hubblovega zakona (formula!). Dve raziskovalni skupini, katerih vodje so leta 2011 prejeli Nobelovo nagrado za fiziko, sta potrdili, da se vesolje pospešeno širi. Za pospešeno širjenje vesolja naj bi bila odgovorna uniformno porazdeljena **temna energija** ali **kozmološka konstanta**, ki jo bomo uvedli v naslednjem poglavju.

0.4. Osnovni parametri

Razdaljo $l(t)$ med dvema točkama v vesolju ob času t opisujemo z enačbo

$$l(t) \quad = \quad a(t)r \; , \tag{101}$$

kjer je r sogibajoča koordinata (neodvisna od časa), $a(t)$ pa skalirni faktor (ponekod imenovan funkcija širjenja), ki se s časom spreminja in je brez enote. Po definiciji je skalirni faktor danes (čas t_0) enak $a(t_0) = 1$, ob začetku vesolja pa $a = 0$.

Rdeči premik oddaljenih galaksij je poglavitno posledica širjenja vesolja (in ne Dopplerjevega premika zaradi lastnega gibanja samih galaksij). Zato ta rdeči premik imenujemo **kozmološki rdeči premik** z in izrazimo skalirni faktor kot

$$a \propto (1+z)^{-1}$$

oziroma z v odvisnosti od skalirnega faktorja kot

$$z = \frac{a(t_{\mathrm{op}})}{a(t_{\mathrm{lab}})} - 1 \; ,$$

kjer je t_{op} čas ob katerem opazujemo in t_{lab} čas ob katerem je bila oddana svetloba.

Hubblov parameter v splošnem (izpeljava?) $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Parameter pojemka q(t).

0.5. Modeli vesolja

Kozmološki modeli so matematični modeli, s katerimi opisujemo in raziskujemo vesolje. V teh modelih nastopajo parametri, ki so razloženi v tem podpoglavju. Danes uveljavljeni modeli temeljijo na splošni teoriji relativnosti *.

*Kratka razlaga splošne teorije relativnosti.

Modeli vesolja morajo ustrezati kozmološkemu principu in si za njegov opis predstavljamo, da je vesolje enakomerno zapolnjeno s plinom ali tekočino (v tej predstavi so posamične galaksije neke vrste 'atomi' znotraj te kozmične tekočine). V taki poenostavljeni predstavi vesolja je dovolj, da model vesolja opiše lastnosti tega plina (gostoto $\rho(t)$ in tlak $p(t)$) v vsakem trenutku t. Dodatna poenostavitev zadeva snov v vesolju, katere tlak lahko zanemarimo (zato jo kozmologi večkrat imenujejo 'prah', torej hladno snov nerelativističnih hitrosti). V naslednjih podpoglavjih bo poleg navadne snovi nastopila tudi radiacija, ki ravno tako igra pomembno vlogo v modelih.

Z uporabo splošne teorije relativnosti in primernim geometrijskim opisom (metrika) v splošnem sestavljajo relativistične kozmološke modele (Friedman-Robertson-Walkerjevi modeli, po imenih treh znanstvenikov). Z izbiro parametra ukrivljenosti k, gostote snovi ρ ter kozmološke konstante lahko določimo razvoj vesolja in izmed družine modelov izberemo enega. Pri tem uporabimo **Friedmannove enačbe**, katerih rešitve nam opišejo skalirni faktor $a(t)$ in njegovo spreminjanje v času.

0.5.1. Newtonska izpeljava Friedmannovih enačb

Friedmannove enačbe lahko v prvem približku prikažemo s preprostimi argumenti Newtonske fizike. Upoštevajmo območje z radijem R, skupno maso M in konstantno gostoto ρ. Galaksija z maso m se nahaja na robu tako definiranega območja, na razdalji R od središča, kjer najdemo opazovalca.

Iz ohranitve energije velja

$$\frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R} = E \ , \tag{102}$$

kjer je skupna energija E konstantna. Uporabimo zapis $M = 4/3\pi R^3 \rho$ in enačbo predelamo v

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2E}{mR^2} \ . \tag{103}$$

Zadnja enačba je slična prvi Friedmannovi, kot bomo videli, kjer R ustreza skalirnemu faktorju a, člen na skrajni desni pa parametru, ki določa ukrivljenost vesolja.

0.5.2. Kozmološka konstanta in parameter ukrivljenosti

Leta 1917 je Einstein s svojimi **enačbami polja**, ki predstavljajo osnovo splošne relativnosti, želel opisati geometrijo prostor časa. V tem prvem **relativističnem kozmološkem modelu** je Einstein vpeljal **kozmološko konstanto**, da bi zagotovil v povprečju homogeno vesolje, ki se s časom ne spreminja. (Med drugim je v tem modelu tudi predpostavil, da je kozmična tekočina brez tlaka.) Takemu vesolju pravimo statično vesolje.

Kozmološka konstanta Λ (beremo 'lambda') v enačbah uravnovesi učinek gravitacije. Z njo je povezana prisotnost posebne komponente v vesolju, ki ji pravimo **temna energija**, ki naj bi učinkovala kot neke vrste negativni tlak.

Iz Einsteinovega modela vesolja sledi, da je kozmološka konstanta

$$\Lambda = \frac{4\pi G \rho_\Lambda}{c^2} \,,$$

kjer $\rho_\Lambda c^2$ interpretiramo kot (povprečno) gostoto temne energije (čeprav ni še jasno kateri je izvor temne energije).

Parameter, ki določa ukrivljenost vesolja:

$$k = +1/0/-1 \tag{104}$$

0.5.3. Friedmannove enačbe

Z uporabo splošne teorije relativnosti in geometrijskim opisom vesolja (Friedman-Robertson-Walkerjeva metrika) izpeljemo prvo in drugo Friedmannovo enačbo, ki povezujeta skalirni faktor $a(t)$ z gostoto energije $\rho(t)c^2$, tlakom $p(t)$, ukrivljenostjo vesolja k in kozmološko konstanto Λ:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{105}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \,. \tag{106}$$

V njih nastopa poleg znane gravitacijske konstante G tudi sprememba skalirnega faktorja s časom $\dot{a}$ (ali hitrost širjenja, kjer je $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$) in pospešek skalirnega faktorja (ali $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{a}}{\mathrm{d}t}$).

Ker gre za diferencialni enačbi za tri neznane funkcije je potrebno poleg robnih pogojev izbrati primerno **enačbo stanja**, s katero izrazimo tlak v odvisnosti od gostote, $p(\rho)$. Iz obeh Friedmannovih enačb lahko izpeljemo tretjo enačbo,

$$\dot{\rho}c^2 = -3\frac{\dot{a}}{a}((\rho c^2 + 3p) \ , \tag{107}$$

kjer je ρc^2 gostota energije. V primeru radiacije kot glavne komponente vesolja je $\rho c^2 = \rho_{rad}$.

0.5.4. Pospešeno širjenje vesolja

0.5.5. Kritični model vesolja

Kritični model vesolja je model, v katerem je vesolje ravno ($k = 0$) in brez kozmološke konstante ($\Lambda = 0$). Predstavlja mejni model med zaprtim ($k < 0$) in odprtim ($k > 0$) vesoljem brez kozmološke konstante. Zanj je značilno, da je rešitev analitična in ga uporabljamo kot *referenčni model.*

Iz prve Friedmannove enačbe izrazimo gostoto v obliki

$$\rho_{krit}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G} \ ,$$

kjer kritična gostota $\rho_{krit}(t)$ v vsakem trenutku t določa Hubblov parameter $H(t)$.

Analitična rešitev Friedmannove enačbe za skalirni faktor in za njegov *odvod* v takem modelu vesolja je

$$\begin{aligned} a &\propto t^{2/3} \\ \dot{a} &\propto t^{-1/3} \ . \end{aligned}$$

V kritičnem modelu vesolja se Hubblov parameter torej spreminja kot

$$H(t) = \frac{2}{3t} \ ,$$

iz česar sledi, da je $H(t_0) = \frac{2}{3t_0}$ oziroma, da je starost vesolja odvisna od današnje vrednosti Hubblovega parametra:

$$t_0 = \frac{2}{3H(t_0)} \ .$$

0.6. Parametri gostote

Z uporabo kritične gostote kot reference lahko definiramo parametre gostote, t.j. razmerja gostote kozmične snovi glede na kritično gostoto v istem trenutku.

Gostotni parameter snovi Ω_m je torej

$$\Omega_m(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{krit}(t)} \ ,$$

kjer je po prejšnji definiciji $\rho_{krit}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$. V snov je tu vključena tako navadna snov kot temna snov.

Podobno definiramo tudi **gostotni parameter za kozmološko konstanto** Ω_Λ

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\rho_\Lambda(t)}{\rho_{krit}(t)} \ ,$$

kjer pa je gostota $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$. Za lažje razumevanje (!) si moramo predstavljati, da je $\rho_\Lambda c^2$ gostota energije, ki predstavlja kozmološko konstanto in jo imenujemo **gostota temne energije**, Ω_Λ pa parameter gostote temne energije.

(bolje razloziti kako vpeljemo sem se temno energijo)

Primeri kozmoloskih modelov na enem samem grafu (je smiselno to vnesti sem?!?)

0.7. Sevanje in snov

Poleg prisotnosti snovi v vesolju je pomembno, da upoštevamo tudi prisotnost sevanja. Ker so modeli vesolja s prisotnostjo obeh komponent zapleteni jih tu ne obravnavamo (**dodaj smiseln vir!**). Velja pa omeniti model s samo snovjo in model s samim sevanjem. Zakaj bomo spoznali v nekaj korakih.

V teh dveh modelih se bo gostota snovi spreminjala na različen način. V modelu s samo snovjo iz zakona o ohranitvi mase razberemo, da je

$$\rho(t) = \frac{\rho(t_0)}{a(t)^3} \ , \tag{108}$$

kjer je $\rho(t_0)$ povprečna gostota snovi ob času t_0.

V modelu s samim sevanjem pa moramo upoštevati, da gostota energije sevanja w zaradi širjenja vesolja pojema in da se zaradi Dopplerjevega pojava (**nismo prej rekli, da je to kozmološki rdeči premik?!?**) spreminja valovna dolžina sevanja po enačbi (**dodaj enačbo!**).

Velja torej, da je gostota sevalne energije v razširjajoči se krogli polmera $r(t) = r(t_0)a(t)/a(t_0)$ enaka

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{Nh\nu(t)}{\frac{4}{3}\pi r(t)^3} && (109)\\ &= \frac{Nhc/\lambda(t)}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r(t_0)a(t)}{a(t_0)}\right)^3} && (110)\\ &= \frac{Nhca(t_0)/(a(t)\lambda(t_0))}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a(t)r(t_0)}{a(t_0)}\right)^3} && (111)\\ &= w(t_0)\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4, && (112) \end{aligned}$$

kjer je N število fotonov, $h\nu = hc/\lambda$ njihova energija in $w(t_0)$ gostota sevalne energije ob času t_0.

ce je potrebno popravi definicijo t_0!

0.7.1. Prasevanje

Temperatura sevanja v vesolju je ključni parameter za razumevanje nastanka kemičnih elementov v vesolju. Temperatura določa povprečno kinetično energijo delcev in torej razpoložljivo energijo za nastanek novih delcev. Ko govorimo o ”temperaturi vesolja” se nanašamo na sevanje, ki napolnjuje vesolje. Iz kozmološkega principa sledi, da bi podobno sevanje ozadja* lahko opazovali ob današnjem času kjerkoli v vesolju. Največji doprinos k izvengalaktičnemu sevanju ozadja ima **kozmično mikrovalovno sevanje ozadja** (angl. CMB - Cosmic Microwave background) ali **prasevanje**.

Mikrovalovno sevanje ozadja so odkrili leta 1965 in je predstavljalo mejnik za razvoj moderne kozmologije. Gre za najnatančnejši spekter črnega

*Sevanje ozadja je sevanje, ki prihaja iz neidentificiranih izvorov. V našem primeru sem ne spadata naprimer Sonce ali naša Galaksija. Ko govorimo o ozadju mislimo na izvengalaktično sevanje.

telesa (glej poglavje XXX), ki ga lahko najdemo v naravi (odstopanja so manjša od XXX). Največ izsevane energije današnji spekter prasevanja kaže pri valovni dolžini $\sim$ 1 milimetra, kar ustreza temperaturi $\sim$ 3 K (točneje $2,7$ K). Opazovanja prasevanja nam danes nudijo najbolj natančne informacije o sestavi in razvoju vesolja.

Spekter črnega telesa nastane, ko sta sevanje in snov v ravnovesju (snov izseva in absorbira fotone). Tako ravnovesno stanje je bilo prisotno v zgodnjem vesolju do trenutka **rekombinacije** (približno 380.000 let po velikem poku, $z \sim 1100$), ko se je vesolje dovolj ohladilo in so se fotoni lahko prosto gibali. Širjenje vesolja učinkuje na spekter prasevanja. Po Stefanovem zakonu je gostota svetlobnega toka $j = \sigma T^4$, za sevanje v vse smeri (izotropno) pa je $j = \frac{1}{4}cw$, kjer je w gostota sevalne energije, za katero vemo, da se spreminja kot $w(t) = w(t_0)\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4$. Sledi, da se temperatura vesolja spreminja kot $T(t) = T(t_0)\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)$. Ob rekombinaciji je bila torej temperatura vesolja $\sim$ 1100krat večja kot danes.

0.7.2. Prapok

0.7.3. Zgodnje vesolje in prvinska nukleosinteza

0.7.4. Nastanek struktur v vesolju

0.7.5. Odprti problemi kozmologije

2012 IT V oddaljeni galaksiji zasveti supernova tipa Ia, katere največji izsev doseže vrednost $5.8 \times 10^9 L_\odot$. Supernovo opazuješ s svojim teleskopom in ugotoviš, da je 1.6×10^{-7} svetlejša od Vege, ki ima navidezno magnitudo 0.03. Izračunaj razdaljo do galaksije, ki gostuje supernovo, in njen rdeči premik z upoštevanjem podatkov o supernovi in Hubblove konstante ($h = 0.68$).

Podatki:
$L = 5.8 \times 10^9 L_\odot$
$j = 1.6 \times 10^{-7} \cdot j_v$
$m_v = 0.03$
$m_\odot = -26.8$
$d_\odot = 4.8476 \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned}
m - m_v &= -2.5\,\log\left(\frac{j}{j_v}\right) \\
m &= -2.5\,\log(1.6 \times 10^{-7}) + m_v \\
m &= -2.5\,\log(1.6 \times 10^{-7}) + 0.03 \\
m &= 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m - m_\odot &= -2.5\,\log\left(\frac{L}{4\pi d^2}\frac{4\pi d_\odot^2}{L_\odot}\right) \\
m - m_\odot &= -2.5\,\log\frac{L}{L_\odot} + 5\log\frac{d}{d_\odot} \\
\log\frac{d}{d_\odot} &= \frac{m - m_\odot}{5} + \frac{1}{2}\,\log\frac{L}{L_\odot} \\
\log\frac{d}{d_\odot} &= 8.76 + 4.88 \\
\frac{d}{d_\odot} &= 10^{13.64} \\
d &= 4.3 \cdot 10^{13} d_\odot \\
d &= 208 \cdot 10^6\,\mathrm{pc} \\
d &= 208\,\mathrm{Mpc}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= H_0 \cdot d \\ v &= z \cdot c \\ z &= \frac{H_0 \cdot d}{c} \\ &= \frac{h \cdot 100\text{km/s/Mpc} \cdot 208\text{Mpc}}{2.9979 \times 10^5\text{km/s}} \\ &= 0.047 = 0.05 \end{aligned}$$

Galaksija se nahaja na rdečem premiku $z = 6.03$. Iz meritve njenega spektra so astronomi izmerili starost zvezd, ki sestavljajo galaksijo, t.j. med 560 in 600 milijoni let. Ob katerem rdečem premiku z so začele nastajati zvezde v tej galaksiji? Privzemi, da je trenutna starost vesolja $t_0 = 13.7 \times 10^9$ let in da je hitrost širjenja vesolja podana z ravnim kozmološkim modelom s kozmološko konstanto $\Lambda = 0$. (V takem modelu je skalirni faktor $\propto t^{2/3}$, kjer je t čas od velikega poka.) 2013 IT

Podatki:
$t_0 = 13.7 \times 10^9$ let
$z(t_0) = 6.03$
$\Delta t_{zvezd} =$ med 560 in $600 \cdot 10^6$ let

Uporabimo zvezo

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{1 + z(t_0)}{1 + z(t)}$$

ter zvezdo, ki velja med skalirnim faktorjem in časom od velikega poka za predpostavljeni model vesolja:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Povezava med starostjo vesolja t in rdečim premikom $z(t)$ je

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} = \frac{1 + z(t_0)}{1 + z(t)}$$

Zanima nas rdeči premik ob katerem so nastale zvezde v galaksiji. Najprej izračunamo starost vesolja pri rdečem premiku $z = 6.03$. Uporabimo zgornjo enačbo in izračunamo, da je $t_{(z=6.03)} = 735 \cdot 10^6$ let. Zvezde v galaksiji so nastale še prej, točneje za Δt_{zvezd} prej.

V trenutku nastanka zvezd (in galaksije) je bilo vesolje staro $t = t_{(z=6.03)} - \Delta t_{zvezd} = 735 \times 10^6 - 600 \times 10^6 = 135 \times 10^6$ let oziroma $735 \times 10^6 - 560 \times 10^6 = 175 \times 10^6$ let.

Znova uporabimo povezavo med starostjo vesolja in rdečim premikom za izračun $z(t)$:

$$
\begin{aligned}
1 + z(t) &= (1 + z(t_0)) \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \\
z(t) &= (1 + z(t_0)) \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} - 1 \\
&= \left(\frac{13.7 \times 10^9}{t}\right)^{2/3} - 1 \\
&= 20.8 \text{ oziroma } 17.3
\end{aligned}
$$

Zvezde, ki so se združile v galaksijo na rdečem premiku 6.03, so nastale v intervalu rdečega premika 17.3 – 20.8.

2015 DT Zaradi gibanja Zemlje glede na mikrovalovno sevanje ozadja (prasevanje) je v smeri gibanja temperatura prasevanja navidezno višja za $5{\cdot}10^{-3}$ K od povpreče vrednosti 2,670 K, v nasprotni smeri pa za enako vrednost navidezno nižja. Izračunaj, s kolikšno hitrostjo se Zemlja giblje glede na prasevanje. Hitrost svetlobe $c = 300000$ km/s. Pomagaj si z Wienovim zakonom: $\lambda_{max} \cdot T = C_W$.

Podatki:
Temperatura prasevanja $T = 2{,}670$ K.
Razlika temperatur zaradi gibanja Zemlje $\Delta T = 5{\cdot}10^{-3}$ K.
Hitrost svetlobe v vakuumu $c = 300000$ km/s.

Navidezno zmanjšanje oz. povečanje temperature prasevanja je posledica Dopplerjevega učinka zaradi gibanja Zemlje glede na prasevanje, zato lahko zapišemo:

$$\Delta\lambda/\lambda = v/c \,. \tag{1}$$

Ker vemo, da ima prasevanje spekter črnega telesa s temperaturo T, lahko zapišemo Wienov zakon za mirujočega opazovalca, ki imeri λ_{max}, in opazovalca v gibanju, ki izmeri λ_{premik}:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= C_W/T, \\ \lambda_{premik} &= C_W/(T-\Delta T) \end{aligned} \tag{2}$$

in izrazimo λ s temperaturo:

$$\Delta\lambda = \lambda_{premik} - \lambda_{max} = C_W/(T-\Delta T) - C_W/T\,. \tag{3}$$

Iz enačb 2 in 3 dobimo:

$$\Delta\lambda/\lambda = T/(T-\Delta T) - 1.$$

To razmerje nesemo v 1 in za hitrost gibanja Zemlje dobimo:

$$v = c(T/(T-\Delta T) - 1) = 563 km/s.$$

Zemlja se glede na prasevanje giblje s hitrostjo 563 km/s.

Galaksija Abell 1835 IR1916 z rdečim premikom $z = 10.0$ je kandidatka za najbolj oddaljeno znano galaksijo. Pri kateri valovni dolžini lahko v spektru galaksije pričakujemo absorpcijsko črto helija, ki ima v laboratoriju valovno dolžino $\lambda_0 = 588$ nm? Kolikokrat manjše in mlajše je bilo vesolje, ko je svetloba zapustila galaksijo? Uporabi kritični model vesolja, kjer se skalirni faktor spreminja s $(t/t_0)^{(2/3)}$ in je $t_0 = (2/3)H_0^{-1}$. Hubblova konstanta je 70 km/s/Mpc. 2014 IT

Podatki:
$z = 10$
$\lambda_0 = 588$ nm

Rdeči premik je

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 10$$

$$\lambda = \lambda_0 + 10\lambda_0 = 11\lambda_0 = 6468 \text{ nm}$$

Starost vesolja $t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} = \frac{2}{3\ 70\ \text{km/s/Mpc}} = 2.9 \cdot 10^{17}$ s $= 9.1 \cdot 10^9$ let. Velikost vesolja, ko je svetloba zapustila galaksijo, je $a = (1+z)^{-1} = 1/11 = 0.09$. Vesolje je imelo ob času, ko je svetloba zapustila galaksijo, starost

$$t = t_0 \cdot a^{3/2} = 7.83 \cdot 10^{15} \text{ s} = 2.48 \cdot 10^8 \text{ let}$$

2015 IT Kvazarju PC 1247+3406 so izmerili (opazovano) vodikovo črto z valovno dolžino 721.4 nm namesto 121.6 nm.

(a) Koliko znaša rdeči premik za ta kvazar?

(b) Koliko je bilo staro vesolje, ko je svetloba zapustila kvazar? Kolikšen pa skalirni faktor?

Upoštevaj model ravnega vesolja, $H_0 = 70$ km/s/Mpc.

Rdeči premik za kvazar:

$$z_k = \frac{721.4\text{nm} - 121.6\text{nm}}{121.6\text{nm}} = 4.93$$

Današnja starost vesolja (za model ravnega vesolja) je

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{2}{3} t_H \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \\ &= 9,318\text{Gyr} \end{aligned}$$

kjer je $t_H = \frac{1}{H_0} = 13,97$ milijard let.

Starost vesolja (za model ravnega vesolja) ob $z = 4.93$ je

$$\begin{aligned} t(z) &= t_0 (\frac{a}{a_0})^{3/2} \\ &= t_0 (\frac{1}{1+z})^{3/2} \\ &= 0,645\text{Gyr} \end{aligned}$$

Skalirni faktor ob $z = 4.93$ je

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1+z_k} \\ &= 0,168 \end{aligned}$$

2016 DT Astronomi so ugotovili, da imajo vse supernove Ia približno enak maksimalen sij, ki ustreza absolutni magnitudi $M = -19$. Z njimi lahko zato merimo oddaljenost galaksije, v kateri je taka supernova zasvetila, le s tem, da izmerimo njihov navidezni sij (m).

Ker se vesolje širi, se zdi, kot bi se galaksije oddaljevale od nas s hitrostjo v, ki je sorazmerna z njihovo oddaljenostjo, kar opisuje

Hubblov zakon $v = H_0 D$, kjer je D oddaljenost galaksije, H_0 pa Hubblova konstanta. Hitrost (v) merimo posredno z rdečim premikom (z) črt v spektrih galaksij. Velja:

$$z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 \ ,$$

kjer je λ_0 valovna dolžina črte mirujočega svetila, λ pa izmerjena valovna dolžina iste črte v svetlobi oddaljujoč se galaksije. Rdeči premik lahko zapiišmo tudi kot

$$z = v/c \ ,$$

kjer je c hitrost svetlobe v vakuumu (c = 300000 km/s). Opomba: Zgornja zveza velja za majhne z oz. za $v \ll c$.

(a) V preglednici so meritve maksimalnega navideznega sija (m) supernov in rdečih premikov galaksij (z), v katerih so zasvetile. Privzemi, da so merske napake meritev zanemarljive in iz podatkov izračunaj oddaljenost galaksij (D) in njihovo hitrost oddaljevanja (v). Rezultate vpiši v preglednico.

(b) Na milimetrskem papirju nariši graf hitrosti (v) v odvisnosti od oddaljenosti galaksij $v(D)$ in vanj vnesi rezultate.

(c) Z grafa oceni Hubblovo konstanto H_0. Rezultat izrazi v enotah km/s/Mpc.

supernova	m	D (megaparsek – Mpc)	z	v (km/s)
1	16,26		0,030	
2	17,63		0,050	
3	16,08		0,026	
4	18,43		0,075	
5	14,47		0,014	
6	19,16		0,101	
7	15,18		0,020	
8	16,66		0,036	

Absolutna magnituda (M) je magnituda, ki bi jo imelo vesoljsko telo na oddaljenosti 10 parsekov. Za supernove Ia torej velja:
$M = -19$,
$D_0 = 10$ pc.

(a) Zvezo med gostoto svetlobnega toka dveh vesoljskih teles j_1 in j_2 ter njunima magnitudama m_1 in m_2 opisuje Pogsonov zakon:

$$j_2/j_1 = 10^{0,4(m_1 - m_2)} . \tag{1}$$

Gostota svetlobnega toka pada s kvadratom oddaljenosti D, kar pomeni, da je $j \propto 1/D^2$. Sledi:

$$j_2/j_1 = D_1^2/D_2^2 . \tag{2}$$

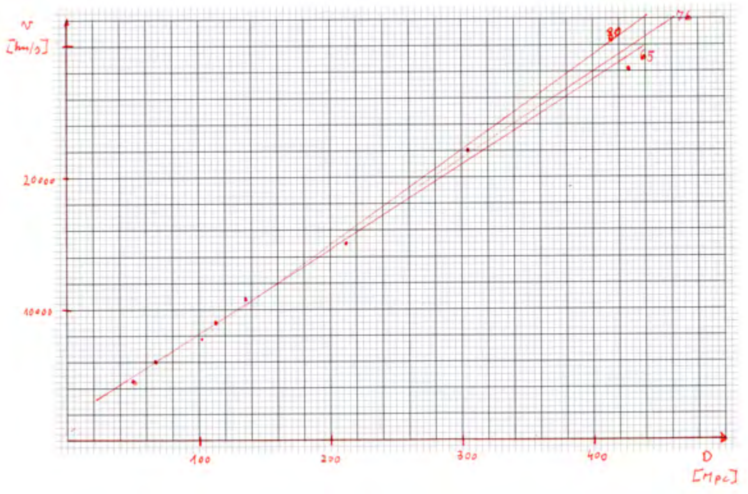
Ker imamo znano absolutno magnitudo (M) supernov Ia, lahko iz izmerjene navidezne magnitude (m) iz enačb 1 in 2 izračunamo njihovo oddaljenost D:

$$D = D_0 10^{0,4(19+m)} . \tag{3}$$

Tako izračunamo oddaljenost posamezne supernove v preglednici. Hitrost oddaljevanja v supernov izrazimo iz njihovega rdečega premika (z): $v = z \cdot c$, kjer je c hitrost svetlobe v vakuumu ($c = 300000$ km/s). Rezultate vpišemo v preglednico.

supernova	m	D (megaparsek = Mpc)	z	v (km/s)
1	16,26	112,7	0,030	9000
2	17,63	211,8	0,050	15000
3	16,08	103,8	0,026	7800
4	18,43	306,2	0,075	22500
5	14,47	49,4	0,014	4200
6	19,16	428,5	0,101	30300
7	15,18	68,5	0,020	6000
8	16,66	135,5	0,036	10800

(b) Na milimetrskem papirju narišemo graf hitrosti (v) v odvisnosti od oddaljenosti galaksij $v(D)$ in vanj vnesemo rezultate.



(4)

(c) Z grafa ocenimo Hubblovo konstanto H_0. Skozi točke potegnemo optimalno premico in izmerimo njen naklon $\Delta v/\Delta D$.

Kot pravilni štejejo rezultati med 65 km/s/Mpc in 80 km/s/Mpc.

Optika

0.8. Odboj in lom svetlobe

0.8.1. Lomni količnik in lomni zakon

Lomni količnik

$$n = \frac{c}{c'} \tag{5}$$

je razmerje med hitrostjo svetlobe v praznem prostoru c in hitrostjo svetlobe v snovi c'.

Lomni zakon pri prehodu svetlobe iz snovi z lomnim količnikom n_1 v snov z lomnim količnikom n_2:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{6}$$

0.8.2. Popolni odboj

0.8.3. Razklon svetlobe

0.9. Zrcala in leče

0.10. Optične naprave

0.10.1. Oko

PNG: sestava očesa

Lečje v očesu sestavljajo roženica, očesna tekočina in očesna leča. Sprememba goriščne razdalje nastane, ko mišice napnejo lečo in ji spremenijo krivinski radij. Na mrežnici nastane prava, obrnjena in pomanjšana slika predmeta. Mrežnica je tkivo, ki ga sestavljajo čepki (treh vrst, za rdečo, zeleno in modro barvo, občutljivost na barve) in paličice (monokromatski črnobeli vid ob prisotnosti manjše količine svetlobe) Na svetlobo je najbolj občutljiva je rumena pega (vdolbina s premerom 0,3mm, ki je izven optične osi in kjer je največja gostota čepkov, nima pa paličic). Lokacija kjer iz očesa izstopa očesni živec, slepa pega, ni občutljiva na svetlobo.

Tipične napake oči so kratkovidnost, daljnovidnost in astigmatizem.

PNG: napake leč in lečje

0.10.2. Fotoaparat

0.10.3. Okular

Povečava okularja M je razmerje med tangensoma zornega kota objekta pri gledanju skozi okular (α) in pri gledanju na navadni zorni razdalji (β):

$$M = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{y/f}{y/r} = r/f, \tag{7}$$

kjer je r navadna zorna razdalja in f goriščna razdalja.

0.10.4. Daljnogled-Teleskop

Daljnogled (ali teleskop) sestavljajo optična cev in okular. V optični cevi teleskopa je za objektivom postavljeno zrcalo ali leča.

Poznamo dve vrsti teleskopov: reflektorje in refraktorje. Reflektor (zrcalni teleskop) uporablja kot objektiv zrcalo. Refraktor ima za objektiv v optični cevi leče.

Teleskop deluje na osnovi loma svetlobe.

Večja je zbiralna površina teleskopa (večji je premer cevi), več svetlobe bo zbral teleskop in jo usmeril v goriščno ravnino. Tipično imajo manjši (amaterski) teleskopi zbiralno površino okrog 30 cm, profesionalni pa od pol metra dalje. Evropski južni observatorij bo leta XXX zgradil Ekstremno veliki teleskop z zbiralno površino 30 metrov!

0.11. Ločljivost

Omejitev v ločljivosti pri teleskopih je posledica uklona svetlobe. Pri uklonu svetlobe na okrogli odprtini z radijem r dobimo prvo dolino v interferenčni sliki pri kotu β, za katerega velja $0.61\lambda = r\sin\beta$.

Dve točkasti svetili zadoščata Rayleigh-jevemu kriteriju, če leži uklonski maksimum drugega svetila na prvem minimumu prvega svetila. Ločljivost teleskopa je torej najmanjši kot med dvema točkastima svetiloma, ki ju ravno še ločimo po Rayleigh-jevemu kriteriju.

Uklonski kot θ (ločljivost) izrazimo kot

$$\sin\theta \simeq \theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

kjer je D premer zbiralne leče/zrcala (zbiralne površine, vstopne odprtine). Večja je zbiralna površina astronomske naprave, večji bo zajeti svetlobni tok in torej boljša ločljivost... Ločljivost teleskopa izrazimo v radianih.

0.12. Napake optičnih naprav

0.13. Vrste teleskopov

0.13.1. Montaže

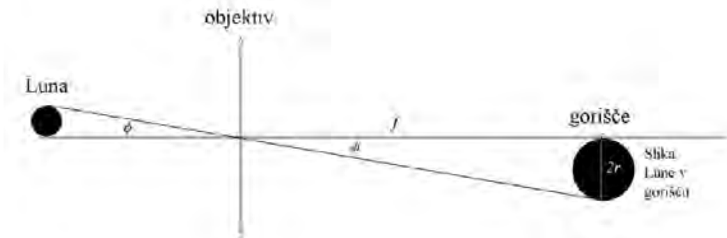
0.14. Senzorji

0.14.1. CCD

0.14.2. Spektroskop

0.14.3. Polarizator

1. Kolikšna mora biti gorišča razdalja objektiva teleskopa, da bo v njegovem gorišču premer slike polne Lune 24 mm? Navidezni premer Lunine ploskvice na nebu je $0,5°$. Skiciraj! Narišemo skico objektiva daljnogleda. Luno narišemo na optični osi in potegnemo žarek od vrha Lune skozi središče objektiva. Slika Lune nastane v gorišču objektiva, ker je Luna v neskončnosti. Vidimo, da je zorni kot θ pod katerim je vidna Luna na nebu enak kotu med optično osjo in žarkom skozi središče objektiva.



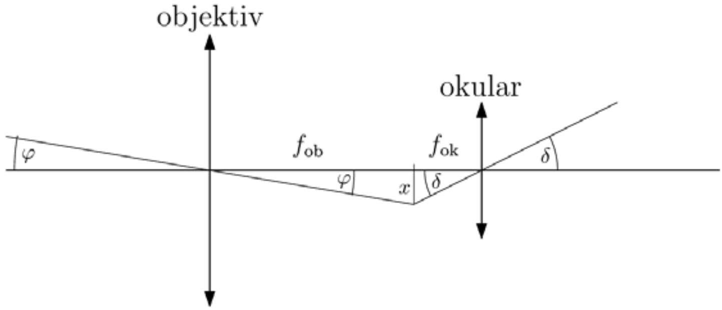
2. Opazovalec opazuje Venero s teleskopom, katerega objektiv ima goriščno razdaljo 1,5 metra. Ta najprej izmeri kotni premer Venerine ploskvice, ki znaša 26". Kolikšna mora biti goriščna razdalja okularja, da bo opazovalec s svojim teleskopom videl Venero tako veliko kot Luno s prostim očesom? Zorni kot Lunine ploskvice na nebu je 32'. Objektiv teleskopa ustvari sliko Venere v gorišču. Gorišče okularja sovpada z goriščem objektiva, zato velja (glej sliko):

$$x = f_{ob} \tan \varphi$$

$$x = f_{ok} \tan \delta \ ,$$

kjer je φ zorni kot Venere, δ pa zorni kot, pod katerim z okularjem vidimo sliko Venere. Ker zahtevamo, da je δ enak zornemu kotu Lune na nebu, sledi:

$$f_{ok} = f_{ob} \frac{\tan \varphi}{\tan \delta} = 0,0195\text{m} = 19,5\text{mm}$$



3. Teleskop je opremljen z okularjem neznane goriščne razdalje, njegova povečava pa je 40-kratna. Teleskopu zamenjamo okular. Drugi okular ima goriščno razdaljo 10 mm in z njim je povečava teleskopa 60-kratna. Kolikšna je goriščna razdalja prvega okularja? Povečava daljnogleda je enaka razmerju med goriščno razdaljo objektiva in okularja. S $P_1 = 40$ označimo povečavo s prvim okularjem z neznano goriščno razdaljo, $P_2 = 60$ povečavo daljnogleda z drugim okularjem z goriščno razdaljo $f_{ok2} = 10$ mm. Goriščno razdaljo objektiva označimo z f_ob. Zapišemo

$$P_1 = f_{ob}/f_{ok1}$$
$$P_2 = f_{ob}/f_{ok2}$$

Enačbi medsebojno delimo in dobimo

$$P_1/P_2 = f_{ok2}/f_{ok1}$$

in goriščna razdalja prvega okularja je $f_{ok1} = f_{ok2}P_2/P_1 = 15$ mm.

4. Teleskop ima objektiv premera 25 cm in goriščno razdaljo 2,5 metra. Usmerimo ga v Sonce in v gorišču nastane ostra slika Sonca. Koliko energije svetlobe Sonca pade na 1 kvadratni cm slike Sonca? Zorni kot Sonca na nebu je 0,5 stopinje. Svetlobni tok s Sonca, ki pade na kvadratni meter pravokotno osvetljene površine na površju Zemlje, znaša 1200 W/m^2. Najprej določimo premer slike Sonca r_{ss} v gorišču teleskopa. $\tan\vartheta = 2r_{ss}/f$, kjer je ϑ zorni kot Sonca na nebu, f pa goriščna razdalja objektiva.

$$r_{ss} = f \tan\vartheta/2 = 1,1\text{cm}.$$

Svetlobni tok P, ki gre skozi objektiv je enak produktu svetlobnega toka s Sonca $j_0 = 1200\text{W/m}^2$ in površine objektiva S_{ob}, ki je odvisna od njegovega polmera $r_{ob} = 12,5\text{cm} = 0,12\text{m}$.

$$P = j_0 \pi r_{ob}^2 = 1200W/m^2 \pi (0,12\text{m})^2 = 54,26W.$$

Ta moč pada tudi na sliko Sonca, vendar na manjšo površino slike $S_{ss} = \pi r_{ss}^2 = 3,8\ \text{cm}^2$.

Svetlobni tok, ki pada na kvadratni cm slike Sonca je potemtakem $j' = P/S_{ss} = 14.28\ \text{W/cm}^2$.

5. **A** V gorišču objektiva teleskopa bi radi razločili zvezdi, ki sta 1 kotno sekundo narazen. Zvezdi razločimo, če je oddaljenost njunih slik v goriščni ravnini 5 mikrometrov. Izračunaj, najmanj kolikšna mora biti goriščna razdalja teleskopa.

   B Primerno dolga goriščna razdalja objektiva teleskopa pa še ni zagotovilo, da bomo zvezdi res razločili. Pomembna je tudi ločljivost teleskopa, ki je odvisna predvsem od premera njegovega objektiva. Ločljivost teleskopa l v vidni svetlobi lahko ocenimo z enostavno formulo: $l = 14/D$, kjer je D premer objektiva v centimetrih, rezultat za ločljivost l pa je izražen kar v kotnih sekundah. Izračunaj, najmanj kolikšen mora biti premer teleskopa iz prvega dela naloge, da bomo zvezdi res razločili.

A Zorni kot med zvezdama na nebu $\varphi = 1''$ je enak zornemu kotu med njunima slikama v goriščni ravnini teleskopa. Goriščna razdalja objektiva teleskopa f in razdalja x med zvezdama v goriščni ravnini objektiva sta stranici pravokotnega trikotnika, zato velja:
$\tan\varphi = x/f$ oz.
$f = x/\tan\varphi$.
Ker je podana zahteva, da se zvezdi še razločita, če je $x = 5 \cdot 10^{-6}$ m, sledi:
$f = 5 \cdot 10^{-6}/\tan 1'' \approx 1$ m.

Zvezdi v gorišču teleskopa razločimo, če je goriščna razdalja objektiva 1 m.

B V prvem koraku smo izračunali najmanjšo goriščno razdaljo objektiva teleskopa, da zvezdi razločimo. Drugi pogoj je ločljiost teleskopa, ki je odvisna od premera objektiva D, ki jo podaja formula:
$l = 14/D$
Ker moramo razločiti zvezdi, ki sta $\varphi = 1''$ narazen, je tudi zahtevana ločljivost teleskopa
$l = \varphi = 1''$.
Za premer objektiva v centimetrih tako dobimo:

$D = 14/l = 14/1 = 14$ cm.

Premer objektiva mora biti najmanj 14 centimetrov.

6. Predpostavi, da sestavljata binarni sistem dve zvezdi podobni Soncu, ki se gibljeta po krožnih orbitah. Tak sistem je od nas oddaljen 5 pc, njegova inklinacija* pa je 45°. Opazuješ s teleskopom, katerega resolucija je 0.5", in spektroskopom z resolucijo 0.01 nm (pri valovni dolžini 440 nm). Za katere razdalje zvezd od skupnega težišča je to dvozvezdje lahko tako vizualna kot spektroskopska dvojnica?

Podatki:
$d = 5$ pc
$i = 45°$
$\theta = 0.5"$
$\Delta\lambda = 0.01$ nm
$\lambda_0 = 440$ nm
$M_1 = M_2 = M_\odot$
$r = ?$

Tirnico zvezd okrog skupnega teĹľiĹˇÄŤa bomo z Zemlje videli kot elipso. Zvezdi morata biti vidni tudi, ko se nahajata vzdolĹľ osi elipse. Potrebni pogoj bo torej, da je $2 \cdot r \cdot \cos i$ (dvakrat mala polos) Ĺˇe vidna na razdalji d.

Pogoj za vidljivost vizualne dvojnice bo torej:

$$\frac{2\,r\,\cos i}{d} \geq \theta$$

$$r \geq \frac{\theta\, d}{2\,\cos i}$$

Pogoj za vidljivost spektroskopske dvojnice pa je, da s podano resolucijo lahko merimo hitrost vzdolĹľ zveznice opazovalec-teĹľiĹˇÄŤe binarnega sistema.

Hitrost vzdolĹľ zveznice opazovalec-teĹľiĹˇÄŤe binarnega sistema (v_{los}, los = line of sight) je

$$v_{los} = v \cdot \sin i$$

*Inklinacija je kot med normalo na ravnino kroženja binarnega sistema in zveznico opazovalec-težišče dvozvezdja.

, kjer je v hitrost zvezde v ravnini kroĹľenja okrog skupnega teĹľiĹˇÄŤa sistema.

Iz pogoja, ki izhaja iz resolucije, lahko zapiĹˇemo

$$v_{los} \geq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$$

V sploĹˇnem lahko za dve zvezdi, ki se gibljeta po kroĹľnih orbitah, zapiĹˇemo

$$M_1 + M_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1,los} + v_{2,los})^3}{(\sin i)^3}$$

V naĹˇem primeru, ker imata zvezdi isto maso, zapiĹˇemo lahko

$$2\ M_\odot = \frac{P}{2\pi G} \frac{(2\ v_{los})^3}{(\sin i)^3},$$

kjer je P perioda ($P = (2\pi r)/v = (2\pi r \cdot \sin i)/v_{los}$, oziroma zapiĹˇemo lahko

$$\begin{aligned}
2\ M_\odot &= \frac{P}{2\pi G} \frac{(2\ v_{los})^3}{(\sin i)^3} && (8)\\
&= \frac{2\pi r\ \sin i}{2\pi G\ v_{los}} \frac{(2\ v_{los})^3}{(\sin i)^3} && (9)\\
&= \frac{r}{G} \frac{2^3\ v_{los}^2}{(\sin i)^2} && (10)\\
r &= \frac{2\ M_\odot\ G\ (\sin i)^2}{8\ v_{los}^2} && (11)\\
&= \frac{M_\odot\ G\ (\sin i)^2}{4\ v_{los}^2} && (12)
\end{aligned}$$

Pogoj za spektroskopsko dvojnico je torej

$$\begin{aligned}
r &\leq \frac{M_\odot\ G\ (\sin i)^2}{4\ v_{los}^2} && (13)\\
r &\leq \frac{M_\odot\ G\ (\sin i)^2 \lambda^2}{4\ (\Delta\lambda)^2 c^2} && (14)
\end{aligned}$$

Razdalje, za katere bo dvozvezdje lahko tako vizualna kot spektroskopska dvojnica, so

$$\begin{aligned}
\frac{\theta\ d}{2\ \cos i} \leq \quad r \quad &\leq \frac{M_\odot\ G\ (\sin i)^2 \lambda^2}{4\ (\Delta\lambda)^2 c^2} && (15)\\
\frac{0.5\text{"}\ 5\text{pc}}{2 \cdot (1/\sqrt{2})} \leq \quad r \quad &\leq \frac{1.9891 \times 10^{30}\ \text{kg}\ 6.6726 \times 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2} (1/2) 440^2 \text{nm}^2}{4 \cdot 0.01^2 \text{nm}^2 (2.9979 \times 10^8)^2 \text{m}^2/\text{s}^2} && (16)
\end{aligned}$$

$$\frac{2.424 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 3.0860 \times 10^{16} m}{\sqrt{2}} \leq \quad r \quad \leq \frac{1.9891 \times 10^{30}\ 6.6726 \times 10^{-11}\ 440^2 \mathrm{m}}{8 \cdot 0.01^2\ (2.9979 \times 10^8)^2} \tag{17}$$

$$2.645 \times 10^{11}\mathrm{m} \leq \quad r \quad \leq 3.574 \times 10^{11}\mathrm{m} \tag{18}$$

7. Oceni, na koliko točkovnih elementih CCD kamere nastane slika opazovane zvezde, če jo opazujemo z vesoljskim teleskopom ($D = 2.4$ m, $f = 57.6$ m) v modrem delu spektra ($\lambda = 450$ nm)! Velikost točkovnega elementa znaša $8\mu m \times 8\mu m$. Oceni tudi, koliko časa lahko opazujemo zvezdo relativne magnitude 15 (magnitude merjene okrog $\lambda = 450$ nm), če je svetlobni izkoristek teleskopa 30% in se celica CCD kamere zasiči pri 50000 sprejetih fotonih! Gostota svetlobnega toka z zvezde z relativno magnitudo $m_B = 0$ znaša $2.52 \times 10^{-8}\mathrm{W/m^2}$.

Podatki:
$h = 8\mu m$

Kotna loÄŤljivost teleskopa je

$$\sin\theta \simeq \theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \tag{19}$$

$$= 1.22\,\frac{450\mathrm{nm}}{2.4\mathrm{m}} \tag{20}$$

$$= 2.28 \cdot 10^{-7} \tag{21}$$

Iz definicije loÄŤljivosti (toÄŤkasti svetili zaradi uklona svetlobe Ĺ˘e loÄŤujemo, ko soupadata maksimum jakosti svetlobe prve zvezde s prvim minimumom v jakosti druge) sledi, da bo slika zvezde bo torej razmazana na $2 \cdot \theta$.

IzraÄŤunati moramo le kolikĹ˘en del neba uspemo zajeti na posamezni toÄŤkovni element.

$$\theta' = \frac{h}{f} \tag{22}$$

$$= \frac{8\mu m}{57.6\mathrm{m}} \tag{23}$$

$$= 1.39 \cdot 10^{-7} \tag{24}$$

Slika se bo razmazala na

$$N = \frac{\theta}{\theta'} = (1.64) = 2\,, \tag{25}$$

dveh toÄŤkovnih elementih.

Z uporabo relativne magnitude (m_B) lahko izraÄŤunamo jakost svetlobnega toka iz zvezde z relativno magnitudo 15.

$$\begin{aligned}
m - m_B &= -2.5 \log \frac{j}{j_B} && (26)\\
15 - 0 &= -2.5 \log \frac{j}{2.52 \times 10^{-8}\mathrm{W/m^2}} && (27)\\
j &= 2.52 \times 10^{-8}\mathrm{W/m^2} \cdot 10^{-0.4\cdot 15} && (28)\\
&= 2.52 \times 10^{-14}\mathrm{W/m^2} && (29)
\end{aligned}$$

Zvezo med gostoto svetlobnega toka na Zemlji in Ĺˇtevilom fotonov dobimo iz spodnje enaÄŤbe

$$\begin{aligned}
j &= \frac{P}{\pi(D/2)^2} && (30)\\
&= \frac{\Delta N/\Delta t\, h\nu}{\pi(D/2)^2} && (31)\\
&= \frac{\Delta N/\Delta t\, hc/\lambda}{\pi(D/2)^2} && (32)\\
&= \frac{\Delta N/\Delta t\, hc4}{\lambda\,\pi D^2} && (33)
\end{aligned}$$

Ker vemo, da je svetlobni izkoristek teleskopa le $\eta = 30\%$, naĹˇa CCD kamera zazna le $\eta \cdot j$ celotnega svetlobnega toka zvezde. Do zasiÄŤenja kamere pa pride pri $\Delta N' = \eta \Delta N = 50000$ sprejetih fotonih.

ÄŚe vstavimo zgornje vrednosti dobimo

$$\begin{aligned}
\eta \cdot j &= \frac{(\eta \Delta N)/\Delta t\, hc4}{\lambda\,\pi D^2} && (34)\\
\eta \cdot j &= \frac{\Delta N'/\Delta t\, hc4}{\lambda\,\pi D^2} && (35)\\
\frac{\Delta N'}{\Delta t} &= \frac{\eta \cdot j\ \lambda\,\pi D^2}{4 \cdot h \cdot c} && (36)\\
\Delta t &= \frac{\Delta N' \cdot 4 \cdot h \cdot c}{\eta \cdot j\ \lambda\,\pi D^2} && (37)\\
&= \frac{50000 \cdot 4 \cdot 6.6261 \times 10^{-34}\mathrm{Js} \cdot 2.9979 \times 10^{8}\mathrm{m/s}}{0.3 \cdot 2.52 \times 10^{-14}\mathrm{W/m^2} \cdot 450\mathrm{nm} \cdot \pi(2.4)^2\mathrm{m^2}} && (38)\\
&= 0.64\mathrm{s} && (39)
\end{aligned}$$

8. S fotoaparatom, ki ima objektiv z goriščno razdaljo 500 mm, fotografiramo polno Luno. Kolikšen je premer slike Lune na čipu? Rezultat izrazi v milimetrih. V sredini Lune je krater s premerom 50 km. Koliko je njegov premer na sliki? Zorni kot Lune na nebu je 0,5°, njena oddaljenost pa 400 000 km.

Slika Lune nastane v goriščni ravnini objektiva, zato je premer slike ($2R_s$) kateta pravokotnega trikotnika, druga kateta pa je goriščna razdalja objektiva f. Zorni kot Lune je φ, zato sledi:

$$\tan\varphi = 2R_s/f$$

. Premer slike Lune je torej

$$2R_s = f \cdot \tan\varphi = 500 \text{ mm} \cdot \tan 0,5^\circ = 4,4 \text{ mm} .$$

Premer slike Lune je 4,4 mm.

Premer kraterja označimo z $2R_k$, premer njegove slike z $2R_{sk}$, oddaljenost Lune oz. kraterja pa z D. Razmerje med premerom kraterja in njegovo oddaljenostjo je enako razmerju med velikostjo njegove slike in goriščno razdaljo:

$$2R_k/D = 2R_{sk}/f .$$

Premer slike kraterja v gorišču objektiva je torej:

$$2R_{sk} = f \cdot \frac{2R_k}{D} = 500\text{mm} \cdot \frac{50km}{400000km} = 0,0625\text{mm} .$$

Premer slike Lune je 0,0625 mm.

V središču Galaksije se nahaja supermasivna črna luknja z maso $M = 4 \times 10^6 M_\odot$. Z dovolj dobro ločljivostjo bi astronomi bi radi določili njegov dogodkovni horizont, kar je sicer težka naloga. Za nevrtečo črno luknjo je dogodkovni horizont enak Schwarzschildovemu radiju, $R_s = 3(M/M_\odot)$ km. Predpostavi, da razpolagamo s teleskopom velikosti Zemlje (z uporabo interferometra Very Long Baseline Interferometry). V katerih valovnih dolžinah bomo opazovali, zato da bomo lahko določili horizont črne luknje? Sonce se nahaja 8.5 kpc od Galaktičnega središča. Podatki: 2013 IT

$d = 8.5$ kpc
$M = 4 \times 10^6 M_\odot$
$R_s = 3(M/M_\odot)$ km $= 12 \times 10^6$ km
$M = 4 \times 10^6 M_\odot$

Kotni premer Galaktične črne luknje na razdalji d je $\theta_{bh} = 2R_s/d$.

Teleskop premera Zemlje ima ločljivost

$$\theta_{tel} = 1.22\frac{\lambda}{2 \cdot R_z}$$

ZNOVA PREGLEJ, DA lAHKO RES RACUNAS Z 1.22 PRI INTERFEROMETRU!

Za opazovanje horizonta črne luknje potrebujemo $\theta_{bh} \geq \theta_{tel}$, iz enakosti pa lahko izračunamo valovno dolžino

$$\begin{aligned}
1.22\frac{\lambda}{2 \cdot R_z} &= \frac{2R_s}{d} && (40)\\
\lambda &= \frac{2 \cdot R_z}{1.22} \cdot \frac{2R_s}{d} && (41)\\
&= \frac{4 \cdot R_z \cdot R_s}{1.22 \cdot d} && (42)\\
&= \frac{4 \cdot 6371000 \cdot 12 \times 10^9}{1.22 \cdot 8500\text{pc}} && (43)\\
&= \frac{4 \cdot 6371000 \cdot 12 \times 10^9}{1.22 \cdot 8500 \cdot 3.0860 \times 10^{16}\text{m}} && (44)\\
&= 0.09\text{cm} && (45)
\end{aligned}$$

2013 IT Zvezda glavne veje na razdalji 20 pc je komaj vidna v vesoljskem teleskopu, ki lahko opazuje v širokem območju valovnih dolžin. Zvezda se bo pomaknila na vejo orjakinj, ko se ji bo temperatura povečala za faktor 3, njen radij pa zvečal za faktor 100. Kolikšna bo največja razdalja na kateri bo zvezda vnovič komaj vidna z istim teleskopom?
Podatki:
razdalja zvezde $d_0 = 20$ pc
$T_1 = 3 \cdot T_0$
$R_1 = 100 \cdot R_0$

Gostota svetlobnega toka komaj vidne zvezde na glavni veji bo

$$j_0 = \frac{L}{4\,\pi\,d^2} = \frac{\sigma\,T_0^4\,4\,\pi\,R_0^2}{4\,\pi\,d_0^2} \tag{46}$$

Vnovič bo zvezda komaj vidna z istim teleskopom, če bo gostota svetlobnega toka ista kot v trenutku, ko je na glavni veji.

$$
\begin{aligned}
j_0 &= j_1 && (47)\\
\frac{\sigma\, T_0^4\, 4\,\pi\, R_0^2}{4\,\pi\, d_0^2} &= \frac{\sigma\, T_1^4\, 4\,\pi\, R_1^2}{4\,\pi\, d_1^2} && (48)\\
\frac{\sigma\, T_0^4\, 4\,\pi\, R_0^2}{4\,\pi\, d_0^2} &= \frac{\sigma\, 3^4 T_0^4\, 4\,\pi\, 100^2\, R_0^2}{4\,\pi\, d_1^2} && (49)\\
\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 &= 3^4 \;\cdot\; 100^2 && (50)\\
d_1 &= 9 \cdot 100\; d_0 && (51)\\
d_1 &= 9 \cdot 100 \cdot 20 \text{ pc} && (52)\\
&= 18000 \text{ pc} && (53)
\end{aligned}
$$

Neka zvezda ima absolutno magnitudo v modrem delu spektra $M_B =$ 2013
5.1 in je od nas oddaljena 130 pc. Opazujemo jo z dvometrskim IT
teleskopom, uporabljamo ozkopasovni filter pri valovni dolžini 450 nm. Koliko fotonov na sekundo zbere tak teleskop? Upoštevaj, da je zaradi medzvezdne absorpcije zvezda videti 3.0 magnitude temnejša! Gostota svetlobnega toka z zvezde z relativno magnitudo $m_B = 0.0$ znaša 2.52×10^{-8} W/m^2.

Podatki:
$M_B = 5.1$
$d = 130$ pc
$D = 2$m
$\lambda = 450$ nm
$\Delta m = 3.0$ (3 magnitude šibkejša)
$m_B = 0.0$ ima $j_0 = 2.52 \times 10^{-8}$ W/m^2

Izračunamo najprej navidezno magnitudo (brez absorpcije - ba):

$$
\begin{aligned}
m_B^{ba} &= M_B - 2.5 \log\left(\frac{10\text{pc}}{d}\right)^2 && (54)\\
&= M_B + 5\log d - 5 && (55)\\
&= 5.1 + 5\log 130 - 5 && (56)\\
&= 10.7 && (57)
\end{aligned}
$$

Popravljena navidezna magnituda bo $m_B = m_B^{ba} + \Delta m = 10.7 + 3.0 = 13.7$.

Zvezdi z relativno magnitudo $m_B = 0$ je absorpcija že upoštevana.

Sledi, da je razmerje gostot svetlobnega toka za zvezdi

$$m_B - 0 = -2.5 \log \frac{j}{j_0} \tag{58}$$

in torej

$$\begin{aligned} j &= j_0 \cdot 10^{-0.4(m_B-0)} && (59)\\ &= 2.52 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2} \cdot 10^{-0.4 \cdot 13.67} && (60)\\ &= 8.57 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W/m^2} && (61) \end{aligned}$$

Zvezo med gostoto svetlobnega toka na Zemlji in številom fotonov dobimo iz spodnje enačbe

$$\begin{aligned} j &= \frac{P}{\pi (D/2)^2} && (62)\\ &= \frac{dN/dt\, h\nu}{\pi (D/2)^2} && (63)\\ &= \frac{dN/dt\, hc/\lambda}{\pi (D/2)^2} && (64)\\ &= \frac{dN/dt\, hc4}{\lambda\, \pi D^2} && (65) \end{aligned}$$

Obrnemo enačbo in izrazimo število fotonov kot

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{j\,\lambda\,\pi D^2}{4\,h\,c} && (66)\\ &= \frac{8.57 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W/m^2}\, 450\, 10^{-9}\mathrm{m}\, \pi 2^2}{4\, \cdot\, 6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{m^2 kg/s}\, 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}} && (67)\\ &\simeq 6 \cdot 10^5 \text{ (oz. 593544) fotonov/s} && (68) \end{aligned}$$

2014 IT

Na teleskopu, ki ima premer zrcala 70cm in goriščno razmerje 8, je nameščena CCD kamera (3000×3000 točkovnih elementov, velikost vsakega je 9μm $\times$ 9μm). Opazujemo Luno ob prvem krajcu.

(a) Kolikšna bo najmanjša velikost kraterjev (v kilometrih), ki jih bomo lahko še ločili na površju Lune? Opazujemo v vidnem delu spektra ($\lambda = 550$nm).

(b) Koliko posnetkov bomo opravili s teleskopom, zato da bomo lahko sestavili sliko *osvetljenega dela* Lune?

Podatki:
$D = 0.7$ m
$F = 8 = f/D$
$f = 5.6$ m
$N_{px} = 3000$
$h = 9\mu$ m
$\lambda = 550$ nm

(a) Najprej izračunamo kotno ločljivost teleskopa, ki bo

$$\delta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\frac{550 \cdot 10^{-9}}{0.7} = 9.58 \cdot 10^{-7}$$

Velikost kraterjev, ki jih bomo še lahko videli, bo

$$D = \delta\, d_L = 9.58 \cdot 10^{-7} \cdot d_L = 368.25 \text{ m}$$

(b) Velikost polja, ki ga lahko zajamemo s CCD kamero na tem teleskopu, je $\theta \times \theta$, kjer je

$$\theta = N_{px} \cdot h/f = 4.82 \cdot 10^{-3}$$

Kotna velikost Lune je $\theta_L = 2R_L/d_L = 9 \cdot 10^{-3}$. Za slikanje osvetljenega dela Lune (v prvem krajcu) bomo potrebovali le 2 posnetka.

Zvezda ima navidezno magnitudo 22.0 izmerjeno v filtru I ($\lambda =$ 800 nm, $\Delta\lambda = 24$ nm). Koliko fotonov na sekundo zazna teleskop Gemini, ki ima premer zrcala 8 m? Pri izračunu upoštevaj, da je kvantni izkoristek enak 40% *po celotni širini filtra* ter da je $j_{Vega} =$ $8.3 \cdot 10^{-12}$ W m^{-2} nm^{-1}. Bodi pozoren/pozorna na enote. 2014 IT

$$\frac{j}{j_{Vega}} = 10^{(m-m_{Vega})/-2.5} \quad (69)$$

$$j = 1.315 \cdot 10^{-20} \quad (70)$$

v enotah W m^{-2} nm^{-1}.

$$N_\gamma = j/E_\gamma \quad (71)$$

$$= j/(hc/\lambda) \quad (72)$$

$$= 5.8 \cdot 10^{-2} \quad (73)$$

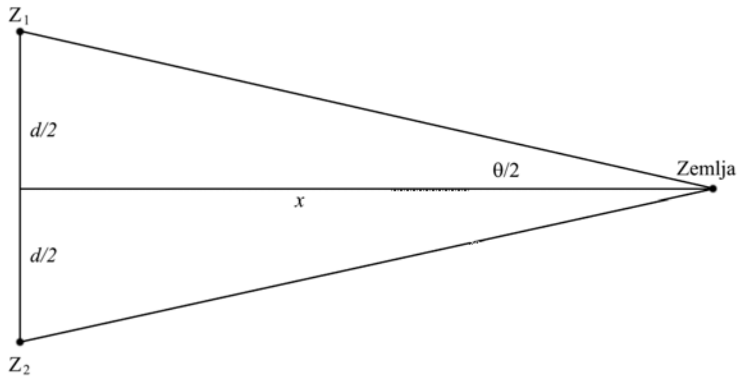
fotonov m^{-2} nm^{-1}.

Število fotonov, ki jih zazna teleskop, je $N = (\pi \cdot 4^2) \cdot (0.4) \cdot \Delta\lambda \cdot N_\gamma = 255$ fotonov s^{-1}.

2016 ST Ločljivost teleskopa θ v kotnih sekundah lahko ocenimo z Rayleighovim kriterijem $\theta = 247500{\cdot}\lambda/2r$, kjer je λ valovna dolžina svetlobe, r pa polmer objektiva teleskopa. Na kolikšni največji oddaljenosti bi s teleskopom s premerom objektiva 15 cm še razločili dve enaki zvezdi, ki druga okoli druge krožita na oddaljenosti 10^9 km, č bi ju opazovali pri valovni dolžini svetlobe 550 nm? Rezultat izrazi v svetlobnih letih. Hitrost svetlobe $c = 300000$ km/s. Predpostavi, da je navidezni sij zvezd tak, da ju je s tem teleskopom mogoče videti.

Premer objektiva $2r = 0{,}15$ m.
Valovna dolžina svetlobe $\lambda = 5{,}5{\cdot}10^{-7}$ m.
Hitrost svetlobe $c = 3{\cdot}10^8$ m/s.
Razdalja med zvezdama $d = 10^{12}$ m.

Najprej izračunamo teoretično ločljivost teleskopa θ:
$\theta = 247500{\cdot}\lambda/2r = 0{,}9$".



Zvezdi Z_1 in Z_2 bomo s teleskopom še razločili, če je kot med njima na nebu enak θ. Zvezdi in opazovalec na Zemlji tvorijo trikotnik na sliki. Velja:
$\tan\theta/2 = (d/2)/x$,
kjer je x iskana oddaljenost dvozvezdja.
$x = d/(2{\cdot}\tan\theta/2) = 2{,}27{\cdot}10^{17}$ m $= 24$ sv. let.
Ker je kot θ majhen, lahko tudi:
$x = d/(\tan\theta)$.
Lahko pa θ preračunamo v radiane:
$\theta = 4{,}4{\cdot}10^{-6}$ rad, in potem zaradi majhnosti kota:
$x = d/\theta = 10^{12}$ m$/4{,}4{\cdot}10^{-6} = 2{,}27{\cdot}10^{17}$ m $= 24$ sv. let.

Pravilni rezultat je 24 svetlobnih let.