IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2023
Letnik 70
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 70 • ŠT. 1 • STR 1-40 • MAREC 2023

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2023, letnik 70, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** tajnik@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 200 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

RELATIVNA ENTROPIJA KOT MERA PRESENEČENJA

ŽIGA VIRK

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 94A17, 94A24

Skozi interpretacijo teorije informacij razložimo, kako merimo količino informacij, povprečno količino informacij (entropijo) ter presenečenja, ki izhajajo iz dolžin sporočil. Mera presenečenja je poznana pod različnimi imeni: relativna entropija, Kullback-Leiblerjeva divergenca ...

RELATIVE ENTROPY AS A MEASURE OF SURPRISE

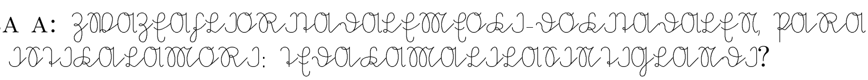
Using the interpretation developed by the coding theory we explain how we measure the amount of information, average content of information (entropy) and surprisal arising from the lengths of codes. The measure of surprisal is known under various names: relative entropy, Kullback-Leibler divergence ...

Uvod

V današnjih časih smo nenehno v stiku z veliko količino podatkov. Nekateri podatki nam podajo veliko informacij, drugi malce manj. V tem članku bomo predstavili osnove teorije informacij (informatika in teorija informacij sta različni področji), skozi katere bomo lahko merili količino informacij, povprečno količino informacij (entropijo) in presenečenje, izhajajoče iz kodiranja. Kot motivacijo si oglejmo naslednji dialog.

OSEBA A: ?
PREVOD 1: Kako si se imel za vikend?

OSEBA B: .
PREVOD 2: Dobro.

OSEBA A: ?
PREVOD 3: Je deževalo?

OSEBA B: .
PREVOD 4: Malce je deževalo dopoldne. Ravno dovolj, da mi je opralo vesoljsko plovilo. Popoldne ob kosilu pa je že sijalo sonce.

Čeprav osebi govorita v nam neznanem jeziku, so nekateri prevodi (predpostavimo, da so prevodi ustrezni) bolj presenetljivi kot drugi. Izstopata prevoda 3 in 4. Prevoda 1 in 2 sta primerljive dolžine z originalnim zapisom. Prevod 3 je presenetljiv, saj je precej krajši od originalnega zapisa. Kot tak nakazuje na to, da je podajanje informacij v originalnem zapisu precej neučinkovito. V nasprotnem smislu je presenetljiv prevod 4: kratek originalen zapis s štirimi simboli vsebuje tri povedi. V tem primeru bi podvomili o kvaliteti prevoda ali pa ugibali, da je morda standarden način pozdrava (matematično gledano bi to pomenilo, da se v neznanem jeziku pojavlja z visoko verjetnostjo). Karkoli je že razlog, presenečenji, ki izhajata iz prevodov 3 in 4, sta povezani s pričakovano dolžino prevoda in s tem povezano količino informacij. Namen tega članka je, da omenjene opazke formuliramo v matematični obliki. Pri tem bomo namesto prevajanja obravnavali kodiranje. Obširna moderna obravnava omenjene matematične osnove in interpretacija v kontekstih teorije informacij ter biološke raznolikosti je podana v [6].

Začetki merjenja informacij segajo v štirideseta leta dvajsetega stoletja, ko je Shannon [9] definiral **količino informacije** v kontekstu verjetnosti. Ob tem bi opozorili, da so zaradi interdisciplinarne in široko aplikativne narave teorije koncepti večkrat dobili različna imena. Količina informacij je poznana pod naslednjimi izrazi: information content, self-information, surprisal (v našem kontekstu bo presenečenje nekaj drugega) ter Shannon information. Na osnovi te količine je Shannon definiral **entropijo** slučajne spremenljivke kot povprečno količino informacij. Koncept entropije je bil takrat seveda že poznan, zato se entropiji v našem kontekstu včasih reče informacijska entropija ali Shannonova entropija. Entropija je na enak ali podoben način definirana v termodinamiki in kvantni fiziki. Kratek pregled literature pokaže še številne druge kontekste, v katerih se entropija pojavlja v taki obliki.

Na osnovi Shannonovega dela in razumevanja entropije v kontekstu informacij je Huffman kot študent razvil algoritem za optimalno kodiranje jezikov [3]. Njegov pristop je poznan pod imenom **Huffmanovo kodiranje** in je osnova za kompresijske metode brez izgube informacij. Med drugim se izboljšave Huffmanovega kodiranja uporabljajo pri računalniških formatih .JPEG [8] in .MP3 [4] datotek.

Zadnji koncept, ki ga bomo predstavili v članku, je **relativna entropija**. Le-ta meri presenečenje v smislu zgornjega primera. Formalno sta jo definirala Kullback in Leibler [5], matematično pa predstavlja količino različnosti dveh slučajnih spremenjivk na n točkah. Natančno definicijo bomo podali v zadnjem poglavju. Na tem mestu le omenimo, da gre za nesimetrično količino, zato se je ne omenja z izrazom metrika. V literaturi se omenja pod izrazoma razdalja (distance) ali divergenca (divergence). Kljub nesimetričnosti se je relativna entropija izkazala za pomembno količino na različnih področjih. V tuji literaturi je poznana pod različnimi imeni: Kullback-Leibler information, Kullback-Leibler distance, Kullback-Leibler divergence, directed divergence, information divergence, information deficiency, amount of information, discrimination information, relative information, gain ali information ali information gain, discrimination distance in error. Na koncu bomo omenili še pomen in uporabo relativne entropije v zadnjem času.

Količina informacij

Količino podatkov merimo z biti. Spominska celica v klasičnem (ne-kvantnem) računalniku praviloma zavzame vrednost 0 ali 1. Količina podatkov shranjena v eni taki celici predstavlja 1 bit podatkov. Z enim bitom lahko opišemo dve različni stanji, z n biti pa 2^n stanj. Količina podatkov pove, koliko različnih stanj lahko s podatki opišemo. Bite tradicionalno združujemo v byte, ki so osnova za večje količine podatkov: MB, GB ...

Količina podatkov na splošno ni enaka količini informacij. Medtem ko količina podatkov meri njihovo razsežnost v spominu, je informacija odvisna od konteksta. Izjavo »V Ljubljani ob polnoči ne sije sonce« lahko kot podatke zapišemo z nekaj sto biti v standardnih kodiranjih, težko pa bi rekli, da vsebuje kakšno informacijo. Za opredelitev količine informacij potrebujemo kontekst. V matematičnem jeziku bo kontekst diskretna slučajna spremenljivka X z izidi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Količino informacij lahko definiramo podobno kot količino podatkov. Če n bitov podatkov opiše 2^n različnih stanj, n bitov informacije opiše 2^n različnih enako verjetnih dogodkov $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}$ (katerih verjetnost je torej 2^{-n}).

Definicija 1. **Količina informacij**, vsebovana v dogodku verjetnosti p, je enaka $\log_2(1/p) = -\log_2 p$ bitov. Enota je bit oz. shannon.

Osnova 2 v logaritmu izhaja iz dejstva, da en bit podatkov opiše dve različni stanji. Občasno se za osnovo uporablja kakšno drugo število $a > 1$. Pri tem se zaradi lastnosti logaritmov količina informacij spremeni za faktor, odvisen le od a. Pri osnovi e se enoti informacije včasih reče nat, pri osnovi 10 pa digit oz. hartley.

Primeri količin informacij v dogodkih:

1. Izid meta poštenega kovanca: 1 bit.
2. Ob 23:00 v Ljubljani ne bo sijalo sonce: 0 bitov, če upoštevamo, da se izid zgodi z verjetnostjo 1.
3. V izidu *ura je 14:23* (brez podatka o sekundah) je manj informacij kot v izidu *ura je 14:23:15*.

4. Izid meta poštene standardne kocke: $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$ bitov.
5. Sodost-lihost izida meta poštene standardne kocke: 1 bit.
6. Ostanek izida meta poštene standardne kocke pri deljenju s 3: $\log_2 3$ bitov.

Zadnji trije primeri nakazujejo, da naša definicija zadošča pričakovani lastnosti: če sta dogodka A in B neodvisna (torej je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$), potem je količina informacije podana z dogodkom $A \cap B$ enaka vsoti količin informacij posameznih delov. Sledeči izrek pove, da ta lastnost do osnove a natanko določi funkcijo količine informacij (in nedvoumno utemelji definicijo 1).

Izrek 2. *Naj bo $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ funkcija, ki zadošča naslednjim pogojem:*

1. $f(1) = 0$, *oz. gotovi dogodki ne podajo nič informacij.*
2. f *je strogo padajoča v* p, *oz. redkejši dogodki podajo več informacij.*
3. $f(p \cdot q) = f(p) + f(q)$.

Tedaj je

$$f(p) = -\log_a p$$

za neki $a > 1$.

Dokaz. Naj bo $x = f(1/2) > 0$. Z induktivno uporabo predpostavke 3 dobimo enakost

$$f((1/2)^m) = x \cdot m, \quad \text{za vse } m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Za naravno število k velja

$$x = f(1/2) = f\left(\left((1/2)^{1/k}\right)^k\right) = kf\left((1/2)^{1/k}\right)$$

in torej $f\left((1/2)^{1/k}\right) = x/k$. Če v tem primeru ponovno induktivno uporabimo predpostavko 3, dobimo

$$f\left((1/2)^{m/k}\right) = x \cdot m/k, \quad \text{za vse } m, k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Izberimo $t \in [0,\infty) \setminus \mathbb{Q}$ ter konvergentni zaporedji racionalnih števil iz $[0,\infty)$ z limito t: zaporedje s_i naj monotono narašča proti t, zaporedje z_i pa naj monotono pada proti t. Po predpostavki 2 dobimo

$$x \cdot t = \lim_{i\to\infty} f\left((1/2)^{z_i}\right) \le f\left((1/2)^t\right) \le \lim_{i\to\infty} f\left((1/2)^{s_i}\right) = x \cdot t.$$

Torej velja

$$f\left((1/2)^t\right) = x \cdot t, \quad \text{za vse } t \in [0,1]. \tag{3}$$

Iz predpostavk 1 in 2 sledi, da je $x > 0$. Tedaj je $a = 2^{1/x} > 1$, velja $x = 1/\log_2 a$ in po enačbi (3) sledi

$$f(p) = f\left((1/2)^{\log_{1/2} p}\right) = x \cdot \log_{1/2} p = \frac{1}{\log_2 a} \cdot (-\log_2 p) = -\log_a p,$$

za vsak $p \in [0,1]$. ■

Entropija kot povprečna količina informacij

Entropija diskretne slučajne spremenjivke je povprečna količina informacij vsebovana v izidih.

Definicija 3. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka z izidi x_1, $x_2, \ldots$, x_m in pripadajočimi verjetnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_m$. **Entropija** X je enaka

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/p_i).$$

Izraz $0 \cdot \log_2(1/0)$ matematično ni definiran. V našem kontekstu bomo kljub temu uporabljali **dogovor** $0 \cdot \log_2(1/0) = 0$. Prvi razlog je dejstvo, da lahko spremenljivki X vedno umetno dodamo nov izid x_{m+1} z verjetnostjo 0. S tem spremenljivke praktično ne spremenimo, čeprav smo formalno spremenili (razširili) njen opis. Želimo, da omenjena sprememba ne vpliva na entropijo, tj., da dodaten člen $0 \cdot \log_2(1/0)$ v vsoti ne spremeni entropije. Drugi razlog je, da izraz $0 \cdot \log_2(1/0)$ v entropiji dejansko izhaja iz $p \cdot \log_2(1/p)$ pri $p = 0$ in

$$\lim_{p \searrow 0} p \cdot \log_2(1/p) = 0.$$

Namesto omenjenega dogovora bi lahko torej vsak izraz $p_i \log_2(1/p_i)$ v definiciji 3 zamenjali z

$$\lim_{p \searrow p_i} p \cdot \log_2(1/p).$$

Opazimo, da $H(X)$ lahko zavzame katerokoli vrednost na intervalu $[0, \log_2 m]$:

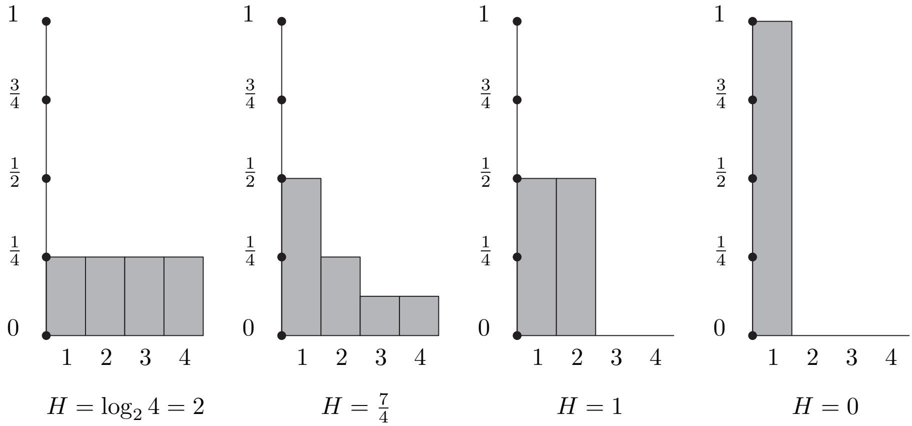
- Minimum: $H(X) = 0$ natanko tedaj, ko obstaja gotov izid x_i, tj., $p_i = 1$.
- Maksimum: $H(X) = \log_2 m$ natanko tedaj, ko X predstavlja enakomerno porazdelitev.

Večanje entropije pri fiksnem m torej predstavlja premikanje proti enakomerni porazdelitvi na m točkah.

Primeri entropije:

- Entropija meta poštenega kovanca je enaka $\log_2 2 = 1$.
- Entropija meta poštene kocke je enaka $\log_2 6$.
- Če kovanec ni pošten, je entropija manjša kot 1.

Več primerov je podanih na sliki 1.



Slika 1. Entropija nekaterih porazdelitev na štirih točkah.

Učinkovita kodiranja

Pogosto želimo, da je naše komuniciranje učinkovito. Informacije želimo izraziti oz. prenesti na čim bolj ekonomičen način. Med drugimi v ta namen lahko uporabljamo učinkovite tipkovnice (npr. tipa Dvorak), okrajšave (npr.), kratice (DMFA), bližnjice (Ctrl-C) ipd. Poleg tega se je matematični zapis (npr. računov) skozi zgodovino razvil v tako obliko, ki učinkovito poda veliko količino informacij. Zapis enačbe »Osnova naravnega logaritma na potenco korena prvega negativnega celega števil pomnoženega s kvocientom obsega in premera kroga je enaka prvemu negativnemu celemu številu« je rahlo manj učinkovit kot $e^{i\pi} = -1$. Učinkovitost komuniciranja je lepo povzel Pitagora: *»Ne izrecite malo z veliko besedami, raje povejte veliko v le nekaj besedah.«*

V tem poglavju si bomo ogledali učinkovita kodiranja v smislu učinkovitega zapisa informacij. Kot običajno naj bo naš kontekst diskretna slučajna spremenljivka X z izidi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi

$p_1, p_2, \ldots, p_m$. V okviru kodiranja izidi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ predstavljajo abecedo (seznam črk oz. simbolov x_i), verjetnosti p_i pa so relativne frekvence, s katerimi se črke x_i pojavljajo v danem jeziku ali besedilu, sestavljenem iz zaporedja črk. Na primer, besedilo lahko predstavlja del zapisa DNK v obliki zaporedja iz črk A, C, G in T. V primeru besedila v slovenščini bi bila (kodirna) abeceda sestavljena iz velikih in malih črk, presledka in ločil (ter potencialno drugih uporabljenih znakov).

V našem kontekstu torej na podlagi podanega besedila generiramo slučajno spremenljivko X, ki predstavlja relativne frekvence črk. Kodiranje besedila pomeni, da vsaki črki priredimo dvojiško kodo (končno zaporedje ničel in enic), s katero bomo dotično črko predstavili v računalniškem pomnilniku.

Definicija 4. **Kodiranje** slučajne spremenljivke X je injektivna preslikava, ki vsakemu izidu x_i priredi kodo (včasih omenjeno kot kodno besedo) y_i v obliki končnega dvojiškega zaporedja (tj. zaporedja, sestavljenega iz števil 0 in 1).

Kode morajo biti seveda take, da lahko iz njih enolično rekonstruiramo originalno besedilo. Znano je kodiranje ASCII, ki vsak znak običajno zakodira s sedmimi oz. osmimi biti. Rekonstrukcija besedila je v tem primeru enostavna, saj vsakih osem bitov predstavlja en simbol abecede. Za zapis besedila dolžine n bomo torej porabili $8n$ bitov. Bistveno vprašanje je, ali lahko to dolžino zmanjšamo brez izgube informacij. Izkaže se, da je odgovor pogosto da. Začnimo razlago s primerom.

črka	frekvenca	kodiranje 1	kodiranje 2	neustrezno kodiranje
a	0,5	0 0	0	0
b	0,25	0 1	1 0	0 1
c	0,25	1 0	1 1	1 0
d	0	1 1		11
povprečna dolžina kode		2	3/2	-

Tabela 1. Primer kodiranja.

Tabela 1 podaja abecedo (a, b, c, d) s pripadajočimi relativnimi frekvencami črk/vrednostmi. Ker so črke štiri, lahko vse enolično zapišemo z dvema bitoma, kar porodi kodiranje 1. V tem primeru je povprečna dolžina kode črke enaka 2. Kodiranje 2 predstavlja alternativno kodiranje, pri katerem je povprečna dolžina kode črke enaka

$$0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 2 = 3/2.$$

Z uporabo tega kodiranja bodo torej kodiranja v podani abecedi precej krajša brez izgube informacij. Ideja pri kodiranju 2 je, da bolj pogostim oz. verjetnim črkam priredimo krajšo kodo. Pri tem morajo biti črkam prirejene take kode, da lahko iz kodiranja enolično rekonstruiramo besedilo. To najlažje dosežemo, če so začetki kod različni:

Definicija 5. Kodiranje slučajne spremenljivke X s kodami $y_1, y_2, \ldots, y_m$ je **predponsko** (instantaneous oz. prefix-free), če se nobena koda y_i ne pojavi kot začetno zaporedje kakšne druge kode.

Primer kodiranja, ki ni predponsko, je podan v tabeli 1 pod stolpcem neustrezno kodiranje: koda 0 črke *a* je začetni odsek kode 0 1 črke *b*. Zapis 010 lahko predstavlja besedo *ac* ali *ba*. Rekonstrukcija v tem primeru ni enolična, s kodiranjem smo torej izgubili nekaj informacije.

Tabeli 2 in 3 podata še nekaj podobnih primerov kodiranja.

črka	p	kodiranje 1	kodiranje 2
a	0,5	0 0	0
b	0,25	0 1	1 0
c	0,125	1 0	1 1 0
d	0,125	1 1	1 1 1
povprečna dolžina kode		2	7/8

Tabela 2. Drugi primer kodiranja.

črka	p	kodiranje 1	kodiranje 2
a	1/3	0 0	0
b	1/3	0 1	1 0
c	1/3	1 0	1 1
povprečna dolžina kode		2	5/3

Tabela 3. Tretji primer kodiranja.

Pri tem se zastavi vprašanje: do kolikšne mere lahko skrajšamo povprečno dolžino kode? Izkaže se, da je spodnja meja podana z entropijo X (glej alinejo 2 v izreku 6).

Izrek 6. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka (abeceda) z izidi (črkami) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi (relativnimi frekvencami) $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Podano naj bo predponsko kodiranje, ki črki x_i priredi kodo y_i dolžine L_i. Tedaj velja:*

1. $\sum_{i=1}^{m}(1/2)^{L_i} \leq 1$.

2. Povprečna dolžina kode je večja ali enaka entropiji: $\sum_{i=1}^{m} p_i L_i \geq H(X)$.

Dokaz. 1. Vsakemu številu t na intervalu $[0,1)$ lahko priredimo dvojiški zapis (upoštevajoč le decimalke):

$$t = 0{,}b_1b_2b_3 \ \ldots \qquad \text{oziroma} \qquad t = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 2^{-i}.$$

Pri tem se za števila z dvema zapisoma (npr. $0{,}011111\ldots = 0{,}1$) omejimo le na tisti zapis, ki se ne konča z neskončnim zaporedjem enic. Vsaki kodi y_i priredimo interval

$$J_i = \{t \in [0,1) \mid \text{dvojiški zapis } t \text{ se začne z } y_i\}.$$

Na primer:

- Če je $y_1 = 1$, potem je $J_1 = [1/2, 1)$, saj so dvojiški zapisi vseh števil na J_1 oblike $0{,}1^*$ (zapis $0{,}1^*$ pomeni, da je prva decimalka 1, druge decimalke pa so poljubne).
- Če je $y_2 = 011$, potem je $J_2 = [3/8, 4/8)$, saj so dvojiški zapisi vseh števil na J_2 oblike $0{,}011^*$ (zapis $0{,}011^*$ pomeni, da so prve tri decimalke $0, 1$ in 1, ostale decimalke pa so poljubne).

Intervali J_i so disjunktni zaradi predponskosti kodiranja in vsebovani v $[0,1)$. Po definiciji so njihove dolžine $(1/2)^{L_i}$. Skupna dolžina ne more presegati dolžine intervala $[0,1)$, kar pomeni $\sum_{i=1}^{m}(1/2)^{L_i} \leq 1$.

2. Pri dokazu alineje 2 bomo uporabili konkavnost funkcije $f(x) = \log_2 x$ (za neenakost med vrsticama 2 in 3) ter alinejo 1 (na zadnjem koraku).

$$\begin{aligned}
H(X) - \sum_{i=1}^{m} p_i L_i &= \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/p_i) + \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2\left((1/2)^{L_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 \frac{(1/2)^{L_i}}{p_i} \\
&\leq \log_2\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \frac{(1/2)^{L_i}}{p_i}\right) \\
&= \log_2\left(\sum_{i=1}^{m} (1/2)^{L_i}\right) \\
&\leq \log_2 1 = 0
\end{aligned}$$

Sledi $H(X) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i L_i$. ∎

Opomba 7. Alineja 1 izreka 6 se imenuje Kraft–McMillanova neenakost, glej str. 46 v [6].

Kodiranje slučajne spremenljivke X, pri katerem za dolžine kod L_i izidov x_i velja $L_i = \log_2(1/p_i)$, se imenuje **idealno kodiranje**. V praksi takšno kodiranje obstaja natanko tedaj, ko so p_i potence števila 1/2. Po definiciji entropije za idealna kodiranja velja, da je njihova povprečna dolžina kode enaka entropiji. Kodiranji številka 2 v prvih dveh tabelah sta idealni kodiranji, kodiranje v tretji tabeli pa ne. Naslednji izrek pove, kako lahko konstruiramo kodiranje slučajne spremenljivke X, pri katerem se povprečna dolžina kode spodnji meji približa do enega bita natančno.

Izrek 8. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka (abeceda) z izidi (črkami) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi (relativnimi frekvencami) $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Tedaj obstaja predponsko kodiranje, ki črki x_i priredi kodo y_i dolžine $L_i = \lceil \log_2(1/p_i) \rceil$. Poleg tega velja $\sum_{i=1}^m p_i L_i < H(X) + 1$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost privzemimo, da je $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_m$. Za vsak i je število $q_i = (1/2)^{L_i}$ najmanjša celoštevilska potenca števila 1/2, ki je manjša od p_i. Števila $q_1, q_2, \ldots, q_i$ so celoštevilski večkratniki $(1/2)^{L_i}$, zato enako velja za njihove poljubne vsote. Črki x_i priredimo interval

$$J_i = [q_1 + q_2 + \cdots + q_{i-1}, q_1 + q_2 + \cdots + q_{i-1} + q_i).$$

Upoštevajmo dogovor iz prejšnjega dokaza in naj y_i predstavlja prvih L_i števk v dvojiškem zapisu števila $q_1 + q_2 + \cdots + q_{i-1}$ (druge števke so enake 0, saj je omenjeno število celoštevilski večkratnik $(1/2)^{L_i}$). Interval J_i sovpada s števili iz $[0, 1)$, katerih prvih L_i števk v dvojiškem zapisu se ujema z y_i. Ker so intervali J_i disjunktni, je dobljeno kodiranje predponsko.

Iz definicije L_i sledi, da je $L_i < \log_2(1/p_i) + 1$. Tedaj je

$$\sum_{i=1}^{m} p_i L_i < \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\log_2(1/p_i) + 1\right) = H(X) + 1. \qquad \blacksquare$$

Primer 9. Oglejmo si demonstracijo zadnjega dokaza na primeru, podanem v tabeli 2. Verjetnosti p_i porodijo vrednosti $L_i = \log_2(1/p_i)$, saj so vse vrednosti p_i celoštevilske potence 1/2. Pripadajoči intervali so

$$J_1 = [0, 1/2),\ J_2 = [1/2, 3/4),\ J_3 = [3/4, 7/8),\ J_4 = [7/8, 1).$$

- Koda y_1 sestoji iz ene ($L_1 = 1$) števke dvojiškega zapisa števila 0, tj., $y_1 = 0$.

- Koda y_2 sestoji iz dveh ($L_2 = 2$) števk dvojiškega zapisa števila $1/2$, tj., $y_2 = 10$.
- Koda y_3 sestoji iz treh ($L_3 = 3$) števk dvojiškega zapisa števila $3/4$, tj., $y_1 = 110$.
- Koda y_4 sestoji iz treh ($L_4 = 3$) števk dvojiškega zapisa števila $7/8$, tj., $y_4 = 111$.

Dobili smo kodiranje 2 iz tabele 2.

Predstavljeni rezultati se nanašajo na kodiranja, pri katerih vsaki črki priredimo svojo kodo. V tem primeru smo videli, da lahko povprečno dolžino kode črke zmanjšamo pod $H(X) + 1$, a ne pod $H(X)$. Izkaže se, da bi v primeru, ko bi namesto črk kodirali nize črk, povprečno dolžino kode črke lahko poljubno približali $H(X)$. Sorodna ideja se pojavlja pri pisavah, ki z znaki zapisujejo zloge namesto črk.

Relativna entropija kot mera presenečenja

V tem poglavju naj bo X diskretna slučajna spremenljivka (abeceda) z izidi (črkami) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi (relativnimi frekvencami) $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Mislimo si lahko, da izhaja iz frekvenc črk v nekem daljšem besedilu. Prav tako naj bo Y diskretna slučajna spremenljivka (abeceda) z izidi (črkami) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in pripadajočimi verjetnostmi (relativnimi frekvencami) $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Pri tem si mislimo, da gre za neko drugo besedilo z istimi črkami.

Povprečna dolžina kod črk v idealnem kodiranju X (ki je sicer dosegljiva le v primeru, ko so p_i potence $1/2$) je

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/p_i) = H(X).$$

Če bi slučajno spremenljivko X zakodirali v idealnem kodiranju za slučajno spremenljivko Y, bi bila povprečna dolžina črk enaka

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/q_i).$$

Gibbsova neenakost (gre za »zvezno« verzijo neenakosti iz alineje 2 izreka 6, dokaz je podan v okviru naloge 2.26 na strani 37 v [7]) pravi, da je ta količina večja ali enaka entropiji:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/q_i) \geq H(X).$$

Relativna entropija je razlika med tema dvema količinama in predstavlja presežno povprečno dolžino kod črk, ki pri kodiranju besedila X nastane zaradi uporabe kodiranja, optimiziranega za neko drugo besedilo.

Definicija 10. Relativna entropija med diskretnima slučajnima spremenljivkama X in Y je

$$D(X \parallel Y) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/q_i) - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(1/p_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2(p_i/q_i).$$

V uvodu smo podali primera presenetljivih in nepresenetljivih prevodov, pri čemer je količina presenečenja izhajala iz nepričakovane dolžine prevodov. Relativna entropija v kontekstu kodiranja formalizira to idejo presenečenja. Seveda je prevajanje besedil bolj kompleksno kot kodiranje. Po drugi strani pa smo definirali relativno entropijo slučajne spremenljivke. S tem smo podali pojem, ki ni vezan le na kodiranje.

Omenimo nekaj lastnosti relativne entropije:

- $D(X \parallel Y)$ običajno ni enako $D(Y \parallel X)$.
- $D(X \parallel Y) \in [0, \infty]$.
- $D(X \parallel Y) = 0$ natanko tedaj, ko je $X = Y$.
- $D(X \parallel Y) = \infty$ natanko tedaj, ko obstaja i, da velja $0 = q_i < p_i$. V tem primeru idealno kodiranje za Y ne vsebuje kode za x_i, zato z njim ne moremo zakodirati besedila, ki to črko vsebuje.

Pomen relativne entropije

Relativna entropija je imela osrednji pomen pri razvoju teorije kodiranja, njena številna imena pa nakazujejo, da se uporablja na veliko področjih. Ker sama po sebi ni metrika, se je pojavila potreba, da bi na njeni podlagi definirali čim bolj sorodne količine, ki zadoščajo pogojem za metriko. Tako se je razvija Fisherjeva informacijska metrika, ki je, okvirno rečeno, Riemannova metrika podana kot koren infinitezimalne relativne entropije.

Fisherjeva metrika predstavlja osnovo informacijske geometrije. Podobna metrika je koren Jensen-Shannonove divergence, definirana kot

$$\sqrt{JS(X \parallel Y)} = \sqrt{(D(X \parallel Y) + D(Y \parallel X))/2}.$$

Dejstvo, da je omenjena količina metrika, je bilo dokazano šele v tem tisočletju [2]. Primerjava teh metrik je podana v [1].

Z vzponom analize podatkov se je relativna entropija ustalila kot ena izmed glavnih mer različnosti porazdelitev, saj pogosto nastopa pri evalvaciji ali konstrukciji optimizacijskih funkcij na podatkih. Relativna entropija na prostoru porazdelitev na n točkah porodi zanimivo geometrijo, ki se v zadnjem času uporablja tudi v okviru topološke analize podatkov [1].

LITERATURA

[1] H. Edelsbrunner, Ž. Virk in H. Wagner, *Topological data analysis in information space*, In Proc. 35th Ann. Sympos. Comput. Geom., 2019.

[2] D. M. Endres in J. E. Schindelin, *A new metric for probability distributions*, IEEE Transactions on Information Theory **49** (2003), 7, 1858–1860.

[3] D. Huffman, *A method for the construction of minimum-redundancy codes*, Proceedings of the IRE **40** (1952), 9, 1098–1101.

[4] N. Kehtarnavaz in N. Kim, *Digital signal processing system-level design using LabVIEW*, Elsevier, 2011.

[5] S. Kullback in R. A. Leibler, *On information and sufficiency*, Annals of Mathematical Statistics **22** (1951), 1, 79–86.

[6] T. Leinster, *Entropy and diversity: The axiomatic approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.

[7] D. J. C. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[8] V. van der Meer in J. van den Bos, *JPEG file fragmentation point detection using Huffman code and quantization array validation*, In The 16th International Conference on Availability, Reliability and Security (ARES 2021), Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, Article 46, 1–7.

[9] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal **27** (1948), 3, 379–423.

POLARIZACIJA MAVRIČNE SVETLOBE

MOJCA VILFAN

Institut »Jožef Stefan«, Ljubljana
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Ključne besede: mavrica, polarizacija svetlobe, Fresnelove enačbe

V prispevku obravnavamo polariziranost mavrične svetlobe. Najprej z geometrijsko sliko in numeričnim izračunom pojasnimo nastanek mavrice, nato pa s Fresnelovimi enačbami izračunamo stopnjo njene polariziranosti.

POLARISATION OF RAINBOW LIGHT

We discuss the polarisation of the rainbow light. First a geometric approach combined with numerical calculations is used to explain the appearance of a rainbow. Taking into account Fresnel equations, polarisation degree for a rainbow is obtained.

Uvod

Mavrica je razmeroma pogost vremenski pojav. Opazujemo jo lahko, kadar se svetloba s Sonca odbije in razkloni v dežnih kapljicah. Precej manj znano pa je, da je mavrična svetloba skoraj povsem polarizirana [1, 2]. Če opazujemo mavrico skozi linearni polarizator, ki prepušča svetlobo, polarizirano v vodoravni smeri, je zgornji del mavričnega loka v celoti viden. Ko polarizator zasučemo za 90°, vrhnji del mavričnega loka praktično izgine, vidni ostanejo le stranski robovi mavričnega loka (slika 1). S sukanjem polarizatorja lahko ugotovimo, da je mavrična svetloba polarizirana v smeri tangentno na mavrični lok.

Slika 1. Fotografija mavrice skozi linearni polarizator, ki prepušča svetlobo, polarizirano v vodoravni smeri (levo), in skozi polarizator, ki prepušča svetlobo, polarizirano v navpični smeri (desno). To nakazuje, da je mavrična svetloba skoraj povsem linearno polarizirana.

Preden se lotimo podrobnejšega izračuna stopnje polariziranosti mavrične svetlobe, ponovimo, kako mavrica sploh nastane. Mavrico lahko opazujemo, kadar svetloba s Sonca vpada na dežne kapljice, ki iz oblakov padajo proti tlom. Tipična velikost dežnih kapljic je nekaj milimetrov, s čimer tudi upravičimo obravnavo pojava v okviru geometrijske optike. Ko žarki s Sonca vpadejo na kapljico vode v zraku, se najprej lomijo v kapljico, nato se na zadnji strani kapljice odbijejo in ponovno lomijo, ko iz kapljice izhajajo. Kot, pod katerim se žarki lomijo, je odvisen od lomnega količnika vode – ta pa je odvisen od valovne dolžine svetlobe, torej od njene barve. Posledično se svetloba različnih barv v kapljici različno lomi in iz nje izstopa ojačena pod rahlo različnimi koti. Ko opazovalec pogleda proti nebu, svetlobo pod različnimi koti vidi različnih barv – vidi mavrični lok.

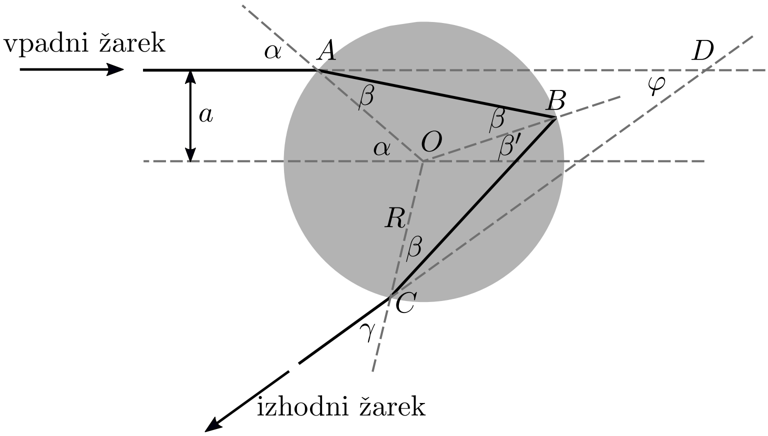
Pojav, da je lomni količnik snovi odvisen od valovne dolžine svetlobe, imenujemo disperzija. Lomni količnik, ki je definiran kot razmerje med hitrostjo svetlobe v vakuumu in hitrostjo svetlobe v snovi, je za vidno svetlobo v vodi okoli 1,33. Vendar je ta vrednost zgolj približna. Z natančnejšo analizo ugotovimo, da se lomni količnik za vidno svetlobo z naraščajočo valovno dolžino monotono zmanjšuje: pri valovni dolžini 400 nm je enak 1,344, pri valovni dolžini 700 nm pa 1,331 [4]. Razlike med lomnimi količniki so majhne, zato je tudi mavrični lok razmeroma ozek.

Mavrico vedno opazujemo v nasprotni smeri od Sonca in vedno pod istim kotom glede na smer vpadnih sončnih žarkov, to je približno 42°. Poleg osnovnega mavričnega loka lahko pogosto opazimo še en mavrični lok. Gre za sekundarno mavrico, ki nastane po dvakratnem odboju svetlobe v kapljicah vode. Ta zunanji lok vidimo pod kotom okoli 51°. Zaradi dodatnega odboja v kapljici je vrstni red barv v sekundarni mavrici obrnjen glede na osnovno mavrico.

Mavrični lok

Izračunajmo za začetek kot, pod katerim vidimo mavrico, tako da zapišemo pot svetlobnih žarkov skozi kapljico pri dani vrednosti lomnega količnika. Problem obravnavajmo ravninsko, pri čemer izbrano ravnino tvorijo Sonce, kapljica in opazovalec. Privzamemo, da vzporedni žarki na kapljico vpadajo v vodoravni smeri in izračunajmo kote, pod katerimi iz kapljice izhajajo posamezni vpadni žarki. Poleg lomnega količnika vode za izbrano valovno dolžino je ključni parameter odmik vpadnega žarka od sredine kapljice.

Označimo odmik od središča kapljice z a in polmer kapljice z R. Pri izračunu izhodnega kota v odvisnosti od parametra a si pomagamo s sliko 2.



Slika 2. Geometrijska pot žarka, ki na kapljico vpada na oddaljenosti a od središča kapljice in iz kapljice izhaja pod kotom φ.

Kot α označuje vpadni kot, to je kot med normalo na kapljico in smerjo vpadnega žarka v točki vpada A. Velja:

$$\sin\alpha = \frac{a}{R}. \tag{1}$$

Lomni kot β izračunamo z lomnim zakonom:

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \tag{2}$$

pri čemer n označuje lomni količnik vode za izbrano valovno dolžino, za lomni količnik zraka pa smo vzeli vrednost 1. Svetlobni žarek potem prehaja skozi kapljico in vpada na njeno zadnjo stranico v točki B. Pri tem je vpadni kot enak kotu β, saj je trikotnik AOB enakokrak. Žarek se odbije od zadnje strani kapljice po odbojnem zakonu, tako da je $\beta' = \beta$, nato pa v točki C izhaja iz kapljice, pri čemer se ponovno lomi po lomnem zakonu. Za kot γ velja:

$$\sin\gamma = n\sin\beta.$$

Primerjava z enačbo (2) pokaže, da je $\gamma = \alpha$. Iz tega sledi, da svetlobni žarek skozi kapljico potuje simetrično glede na $\overline{OB}$.

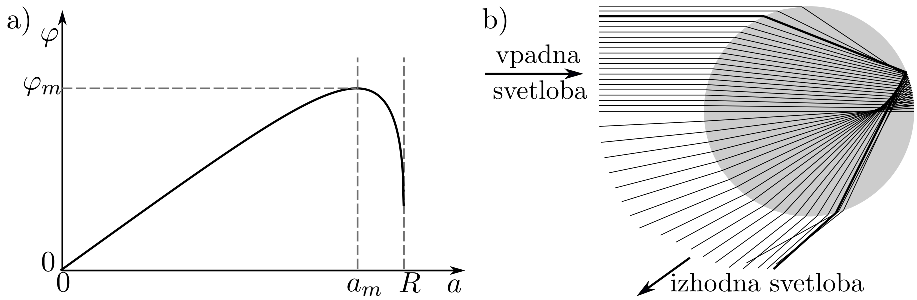
Smer izhodnega žarka glede na vodoravnico izračunamo tako, da smeri vpadnega in izhodnega žarka navidezno podaljšamo za kapljico in izračunamo kot φ v presečišču (točka D). Velja $\angle DOA = \angle BOA = \pi - 2\beta$. Ker je $\angle OAD = \alpha$, je $\angle ADO = \pi - \alpha - (\pi - 2\beta) = 2\beta - \alpha$, od koder sledi, da je kot φ med smerjo vpadnega in smerjo izhodnega žarka enak:

$$\varphi = 2(2\beta - \alpha).$$

Izrazimo še kot α s parametrom a (1) in kot β iz enačbe (2). Dobimo:

$$\varphi = 4 \arcsin \frac{a}{nR} - 2 \arcsin \frac{a}{R}. \tag{3}$$

Narišimo funkcijsko odvisnost izhodnega kota φ od vpadnega parametra a za $0 < a < R$ (slika 3 a). Vrednosti $-R < a < 0$ ne obravnavamo, saj žarki, ki vstopajo v kapljico pod središčem, iz kapljice izhajajo pri kotih $\varphi < 0$. Te žarke opazovalec vidi le v obliki šibkejše sekundarne mavrice, ko se žarki znotraj kapljice dvakrat odbijejo, k primarni mavrici pa ne prispevajo.



Slika 3. Izhodni kot kapljice φ v odvisnosti od vpadnega parametra a (a). Izhodni kot je navzgor omejen s φ_m in doseže največjo vrednost pri a_m. Prikaz poti žarkov skozi kapljico (b). Žarek, ki na kapljico vpada pri a_m in iz nje izhaja pod največjim kotom φ_m, je označen z debelejšo črto.

Žarki, ki vpadajo na kapljico pri majhnih vrednostih a, izhajajo iz kapljice praktično v smeri nazaj. Pod majhnimi koti izhajajo tudi žarki, ki vpadajo na kapljico povsem na vrhu. Vmes doseže odvisnost $\varphi(a)$ maksimum. Lego tega maksimuma in vrednost največjega kota, pod katerim izhajajo žarki, preprosto izračunamo. Izračunamo odvod:

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{4}{\sqrt{n^2R^2 - a^2}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 - a^2}} \tag{4}$$

in poiščemo vrednost a_m, pri kateri je odvod enak nič. Dobimo:

$$a_m = R\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Pri tej oddaljenosti od središča vstopajo žarki, ki iz kapljice izhajajo pod največjim izhodnim kotom. Za $n = 1{,}33$ je $a_m \approx 0{,}862R$, pripadajoči največji kot φ_m pa izračunamo tako, da vstavimo a_m v enačbo (3). Dobimo $\varphi_m \approx 42{,}5^\circ$. Pri kotih, ki so večji od φ_m, žarki iz kapljice ne izhajajo.

Pri dežju se kapljice nahajajo na vseh višinah od tal do oblaka. Le na tistih kapljicah, iz katerih se svetloba do naših oči širi pod kotom okoli φ_m, vidimo mavrico, saj se pri tem izhodnem kotu svetlobni žarki najbolj zgostijo in svetloba ojači. Iz nižje ležečih kapljic se svetloba šibko odbija v smeri nazaj, iz višje ležečih kapljic pa se svetloba do opazovalca ne odbija, zato je nebo nad mavričnim lokom temnejše kot pod njim.

Z grafa $\varphi(a)$ razberemo še eno pomembno značilnost: k istemu izhodnemu kotu φ na splošno prispevajo žarki, ki vstopajo v kapljico pri dveh različnih vrednostih a, eni večji in eni manjši od a_m. Za izračun intenzitete izhodne svetlobe pri danem φ moramo oba prispevka sešteti.

Izračunajmo natančneje porazdelitev intenzitete izhodne svetlobe. Svetloba s Sonca na kapljice vpada s konstantno gostoto svetlobnega toka j_0, ki je definirana kot vpadni svetlobni tok na enoto površine oziroma pri ravninski obravnavi na enoto dolžine. Zaradi loma znotraj kapljice se vpadni svetlobni tok ob izhodu preporazdeli. Za začetek izračunajmo le preporazdelitev gostote svetlobnega toka v odvisnosti od kota φ (torej zgoščevanje žarkov) in še ne upoštevajmo, da se gostota svetlobnega toka zmanjšuje zaradi lomov in odboja na meji med kapljico in zrakom. To bomo dodali v nadaljevanju.

Svetlobni tok, ki vpada na delček velikosti da, zapišemo kot $dP_v = j_0 da$, pri čemer je j_0 konstanten. Izhodni svetlobni tok na delček velikosti ds podobno zapišemo kot $dP_i = j_i ds$. Pri tem j_i označuje gostoto izhodnega svetlobnega toka, ki je funkcija kota φ, ds pa izpišemo kot $R' d\varphi$, pri čemer je R' oddaljenost od kapljice in $R' \gg R$. Ker zmanjševanja svetlobnega toka zaradi lomov in odboja za zdaj ne upoštevamo, vpadni in izhodni svetlobni tok izenačimo. Zvezo med njima določa odvisnost $\varphi(a)$. Zapišemo:

$$dP_i = j_i R' d\varphi = j_i R' \frac{d\varphi}{da} da.$$

Upoštevamo enakost $dP_v = dP_i$ in izrazimo gostoto izhodnega svetlobnega toka:

$$j_i = \frac{dP_v}{R' da} \frac{1}{d\varphi/da} = \frac{j_0 da}{R' da} \frac{1}{d\varphi/da},$$

od koder sledi:

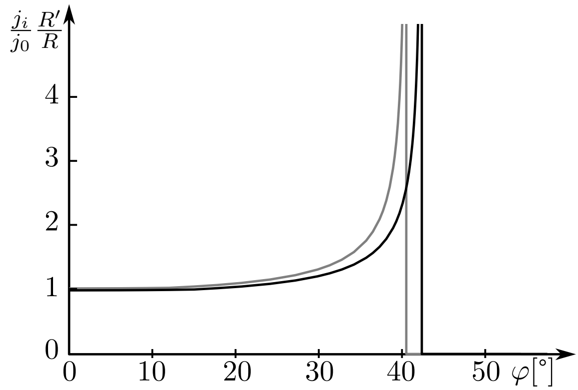
$$\frac{j_i}{j_0} = \frac{1}{R'} \frac{1}{d\varphi/da}.$$

Gostota izhodnega svetlobnega toka je največja, kadar je odvod $d\varphi/da$ enak nič oziroma kadar je izhodni kot φ enak φ_m.

Odvisnosti j_i/j_0 ne moremo preprosto izraziti, lahko pa jo izračunamo numerično pri danih R'/R. Pri tem ne smemo pozabiti, da k izhodni svetlobi pri večini izhodnih kotov φ prispevajo žarki, ki vstopajo v kapljico pri dveh različnih oddaljenostih od središča a. Celoten prispevek pri danem izhodnem kotu je tako sestavljen iz dveh vej rešitev, ki ju je treba sešteti.

Izhodna gostota svetlobnega toka je prikazana na sliki 4 za dve vrednosti lomnega količnika ($n = 1{,}344$ in $n = 1{,}331$). S slike je razvidno, da je vrh intenzitete izhodne svetlobe res pri največjem izhodnem kotu φ_m, kar se ujema z žarkovno sliko. Poleg tega račun pokaže, da velika večina svetlobnega toka izhaja iz kapljice v zelo majhnem intervalu izhodnih kotov, zato je mavrični lok zelo ozek.

V preprosti obliki, v kateri obravnavamo pojav mavrice, se pri mejnem kotu pojavi divergenca gostote svetlobnega toka. Vendar je vrednost gostote zelo velika le v zelo majhnem intervalu kota φ v bližini φ_m. Če izračunamo skupni izhodni svetlobni tok kot integral gostote svetlobnega toka po izstopnem kotu oziroma loku, je vrednost integrala končna.

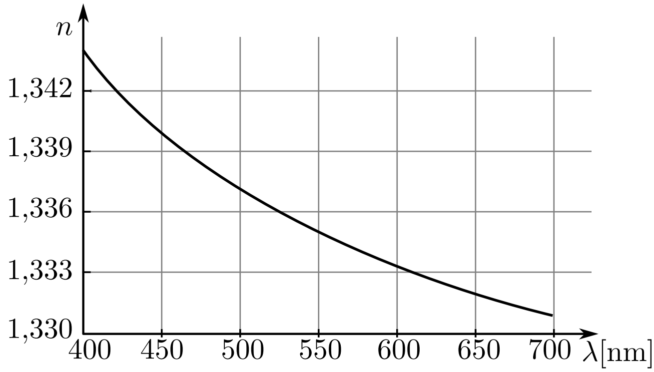


Slika 4. Vpadni svetlobni tok se ob prehodu skozi kapljico preporazdeli. Izhodna gostota svetlobnega toka j_i v bližini mejnega kota φ_m močno naraste, kar se ujema s predstavo, da se tam izhodni žarki najbolj zgostijo. Črna črta velja za $n = 1{,}331$ in siva za $n = 1{,}344$.

Barve mavrice

V uvodu smo povedali, da je lomni količnik vode odvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe. Za vijolično barvo ($\lambda \approx 400$ nm) je okoli 1,344, za rumeno ($\lambda \approx 580$ nm) okoli 1,334 in za rdečo ($\lambda \approx 700$ nm) okoli 1,331 (slika 5).

Na sliki 4 smo že videli odvisnost gostote svetlobnega toka j_i od izhodnega kota φ za dve različni vrednosti lomnega količnika. Vrednosti lomnih



Slika 5. Odvisnost lomnega količnika n od valovne dolžine svetlobe λ za vodo [5].

količnikov ustrezata lomnima količnikoma za vijolično (siva črta) in rdečo svetlobo (črna črta). Največji izstopni kot je tako za vijolično svetlobo (λ = 400 nm) pri φ_m = 40,5° in za rdečo (λ = 700 nm) pri φ_m = 42,4°. Vrednosti za druge barve so med omenjenima mejnima vrednostma.

Na splošno barve niso določene le z eno samo valovno dolžino, temveč vsaki barvi ustreza interval valovnih dolžin. Pravzaprav tudi ti intervali niso povsem točno določeni, saj se barve zvezno prelivajo iz ene v drugo. Navadno privzamemo, da svetloba rdeče barve obsega valovne dolžine v vidnem območju med 625 in 750 nm [6]. Tem valovnim dolžinam pripada vrednost valovnega količnika med 1,3325 in 1,3305, ustrezna φ_m za skrajni vrednosti intervala rdeče svetlobe pa sta 42,15° in 42,44°. Po drugi strani ležijo koti, pod katerimi vidimo vijolično barvo z valovnimi dolžinami med 380 in 450 nm, na intervalu med 40,36° in 41,07°.

Večji izhodni kot določene barve pomeni večji kot, pod katerim to barvo opazujemo glede na vodoravnico. Zato je zunanji lok mavrice rdeče barve, notranji vijolične, znotraj mavrice pa si barve sledijo v običajnem spektralnem zaporedju: rdeča, oranžna, rumena, zelena, modra in vijolična.

Polarizacija mavrične svetlobe

Do zdaj smo pri računu gostote svetlobnega toka upoštevali samo preporazdelitev izhodnih žarkov in s tem določili kote, pri katerih izhaja iz kapljice največ svetlobe izbrane barve. Dopolnimo ta račun še z upoštevanjem odbojnosti pri lomu in odboju. Kolikšen je delež prepuščene in odbite svetlobe ob vpadu na mejo med dvema snovema, podajajo tako imenovane Fresnelove enačbe, ki se imenujejo po francoskem fiziku Augustu-Jeanu Fresnelu (1788–

1827). S temi enačbami lahko izračunamo delež odbitega ali prepuščenega svetlobnega toka pri vpadu na mejo med zrakom in vodo. Pomembna ugotovitev je, da se različno polarizirana vpadna svetloba različno močno odbija.

Na splošno lahko polarizacijo svetlobe (to je smer jakosti električnega polja v elektromagnetnem valovanju) opišemo kot linearno kombinacijo dveh ortogonalnih komponent. Priročno je izbrati eno komponento polarizacije v vpadni ravnini, določeni s smerema vpadne in lomljene svetlobe, in drugo v smeri pravokotno na vpadno ravnino. Valovanje, ki je polarizirano pravokotno na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno polarizirano valovanje (na kratko TE valovanje). Valovanje, pri katerem leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je nanjo pravokotno magnetno polje, imenujemo transverzalno magnetno polarizirano valovanje (oziroma TM valovanje).

Svetloba s Sonca, ki vpada na dežne kapljice, je nepolarizirana. To pomeni, da se jakost električnega polja valovanja v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja svetlobe, zelo hitro in naključno spreminja. V povprečju so vse smeri polarizacije enakomerno zastopane, zato za račun zadošča, če ga naredimo za dve medsebojno ortogonalni linearni polarizaciji, in rečemo, da v povprečju vsaka od njiju prispeva polovično k celotnemu vpadnemu svetlobnemu toku.

Naj svetloba, ki v enakem deležu vsebuje obe ortogonalno polarizirani valovanji, vpada na mejo med snovema. Vpadni kot označimo z α, lomni kot, ki ga izračunamo po lomnem zakonu (2), pa z β. Potem sta razmerji med intenziteto odbite in vpadne svetlobe R za TE polarizirano valovanje [3]:

$$R_{\mathrm{TE}} = \left(\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2$$

in za TM polarizirano valovanje:

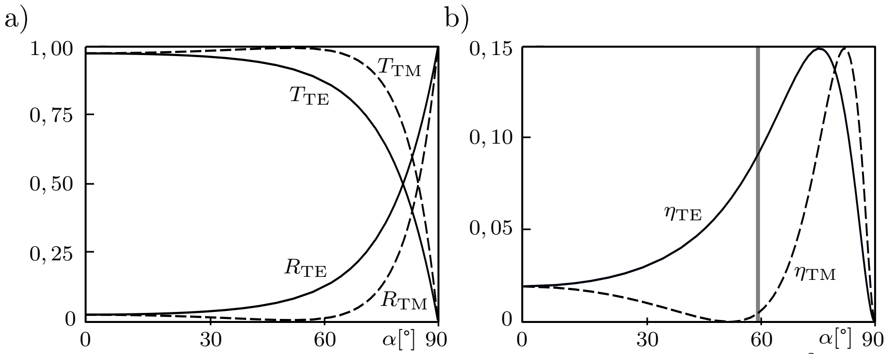
$$R_{\mathrm{TM}} = \left(\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}\right)^2 . \tag{5}$$

Pri tem opazimo, da je odbojnost simetrična na zamenjavo kotov α in β, torej je enaka, če svetloba vpada na mejo iz zraka pod kotom α, ali če vpada na mejo iz vode pod kotom β.

Delež prepuščenega svetlobnega toka T je preprosto izračunati, saj se v snoveh brez absorpcije skupna energija ohranja. Velja:

$$T_{\mathrm{TE}} = 1 - R_{\mathrm{TE}} \qquad \text{in} \qquad T_{\mathrm{TM}} = 1 - R_{\mathrm{TM}}.$$

Za lažjo predstavo narišimo odvisnosti odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota α (slika 6 a). Pri pravokotnem vpadu $\alpha = 0$ sta odbojnosti za obe polarizaciji enaki. Z naraščajočim vpadnim kotom odbojnost R_{TE} za TE polarizirano valovanje narašča, odbojnost R_{TM} za TM polarizirano valovanje pa najprej pojema, doseže ničlo, nato pa naraste do vrednosti 1 pri $\alpha = 90°$.



Slika 6. Odvisnost odbojnosti R in prepustnosti T (a) ter produkta $\eta = T^2R$ (b) od vpadnega kota α za ortogonalni polarizaciji TE in TM. Sivo je označeno ozko območje vpadnih kotov α, ki ustreza območju izhodnih kotov, pod katerim vidimo mavrico.

Kot, pri katerem odbojnost TM polariziranega valovanja doseže ničlo, imenujemo Brewsterjev kot, po škotskem fiziku Siru Davidu Brewstru (1781–1868). Pri tem vpadnem kotu je vsa TM polarizirana svetloba prepuščena, vsa odbita svetloba pa TE polarizirana. Brewsterjev kot lahko izračunamo iz pogoja, da je $R_{\mathrm{TM}} = 0$, kar se zgodi, ko je imenovalec v ulomku (5) neomejen. Pogoj je izpolnjen pri $\alpha_B + \beta_B = 90°$. Izhajamo iz lomnega zakona (2), v katerem upoštevamo zvezo:

$$\sin\beta_B = \sin(90° - \alpha_B) = \cos\alpha_B,$$

in zapišemo enačbo za izračun Brewstrovega kota:

$$\tan\alpha_B = n.$$

Pri prehodu iz zraka v vodo je Brewstrov kot $\alpha_B \approx 53°$, pri prehodu iz vode v zrak pa $\approx 37°$. Ta kot je zelo blizu kotom β, pod katerimi se od zadnje strani kapljice odbija svetloba, ki iz nje izhaja kot mavrica. Spomnimo se, da ojačena svetloba izhaja pod kotom, ki ustreza $a_m \approx 0{,}862R$, od koder izračunamo $\alpha_m \approx 59{,}5°$ in $\beta_m \approx 40{,}4°$.

Delež energijskega toka svetlobe, ki izhaja iz kapljice, izračunamo s tremi zaporednimi procesi: prehod skozi mejo v kapljico, odboj na zadnji strani kapljice in prehod iz kapljice v zrak. Delež označimo z η in ga izračunamo v odvisnosti od vpadnega kota α za vsako polarizacijo posebej.

$$\eta_{\mathrm{TE}} = T_{\mathrm{TE}} R_{\mathrm{TE}} T_{\mathrm{TE}} \qquad \text{in} \qquad \eta_{\mathrm{TM}} = T_{\mathrm{TM}} R_{\mathrm{TM}} T_{\mathrm{TM}}.$$

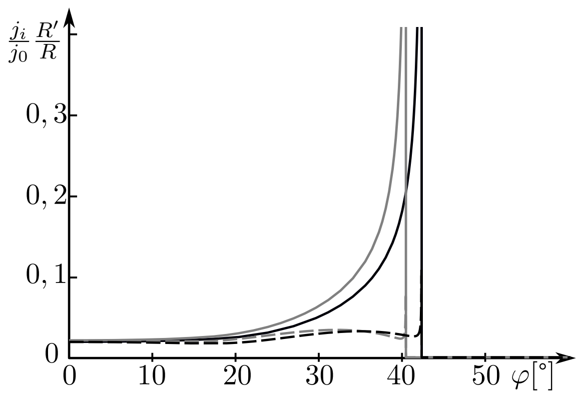
Delež η v odvisnosti od vpadnega kota α je prikazan na sliki 6 b za obe polarizaciji. Za naš izračun so pomembne le tiste vrednosti η, pri katerih izhaja ojačena svetloba iz kapljic. To se zgodi na intervalu izhodnih kotov $40{,}5^\circ < \varphi_m < 42{,}4^\circ$, kar ustreza vpadnim kotom $58{,}8^\circ < \alpha < 59{,}5^\circ$. Na tem ozkem intervalu, ki je na sliki označen senčeno, je delež za TE polarizirano svetlobo razmeroma velik ($\eta_{\mathrm{TE}} \approx 0{,}085$), delež za TM polarizirano svetlobo pa zelo majhen ($\eta_{\mathrm{TM}} \approx 0{,}0027$). Vpeljemo in izračunamo še stopnjo polariziranosti [2]:

$$\frac{\eta_{\mathrm{TE}} - \eta_{\mathrm{TM}}}{\eta_{\mathrm{TE}} + \eta_{\mathrm{TM}}} \approx 94~\%.$$

Svetloba, ki izhaja iz kapljic, je torej skoraj povsem linearno polarizirana.

Za konec določimo še celotno gostoto svetlobnega toka, ki izhaja iz kapljic, v odvisnosti od izhodnega kota φ za vsako od polarizacij, tako da upoštevamo še preporazdelitev gostote žarkov. Račun naredimo tako, da intenziteto vstopnega žarka ustrezno utežimo v odvisnosti od vstopnega kota α, nato pa ponovno numerično seštejemo prispevke obeh vej rešitev.

Izračunana odvisnost je prikazana na sliki 7 za primer svetlobe rdeče in vijolične barve za obe polarizaciji.



Slika 7. Ustrezno utežena izhodna gostota svetlobnega toka j_i v odvisnosti od izhodnega kota φ za $n = 1{,}331$ (rdeča svetloba, črni črti) in $n = 1{,}344$ (vijolična svetloba, sivi črti), pri čemer je j_0 gostota vpadnega energijskega toka. Črtkani črti označujeta TM polarizirano svetlobo, polni črti pa TE polarizirano.

Vidimo, da je gostota svetlobnega toka TM polarizirane svetlobe v obeh primerih zelo majhna in praktično zanemarljiva v primerjavi s TE polarizirano svetlobo. Čeprav je odbojnost TM polarizacije pri Brewstrovem kotu enaka nič, TM polarizirana izhodna svetloba za $\varphi < \varphi_m$ nikjer ne pade povsem na nič. Razlog je v tem, da v isti izhodni kot prispeva tudi druga veja žarkov, za katero je odbojnost sicer majhna, vendar različna od nič. Izhodna svetloba ima zato pod vsemi izstopnimi koti tudi zelo šibko TM polarizirano komponento svetlobe, ki pa je zanemarljiva v primerjavi z močno TE polarizirano svetlobo.

Z integracijo gostote izhodnega svetlobnega toka po izhodnem kotu določimo še razmerje med svetlobnima tokovoma obeh polarizacij v danem majhnem intervalu izhodnega kota. Zaradi dveh vej žarkov, ki izhajajo pod istim izhodnim kotom, se stopnja polariziranosti malenkost zmanjša, na okoli 92 %.

Zaključek

S preprostim numeričnim izračunom smo pokazali, da je svetloba, ki izhaja iz dežnih kapljic, ko na njih posije Sonce, skoraj povsem TE polarizirana. Spomnimo se, da pomeni TE polarizacija smer električnega polja pravokotno na vpadno ravnino. Gledano iz smeri opazovalca to pomeni, da leži jakost električnega polja svetlobe, ki izhaja iz dežnih kapljic, tangentno na mavrični lok. Če mavrico opazujemo skozi linearni polarizator, ki prepušča svetlobo v navpični smeri, vrhnji del mavrice izgine, vidni pa ostanejo stranski deli mavričnega loka, čeprav oslabljeni. Nasprotno zasukan polarizator, ki prepušča svetlobo v vodoravni smeri, prepusti zgornji del mavrice, stranski dela loka pa močno oslabijo. S tem pokažemo, da je svetloba iz mavrice res polarizirana, in hkrati bralcem damo namig, da zanimivi optični pojavi postanejo še zanimivejši, kadar jih opazujemo skozi polarizator.

LITERATURA

[1] J. A. Adam, *The mathematical physics of rainbows and glories*, Phys. Rep. **356** (2002) 229–365.

[2] G. R. Graham, *Polarization of Rainbows*, Phys. Educ. **10** (1975) 50–51.

[3] E. Hecht, *Optics, Fifth edition*, Pearson Education Limited (2017).

[4] The International Association for the Properties of Water and Steam, *Release on the Refractive Index of Ordinary Water Substance as a Function of Wavelength, Temperature and Pressure*, IAPWS, R9-97 (1997).

[5] *Refractive index of water*, dostopno na `http://www.philiplaven.com/p20.html`, ogled 16. 1. 2022.

[6] *Visible spectrum*, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Visible_spectrum`, ogled 16. 1. 2022.

IZ ZGODOVINE

Nekaj spominov na profesorja Nika Prijatelja (1922–2003)

Prijateljeva mama in cesar Franc Jožef

Verjetno le malo ljudi ve, da je bil profesor Niko Prijatelj po materi napol Hercegovec. Še več, zgodba o poti njegove matere v Slovenijo je res nekaj posebnega. Poskusil bom obnoviti zgodbo, kot mi jo je pripovedoval sam. Mati profesorja Prijatelja je bila vaška lepotica iz muslimanske družine v vzhodni Hercegovini. Še zelo mlado so jo hoteli omožiti s precej starejšim županom sosednje vasi, kar ji ni bilo prav nič všeč. Imela pa je prijateljico Hrvatico. Ta ji je rekla: »Če se res nočeš poročiti s tem človekom, ti jaz lahko pomagam.« Odpeljala jo je na skrivaj v katoliški samostan. Prestavljali so jo iz samostana v samostan v Dalmaciji, tako da se je izgubila vsaka sled za njo. Nazadnje je pristala v naših krajih. Muslimani so nekako ugotovili, da so v njeno izginotje vpleteni Hrvati. Po profesorju Prijatelju je prišlo do vstaje – »bune«, ki so jo morali gasiti avstro-ogrski žandarji. Profesor Prijatelj mi je tudi povedal ime te vstaje, a sem ga žal pozabil.

Niko Prijatelj

Zdaj lahko najdemo celo na Wikipediji prispevek o Prijateljevi materi. Njeno izvorno ime je bilo Fata Omanović (1883–1967 po Wikipediji), iz kraja Bijelo Polje pri Mostarju. Njeno izginotje leta 1899 (stara je bila največ 16 let), ki so ga muslimani takoj povezali s spreobrnitvijo, je dejansko vzdignilo ogromno prahu. Po nacionalnih ločnicah kronično sprti bosansko-hercegovski politiki so se radi [1] obračali neposredno na najvišjo instanco. Tako je eden od bosanskih odposlancev na cesarski avdienci v Budimpešti načel primer Fate O. [2]. »Naš presvitli cesar« Franc Jožef je odgovoril, da se je begunka »prostovoljno priključila krščanski skupnosti«.

Leta pozneje se je poročila s Franom Prijateljem (1886–1945), gostilničarjem v ljubljanskih Mostah, in postala Darinka Prijatelj. (Na grobnici na Žalah so zanjo podatki 1886–1967!) Oba sta bila zelo verna in se po Niku Prijatelju dosledno držala nekaterih pravil, kot je recimo skupna zakonska postelja, »ker tako pravijo gospod škof «. (Škof Anton Bonaventura Jeglič je napisal knjižico *ŽENINOM IN NEVESTAM, Pouk za srečen zakon (1910)* in še nekaj podobnih brošur.)

Profesor Prijatelj je skupaj z mlajšo hčerko Andrejo obiskal mnogo let po teh dogodkih, v času socialistične Jugoslavije, sorodnike v Hercegovini in ti so ju lepo sprejeli.

Družina Prijatelj

Z družino Prijatelj sem pravzaprav prišel v stik že kot osnovnošolec. S starejšo hčerko Snežko (Snežno, 1949–2007) sem hodil v tečaj angleščine v Pionirskem domu. Pozneje sva bila v paralelkah v latinskih oddelkih na Osnovni šoli Prežihovega Voranca. Snežka nastopa v naslednji zgodbi.

Moj starejši kolega Egon Zakrajšek je bil tako zaposlen z delom za razne inštitute in gospodarstvo, da je »pozabil« doktorirati. Kolegi so pritiskali nanj, naj si vzame čas in uredi svoj status na univerzi. Profesor Sergej Pahor je Egona pred vsemi izzival, da bo na proslavljanju njegovega doktorata imel govor v francoščini, čeprav je ne zna. No, Egon je končno doktoriral in Sergej je držal obljubo. Napisal je govor (profesor Pahor je bil izvrsten govornik in taki izzivi so ga veselili) in šel k profesorju Prijatelju. Ta ga je poslal k Sneži, ki je govor (ali prvi del govora) prevedla v francoščino in verjetno z njim tudi vadila izgovarjavo. Na srečanju po zagovoru v gostilni Pri Jernejčku na Mali čolnarski je Sergej Pahor dejansko prebral nekaj prav dobro razumljivih francoskih stavkov, nato pa je nadaljeval v slovenščini. Morda je ob tej priložnosti Sergej ali kdo drug povedal asociacijo na Zakrajška v njegovem standardnem položaju, ko gleda v zaslon računalnika: »Zrcalce, zrcalce na steni povej, kdo največji matematik v deželi je tej.« (Egon je bil izredno visok in se je večkrat moral sklanjati, ko je šel skozi vrata.)

Življenje Nikove družine je zaznamovala dolga in težka bolezen njegove žene Ivanke (1919–1986). Rojena je bila kot Ivana Lavrič v Žabnici pri Škofji Loki. Diplomirala je iz matematike, isto leto kot on, 1946.

Ko je bil že vdovec, je začela puščati streha na hiši. Profesor Prijatelj je bil za tovrstne zadeve nepraktičen. (Ob pripovedovanju o tem problemu je – značilno zanj – pokazal name in kdo ve zakaj dejal: »Tale tudi ni za praktična dela.«)

A žena je Niku zapustila zvezčič, v katerem so bili naslovi in telefonske številke obrtnikov, tudi krovca, kot da bi, po njegovih besedah, njena roka tudi iz groba skrbela zanj.

Zanimivo je, da me je pozneje prosil za naslov obrtnika – zidarja. Z veseljem sem mu povedal za zidarja, ki mi je pomagal dograditi stanovanje. (Pri tem sem marsikaj postoril tudi sam.)

Hčerka Andreja (1953–2002) je bila ambiciozna in uspešna matematičarka. Bila je čedna in fotogenična, v prostem času pa navdušena športnica. Igrala je košarko in tekla s svojim velikim, strah vzbujajočim volčjakom. Znala se je uveljaviti, v razgovoru pa je na trenutke bila bolj ostra kot oče. Ostrino je z značilno neposrednostjo pojasnjevala takole: »Ne morem pomagati, če me je oči vzgajal kot fanta.«

Andreja Prijatelj

Na univerzi

Profesor Prijatelj je bil odličen predavatelj, ki ni uporabljal zapiskov. Bil je pravi mojster retorike. Sam sem pri njem poslušal Teorijo množic. Začel je z osnovami matematične logike in nato prešel na množice. To sta bili njegovi priljubljeni področji in znal jih je res krasno pojasniti. Na ta predavanja je skupaj z nami hodil tudi petnajst let starejši jezikoslovec dr. Janez Orešnik. Med študenti v našem letniku mu je bil najbolj všeč Janez Rakovec. Afiniteta je bila obojestranska in Janez se je usmeril v podobno področje kot Niko Prijatelj.

Kot demonstrator pri njegovem predmetu bi moral priti na sestanek z njim in drugimi asistenti. Pred tem pa sem se udeležil študentskega piknika ob Savi, ki ga je bilo težko zapustiti. Ker sem bil športno oblečen, sem se šel

– res neumno – še domov preobleč in posledično zamudil. Profesor Prijatelj je bil hudo jezen in tako sem dobil dobro lekcijo. Na srečo profesor ni bil zamerljiv.

Ko sem začel predavati fizikom Analizo II, sem naletel na težavo. Profesor Prijatelj, ki je tej generaciji predaval Analizo I, zaradi svoje temeljite obravnave osnov analize ni prišel skozi učni načrt. Tako sem porabil prvi mesec v drugem letniku za krpanje luknje in seveda moral celo šolsko leto hiteti na vso moč.

Stavba na Jadranski 19

Bil je direktor Oddelka za matematiko na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) v času, ko se je gradila nova stavba na Jadranski ulici, končana okrog 1969. Povedal mi je, da je profesor Anton Moljk takrat zagotovil zvezni denar za projekt in da je prišlo specializirano gradbeno podjetje iz Beograda, ki je naredilo pilote za temelje stavb na Jadranski 19 in 21. Drugi starejši kolegi so mi pripovedovali naslednje. Prišlo je do spora s prvim izbranim projektantom, ki je menda hotel narediti (fiksno?) stekleno fasado. Profesor Ivan Kuščer naj bi temu nasprotoval, češ da želi imeti stavbo, v kateri bo lahko odprl okno »in pljunil skozenj«. Projektant je odstopil. Zato se je vse zavleklo. Inflacija je naredila svoje in namesto prvotnih dveh stavb z vmesno povezavo je nastala le ena. Stavba na Jadranski 19 je bila ogromna pridobitev za matematiko in fiziko na naši univerzi in Niko Prijatelj si deli zasluge za njeno izgradnjo. Pred tem smo tekali na predavanja od rektorata na Kongresnem trgu do Oddelka za mehaniko na Lepem potu in obeh fizikalnih predavalnic na Jadranski.

Značaj

Med drugo svetovno vojno je bil Niko Prijatelj nekaj časa v italijanskem koncentracijskem taborišču Gonars skupaj z Ivanom Vidavom. Niko je pakete hrane, ki jih je dobil od doma, delil z Ivanom. Vsaj od takrat sta bila velika prijatelja.

Profesor Prijatelj je bil izjemno samostojen in samozavesten človek. Včasih je bil tudi malo vzvišen in se je znal zapičiti v slabosti drugih ljudi in prehitro izreči sodbe. To so mu nekateri zamerili. Niso razumeli, da je bil to praktično zmeraj le kratkotrajen odziv in da je bil sicer izredno uglajen in kulturen človek, pravi gospod stare šole.

Bil je tudi samokritičen. Pravil mi je, da rad leži – in ima zaradi tega slabo vest. Hodil je na nogometne tekme. Včasih je bil tudi gurman, a se je kasneje, po nasvetu zdravnika, moral bolj ali manj odpovedati tem užitkom.

Niko Prijatelj je bil široko razgledan in pri srcu mu je bila francoska kultura, saj je nekaj časa študiral v Parizu. Spomnim se, da je meni, ki sem bil nekajkrat žrtev hudega domotožja, pravil, kako je tudi njega iz Francije, kamor je odšel sam, vleklo domov. Hodil je brez konca in kraja ob reki Seni in premleval idejo, da bi se predčasno vrnil v Slovenijo.

Osnove matematike

Med študijem v letih 1940–1946 je Niko Prijatelj vpisal poleg matematike tudi več predmetov iz filozofije in kemije. Opravil je celo dodatni diplomski izpit iz filozofije. Kot matematik je bil tudi kritičen do te vede.

Profesor Prijatelj je bil dolga leta osrednja oseba *Seminarja za osnove matematike*, ki je potekal v sodelovanju z *Oddelkom za filozofijo* Filozofske fakultete. Predstavnik tega dela skupine je bil Frane Jerman, redni udeleženci pa Ivo Urbančič, Andrej Ule, Mirko Hribar, Matjaž Potrč, Cvetka Toth, Valter Motaln .... Med matematiki so bili udeleženci med drugim Tomaž Pisanski, Milan Hladnik, Andreja Prijatelj, Marko Petkovšek ... Ta seznam je daleč od popolnosti, več bo lahko povedal kdo od rednih udeležencev. Zdi se mi, da je bil Prijatelj karizmatična oseba za to skupino ljudi. (Povezava z Oddelkom za filozofijo je nastala že prej. Andrej Ule je ob študiju Tehnične matematike študiral še Filozofijo. Za sabo je potegnil še Boruta Jurčiča, Andreja Bekeša, Vladimirja Batagelja ..., ki so tudi hodili na predavanja na filozofiji. Andreja Prijatelj se je začela ukvarjati z logiko.)

Nevarna oseba

Oseba, ki zna voditi in pritegniti ljudi, ni pa tesno povezana z režimom – to je bila nevarna kombinacija. Profesor Prijatelj mi je povedal, da ga je poklical uslužbenec *Službe državne varnosti (SDV)* in vprašal, ali lahko pride na razgovor. Tovariš je prišel z veliko usnjeno torbo, v kateri je po mnenju profesorja tičal magnetofon. Obisk ni imel posledic.

Neposredno po osamosvojitvi Slovenije mi je kolega s fakultete povedal naslednje. Ko je več let prej prevzel vodenje *Osnovne organizacije Zveze komunistov* (partijske celice), ga je obiskal agent *SDV*. Kolega ni mogel verjeti lastnim ušesom, ko je dobil vprašanje: »Ali profesor Prijatelj res ni zadovoljen z odzivom na svojo zadnjo knjigo?«

Služba je bila dobro obveščena. Šlo je za delo *Uvod v matematično analizo 1. del (1980)*. Prodanih izvodov res ni bilo veliko. Moj pogled nanjo je takle. Knjiga je napisana lepo in skrbno, s podrobnimi dokazi. Žal je preveč v slogu Bourbakija (ki je naveden tudi kot vir). V njej je le kakih pet slik, pa še te ilustrirajo najbolj enostavne stvari. To snov predavamo v prvem letniku in za ta nivo je učbenik prezahteven in preveč abstrakten, tudi za študente teoretične matematike.

Uspeh pa so imele Prijateljeve knjige *Uvod v matematično logiko* (dve izdaji), *Matematične strukture I* (pet natisov), *Matematične strukture II* (štirje natisi), *Osnove matematične logike, Del 1, Simbolizacija* (štirje natisi).

Bolezen

Kot predstojnik Oddelka sem poleti 1992 organiziral manjše srečanje na fakulteti ob Prijateljevi sedemdesetletnici. Kasneje je enkrat pozimi zdrsnil in počil kolk, a je to kar dobro preživel. V začetku oktobra 2001 sva se srečala v bolnišnici, na oddelku za otorinolaringologijo. Jaz sem odhajal, on je ravno prišel. Povedal mi je, da so to najbolj črni dnevi v njegovem življenju, saj so hčerko Andrejo sprejeli na Onkologijo. Zase je mislil, da prihaja na odstranitev nenevarnega polipa. Pozneje sem izvedel, da je bila stvar bolj resna in podobna kot pri hčerki.

Spomnim se, da sva ga z mojo mamo naslednje poletje srečala na Žalah. Ob pozdravu je vzdignil klobuk, skomignil z rameni in dejal: »Pravijo, da moram na soncu nositi tole »klafedro«. Problem je, da smo v družini rdečelasi in občutljivi na sonce.« Dejansko bi lahko njegova in hčerkina bolezen bila povezana s sončnim sevanjem.

Ukinitev gimnazije leta 1981

Na koncu želim predstaviti dobro zamišljen Prijateljev projekt ponovne uvedbe gimnazije v letih 1989/90. Lotil se ga je s pomočjo civilne družbe: strokovnih društev. Žal je projekt iz meni še danes nejasnih razlogov bil le deloma uspešen in takoj pozabljen. Začnimo z ukinitvijo gimnazije leta 1981.

Konec sedemdesetih let so znanci in študenti s partijskih sestankov začeli prihajati z »novico«, da je z našim šolstvom nekaj narobe. Zapisi s tako vsebino so se pojavili tudi v časopisih, posebno en Delov novinar je bil izredno vztrajen. Novinarji so napadali tudi Univerzo, ki naj bi ignorirala zahteve »združenega dela«. (V novoreku je »združeno delo« večinoma pomenilo gospodarstvo.) Po tej propagandni pripravi je bil spomladi leta 1980 sprejet *Zakon o usmerjenem izobraževanju.* Ta je naslednje leto ukinil gimnazijo in posledično poskrbel, da so v šolstvu res nastali problemi. Eksperiment je bil del nekakšne mini *kulturne revolucije*, ki naj bi pripomogla k večji egalitarnosti. Spremembe so rušile sistem hierarhije in avtoritete, ki je bil načelno in večinoma tudi v praksi utemeljen s strokovnostjo in sposobnostjo. Tudi sicer smo imeli kampanje proti »elitizmu«, ki so recimo odnesle meni tako ljube latinske oddelke. (Mimogrede, celo v takratni Sovjetski zvezi z elitizmom niso imeli problema. Spodbujali so selekcijo po sposobnostih, in to ne samo v baletu. Vedeli so, da brez vrhunskih strokovnjakov ne morejo biti velesila.)

Predlog strokovnih društev za ustanovitev splošne srednje šole

Maja 1989 je profesor Prijatelj v imenu in s podporo DMFA (podpisal se je tudi predsednik Mitja Rosina) poslal vabilo na Zvezo slavističnih društev, Društvo za tuje jezike in književnost, Zvezo zgodovinskih društev, Slovensko filozofsko društvo, Slovensko umetnostno zgodovinsko društvo, Društvo psihologov, Slovensko sociološko društvo, Zvezo geografskih društev, Slovensko kemijsko društvo in Društvo biologov. Zbrali naj bi se na neformalnem sestanku s temo: *Kakšno srednjo šolo si želimo?* Na sestanek naj bi prišla univerzni in srednješolski predstavnik stroke. Šlo je za ponovno uvedbo gimnazije.

Prijatelj je »zagrešil«, kot je sam napisal, osnutek predmetnika *splošne srednje šole*, ki je imel 25 ur pouka na teden, 26 ur v 4. letniku. Predmeti so bili: slovenski jezik, prvi tuji jezik, drugi tuji jezik, zgodovina, filozofija, umetnost, psihologija, sociologija, geografija, matematika, računalništvo, fizika z astronomijo, kemija, biologija.

Na prvi sestanek junija so prišli Milena Strnad, Martina Koman, Mitja Kregar, Marina Štros-Bračko, Darja Mihelič, Niko Hudelja, Matjaž Leitgeb, Robert Šefman, Slavko Brinovec, Jurij Kunaver, Anton Moljk, Andrej Ule, Peter Legiša, Milan Hladnik, Jernej Kozak, Zdenko Kodelja, Zdenko Lapajne, Ljubo Golič, Mirjam Milharčič Hladnik, Darja Piciga, Jože Toporišič, Srečo Zakrajšek, Marjan Šetinc, Tone Wraber, Frane Adam, Janez Kolenc.

Imeli smo več sestankov in sestava udeležencev se je nekoliko spreminjala. Na drugem sestanku so bili še Nuša Bulatović-Kansky, Marjan Kordaš, Tončka Požek-Novak, Andrej Podobnik, Rudi Kotnik, Marija Končina, Marija Boštjančič, Janez Godnov. Podpiral nas je Jože Zupančič iz Celja. Sodelovali so še, kolikor se spomnim, Katja Pavlič-Škerjanc, Primož Simoniti, Rajko Bratož, Eva Holz, Peter Vodopivec, Jure Grgurevič, Janko Strel. Opravičujem se, če sem koga pozabil. Žal vse dokumentacije nimam.

Skupina se je, zame presenetljivo, pokazala kot precej kooperativna. Najmanj pripravljen na sodelovanje je bil botanik Wraber. Število ur za biologijo je bilo zanj premajhno, a se niti ni želel pogajati. Fakulteta za šport je na lep način prepričevala profesorja Prijatelja, da telesna vzgoja sodi v načrt. Tako sem dopisal, da načrt vsebuje tudi redno telesno vzgojo. Približno usklajen predlog smo novembra poslali na širši seznam naslovov: študijske komisije univerzitetnih oddelkov, Republiški komite za vzgojo in izobraževanje (=ministrstvo za šolstvo), Zavod za šolstvo . . .

Kemik profesor Franc Lazarini je vodil uradno Komisijo za srednjo šolo (točnega naziva se ne spomnim). Prijatelju je pisal, da je užaljen, ker ga nismo povabili zraven.

Minister Gregor pa . . .

Niko Prijatelj je, kot naslednjo etapo, povabil na sestanek naše skupine takratnega šolskega ministra. Od tega si je veliko obetal. Doživeli pa smo razočaranje. Minister ni prišel na dogovorjeni sestanek. Skupina ga je čakala uro in pol, dokler nismo obupali. Minister se je ogibal tudi nadaljnjim stikom. Pri tem pa, kot bomo videli, ministrstvo takrat ni imelo svojega načrta uvedbe gimnazije. (Ob tem naj povem, da se je nekaj let prej ta isti naš kolega zavzel za Prijatelja, ko je šlo za izvolitev v naziv rednega profesorja in da je bil sicer dobronameren in prijazen človek.)

Večkrat sem dobil občutek, da Prijatelj v konservativnih krogih ni bil priljubljen. Bil je pač »frajgajst«. Profesor Prijatelj je nato vzdignil roke od projekta gimnazije.

Zelenec in profi

Konec projekta me je žalostil. Načrt je bil dober. V skupini je bilo veliko zelo sposobnih ljudi, ki so želeli sodelovati. A brez podpore ministrstva so bile naše možnosti nične. Poskušal sem rešiti, kar se je dalo. Udeležil sem se okrogle mize o šolstvu v Cankarjevem domu. Kljub neprijaznemu odnosu političarke, ki je vodila pogovor, sem na kratko predstavil projekt. Dejal sem, da bom vesel, če kdo ukrade našo idejo.

Na koncu okrogle mize me je poiskala Ina Petric, urednica izobraževalnih oddaj na Radiu Slovenija, izredno naklonjena znanosti. Dejala mi je, da je žalostno, da mora univerzitetni profesor na ta način predstavljati tak projekt. Povabila me je na radijsko oddajo v živo, skupaj s profesorjem Lazarinijem. Pred oddajo sem Lazariniju povedal, da nameravam predstaviti naš predlog obnove gimnazije. Dejal mi je, da nima smisla biti tako konkreten in da je na takih oddajah bolje, da improviziramo. Brž ko se je oddaja začela in preden sem sam lahko odprl usta, je Lazarini izjavil, da moramo ponovno uvesti gimnazijo.

Prijateljeva pobuda je, ob pomoči Ine Petric, le pospešila oživitev gimnazije.

Zahvaljujem se Milanu Hladniku za dragocene dodatne informacije in predloge. Prav tako se za podatke zahvaljujem Vladimirju Batagelju in Marku Razpetu.

LITERATURA

[1] Dino Šakanović: Austro-ugarska uprava u BiH, dostopno na `http://www.prometej.ba/clanak/povijest/austro-ugarska-uprava-u-bih-kako-je-doslo-do-toga-da-zemaljski-poglavar-oskar-potiorek-lupa-sabljom-po-stolu-1821`, ogled 29. 1. 2023.

[2] Senad Mićijević, Slučaj Fate Omanović, Muftijstvo mostarsko, 29. 11. 2013, dostopno na `https://www.muftijstvo-mostarsko.ba/arhiva/index.php/component/k2/item/264-da-se-ne-zaboravi-ako-se-mora-ponoviti`, ogled 29. 1. 2023.

Peter Legiša

Marija Ahčin, Dunja Fabjan, Marjeta Kramar Fijavž, Aleš Mohorič, Milena Strnad, Natalija Uršič in Tanja Veber prejeli priznanja DMFA Slovenije za leto 2022

DMFA Slovenije že od leta 1968 podeljuje društvena priznanja posameznikom za uspešno pedagoško delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, ter posameznikom ali ustanovam za uspešno sodelovanje z Društvom. Na 75. Občnem zboru DMFA Slovenije v Čatežu ob Savi 11. novembra 2022 je bilo podeljenih sedem novih priznanj. Iskrene čestitke vsem prejemnikom!

Slika 1. Prejemniki priznanj ob podelitvi (od leve proti desni): Marjeta Kramar Fijavž, Dunja Fabjan, Milena Strnad, Aleš Mohorič, Tanja Veber, Natalija Uršič, Marija Ahčin.

Marija Ahčin, učiteljica matematike in fizike na OŠ dr. Franceta Prešerna v Ribnici, je prejela priznanje **za dolgoletno kvalitetno delo z učenci in strokovno dejavnost na področju matematike in logike**.

Marija Ahčin je študij najprej zaključila leta 1983 na takratni Pedagoški akademiji v Ljubljani, leta 2003 pa je diplomirala še na smeri matematika – fizika na sedanji Pedagoški fakulteti. Na OŠ F. Prešerna v Ribnici poučuje že od leta 1984. Ob kvalitetnem rednem pouku matematike in fizike zna učence pritegniti k številnim dodatnim aktivnostim: sodelovanju na tekmovanjih iz matematike, fizike, razvedrilne matematike in logike, izdelovanju poliedrskih jelk in koledarjev ter različnim priložnostnim aktivnostim. Njeni učenci so na državnih tekmovanjih iz matematike, fizike in logike osvojili 18 zlatih priznanj, še vsaj takšno število primerljivih rezultatov pa so na tekmovanjih dosegli tudi v obdobju pred zlatimi priznanji. Gospa Marija Ahčin je tudi širše strokovno aktivna. Z ZRSŠ je sodelovala v projektu računalniško opismenjevanje in pri pripravi nalog za eksterno preverjanje znanja iz matematike za 9. razred, vodila pa je tudi študijsko skupino za matematiko. Večkrat je bila mentorica študentom PEF in učiteljem pripravnikom. Z DMFA Slovenije in ZOTKS že vrsto let sodeluje pri izvedbi tekmovanj, bila je tudi članica komisije za logiko. Svoje delo z učenci je predstavila na različnih strokovnih srečanjih in seminarjih ter v reviji Matematika v šoli, v samozaložbi je izdala tudi več zbirk matematičnih nalog in je avtorica vsebine računalniškega programa Meri, ki je izšel na zgoščenki ZRSŠ. S svojim kvalitetnim delom je zgled tudi sodelavcem na njeni šoli.

Dunja Fabjan, doktorica astrofizike in docentka na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, je prejela priznanje **za kvalitetne priprave mladih astronomov na mednarodna tekmovanja in aktivnosti za popularizacijo astronomije**.

Dunja Fabjan je že od prvega sodelovanja Slovenije na Mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike leta 2013 nepogrešljiva mentorica na teoretičnih pripravah slovenskih tekmovalcev in tekmovalk za mednarodna tekmovanja s področja astronomije. Kljub številnim drugim raziskovalnim in pedagoškim obveznostim dijake in dijakinje na tekmovanja aktivno pripravlja preko predavanj in vaj, zanje pripravlja strokovna gradiva ter sodeluje pri izbirnih postopkih za slovensko ekipo. Izjemni slovenski uspehi na MOAA (enkrat absolutni zmagovalec, 4 zlate, 10 srebrnih, 12 bronastih medalj in številne pohvale) so tudi plod njenega zavzetega dela z mladimi. Kot članica državne tekmovalne komisije redno sodeluje tudi pri Državnem tekmovanju v znanju astronomije in pri izobraževanju osnovnošolskih in srednješolskih učiteljic in učiteljev na področju astronomije, ki jih organizira DMFA Slovenije. Zelo aktivna pa je tudi pri širši popularizaciji astronomije. Že vrsto let skrbi za spletišče Portal v vesolje, na katerem objavlja poljudne prispevke o zanimivih astronomskih temah. Učinkovito pa za popularizacijo uporablja tudi sodobne medije – osebni Twitter račun, blog Vesolje v škatli ter zadnji dve leti s sodelavko Marušo Žerjal tudi podkast Temna stran lune, na katerem sta v kratkem času že pridobili stalno občinstvo.

Marjeta Kramar Fijavž, doktorica matematike in izredna profesorica na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani, je prejela priznanje **za dejavnosti na področju promocije žensk v matematiki in vsestransko aktivno delovanje v društvu**.

Marjeta Kramar Fijavž je ugledna znanstvenica z mednarodno priznanimi dosežki na področju funkcionalne analize in teorije operatorjev, je tudi soavtorica znanstvene monografije Positive Operator Semigroups: From Finite to Inifinite Dimensions (Springer, 2017, skupaj z A. Batkai in A. Rhandi). Je izjemno aktivna članica društva in je v zadnjih nekaj letih organizirala celo vrsto odmevnih dogodkov in projektov. Je ena izmed pobudnic in ustanovnih članic Odbora za ženske pri DMFA Slovenije, ki ga je od 2017 do 2020 tudi vodila. Leta 2019 je skupaj z Jasno Prezelj in Anjo Petković organizirala mednarodno konferenco Women in Mathematics on the Mediterranean Shores. Ob tej priložnosti je organizirala razširitev mednarodne razstave Women in Mathematics throughout Europe s portreti matematičark iz sredozemskih dežel in skupaj z Jasno Prezelj organizirala postavitve razstave v Portorožu (ob kongresu 8ECM), v Novi Gorici ter v Ljubljani (na ZRC SAZU, UL PEF in na UL FMF). Razstavo so spremljali tudi številni dogodki o položaju žensk v akademskih poklicih, na katerih je sodelovala kot razpravljavka ali kot soorganizatorka. Leta 2022 je bila imenovana v komisijo za ženske v matematiki pri Evropskem matematičnem združenju (EMS). Bila je glavna pobudnica in v letih 2020 in 2021 tudi soorganizatorka likovnih natečajev ob Mednarodnem dnevu matematike v Sloveniji. Kot članica Upravnega odbora je od leta 2017 dalje pomembno sodelovala tudi pri organizaciji Občnih zborov DMFA in kot podpredsednica v zadnjem mandatnem obdobju izdatno doprinesla k uspešnemu delu društva.

Aleš Mohorič, doktor fizike in docent za didaktiko fizike na UL FMF, je prejel priznanje **za bogato strokovno dejavnost in dolgoletno uredniško delo pri reviji Presek in drugih društvenih publikacijah**.

Aleš Mohorič je več zaporednih stopenj študija fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani zaključil z doktoratom na temo jedrske magnetne resonance leta 2000, kasneje pa se je začel posvečati predvsem pedagoškemu delu in didaktiki poučevanja fizike. Kot docent za didaktiko fizike je zaposlen na Fakulteti za matematiko in fiziko. Je soavtor (z V. Babičem) kompleta učbenikov Fizika za gimnazije in nekaj zbirk fizikalnih nalog za srednjo šolo pri založbi Mladinska knjiga, ter soavtor več zbirk vaj za študente visokošolskih programov. Od leta 2009 je odgovorni urednik revije Presek, edine slovenske revije za mlade matematike, fizike in astronome, ki jo kljub težkim časom za tiskane medije uspešno ohranja pri življenju ob njeni 50-letnici izhajanja, njegov 14-letni uredniški staž pa je najdaljši v zgodovini revije. V reviji med drugim ureja redno rubriko o naravoslovni fotografiji, v kateri bralcem pojasnjuje zanimive fizikalne pojave. Je tudi urednik za področje fizike pri reviji Obzornik za matematiko in fiziko ter član uredniškega odbora revije Fizika v šoli. S prispevki in predstavitvami o pouku fizike redno sodeluje na različnih seminarjih, strokovnih srečanjih in konferencah v organizaciji DMFA Slovenije in drugih ustanov. Kot član Upravnega odbora DMFA Slovenije je v zadnjem obdobju aktivno sodeloval pri organizaciji številnih društvenih aktivnosti na področju pedagoške dejavnosti in založništva in s tem bistveno prispeval k uspešnemu delu društva.

Milena Strnad, magistrica pedagoške matematike, upokojena urednica in avtorica učbenikov, je prejela priznanje **za trajen prispevek k matematičnemu izobraževanju v Sloveniji**.

Milena Strnad je leta 1974 diplomirala na Pedagoški akademiji v Ljubljani kot učiteljica matematike in fizike, leta 1979 še kot profesorica matematike s fiziko na Pedagoški fakulteti na Reki, leta 1993 pa je postala magistrica matematičnega izobraževanja na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, kjer je pridobila tudi naziva predavateljica metodike matematike za izobraževanje (1997) in višja predavateljica za področje Elementarne matematike z didaktiko (2001). 18 let je poučevala matematiko najprej na Gimnaziji Koper, nato na Gimnaziji Bežigrad. Kot področna urednica pri Državni založbi Slovenije je od leta 1991 dalje 15 let vestno skrbela za sodelovanje vrhunskih avtorjev in kvaliteto izdaj predvsem s področja matematike. Kot avtorica ali soavtorica je sodelovala pri kar 206 različnih izdajah matematičnih učbenikov in sorodnih del. Učbeniki in zbirke vaj za matematiko za srednje šole, pri katerih je sodelovala z različnimi soavtorji, so doživeli vrsto ponatisov in prenovljenih izdaj. Zahtevne priredbe tujih učbenikov v široko uporabljani zbirki Presečišče za osnovno šolo je dopolnila z več izvirnimi avtorskimi deli. Njen avtorski učbeniški komplet Stičišče od 5. do 9. razreda osnovne šole je še vedno v rabi. Vse od začetka svojega poklicnega delovanja je bila aktivna tudi v DMFA Slovenije.

V obdobju od 1980 do 1983 je bila predsednica takratne koprske podružnice in že leta 1981 je kot Milena Kožar prejela Priznanje DMFA Slovenije za večletno zunajšolsko delo z mladimi matematiki in fiziki. Od leta 1986 do 1993 pa je vodila pedagoško sekcijo DMFA Slovenije, v okviru katere je dve leti organizirala predavanja za srednješolce v Ljubljani, štiri leta predavanja za srednješolske profesorje fizike in šest let predavanja za srednješolske profesorje matematike, iz katerih je izšlo Permanentno izobraževanje učiteljev, ki še danes poteka na UL FMF pod drugim imenom, organizirala pa je tudi nekaj strokovnih seminarjev za računalniške programe TeX, DOS in Derive. Vrsto strokovnih prispevkov in različnih matematičnih vesti je objavila v revijah Presek, Obzornik za matematiko in fiziko, Proteus, Matematika v šoli in drugje. Člani DMFA Slovenije pa jo dobro poznamo tudi po rednih predstavitvah na naših vsakoletnih strokovnih srečanjih, občnih zborih in na seminarjih za zgodovino matematike, kjer s svojimi spomini na preminule kolege pomembno prispeva k našemu zavedanju o širši slovenski matematično-fizikalni skupnosti.

Natalija Uršič, učiteljica matematike in fizike na OŠ Toma Brejca v Kamniku, je prejela priznanje **za srčno delo in navduševanje mladih za matematiko ter za uspešno mentorstvo pri tekmovanjih iz razvedrilne matematike**.

Natalija Uršič je leta 1989 zaključila študij za predmetno učiteljico fizike in matematike na takratni Pedagoški akademiji v Ljubljani, odtlej pa že 35 let poučuje na Osnovni šoli Toma Brejca v Kamniku. Vsa leta dokazuje, da je z vsem srcem predana matematiki in to predanost prenaša tudi učencem. Delo v razredu opravlja odlično. Je izjemno dosledna, a hkrati pripravljena prisluhniti tako učencem z učnimi težavami kot tudi nadarjenim. Z njimi nadgrajevati znanje pri dodatnem pouku, interesnih dejavnostih in dodatnih urah, na katere učenci vsak dan redno prihajajo tako pred poukom kot po njem. Natalija Uršič jih navdušuje s svojim znanjem in pozitivno energijo, ki jo izžareva. Pod njenim mentorstvom se učenci udeležujejo različnih matematičnih tekmovanj in dosegajo zavidljive rezultate na državnem nivoju. Na tekmovanju iz razvedrilne matematike so od leta 2011 osvojili kar 56 zlatih priznanj, s čimer je ena najuspešnejših mentoric tega tekmovanja na splošno. Na šoli je aktivna tudi pri usklajevanju poučevanja matematike po vertikali, zato predstavlja matematika zelo močno področje OŠ Toma Brejca. Učitelje razrednega pouka navdušuje, da vzpodbujajo mlajše učence k dodatnim aktivnostim in veselje do matematike prenesejo na predmetno stopnjo. Za vsemi temi uspehi pa se skriva ogromno veselja, navdušenosti, želje po izpopolnjevanju znanja, strokovnega izobraževanja in motiviranosti za matematiko. Vse našteto pooseblja učiteljica Natalija Uršič.

Tanja Veber, magistrica znanosti in profesorica matematike na I. gimnaziji v Celju, je prejela priznanje **za vsestransko strokovno delo, izjemen pedagoški čut in predanost delu z mladimi**.

Tanja Veber je diplomirala leta 1999 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani in leta 2003 magistrirala na Fakulteti za naravoslovje in matematiko v Mariboru. Od leta 2004 je zaposlena na I. gimnaziji v Celju, kot asistentka pa na Fakulteti za naravoslovje in matematiko v Mariboru od leta 2003 redno sodeluje pri predmetu Didaktika matematike. Njeno delo priča tako o njeni strokovni širini kot tudi o njeni pedagoški in didaktični podkovanosti. Delovanje profesorice Veber v razredu se ne omeji le na sistematično poglabljanje znanja, temveč s spoštljivim in poštenim odnosom privzgaja vrednote in veščine, ki so nujne za celostni razvoj mladega človeka. Prepričljivo nagovarja različne profile učencev: učno šibkejše zna motivirati za delo in hkrati nadarjenim nevsiljivo omogoča razvijanje njihovega potenciala. Že 15 let predano vodi krožek iz logike, njeni dijaki pa se udeležujejo tudi tekmovanj iz matematike, razvedrilne matematike, hitrega in zanesljivega računanja ter finančne matematike, na katerih so skupaj osvojili že 35 zlatih in 93 srebrnih priznanj, od tega 9 na prvih treh mestih v državi. Njeni dijaki dosegajo nadpovprečne rezultate na maturi in uspešno nadaljujejo študij bodisi doma bodisi v tujini, ena od dijakinj pa je leta 2013 osvojila tudi medaljo na Evropski matematični olimpijadi za dekleta. Ob kvalitetnem delu v šoli že vrsto let uspešno sodeluje tudi z drugimi ustanovami: s CPI in ZRSŠ pri uvajanju Poklicne mature, z Andragoškim centrom Slovenije pri vodenju bralnih krožkov, s projektom E-um pri interaktivnih učnih gradivih, z ZRSŠ pri projektih dela z nadarjenimi in posodobitvi kurikularnega procesa, sodelovala pa je tudi pri pedagoško obarvanih raziskavah Pedagoške fakultete v Ljubljani, Pedagoškega inštituta in Fakultete za naravoslovje in matematiko v Mariboru. S svojim vsestranskim pedagoškim in strokovnim delom, bogatimi izkušnjami ter delovno etiko nagovarja tudi svoje sodelavce v šolskem kolektivu.

V imenu Komisije za društvena priznanja pripravil Boštjan Kuzman

Zasedanje Generalne skupščine IMU, Helsinki 2022

V nedeljo, 3. julija, in ponedeljek, 4. julija 2022, je v Helsinkih potekala generalna skupščina Mednarodnega matematičnega združenja (International Mathematical Union), ki poteka vsaka štiri leta. Podpisana sem se skupščine udeležila kot predstavnica Slovenskega odbora za matematiko pri DMFA Slovenije, ki je nacionalni predstavnik Slovenije v združenju IMU.

Slika 1. Skupinska fotografija udeležencev zasedanja.

Skupinskemu fotografiranju je sledil nagovor predsednika IMU Carlosa E. Keniga, ki je najprej izrazil sočutje do Ukrajincev zaradi »brutalnega, barbarskega in neizzvanega napada Rusije na Ukrajino« v mesecu marcu. Kmalu po napadu je IMU odpovedala načrtovani kongres v St. Petersburgu, za izvedbo generalne skupščine pa je med več ponudbami izbrala Helsinke.

Tajnik IMU dr. Helge Holden je poročal, da se je tajništvo IMU v zadnjem obdobju preselilo v Berlin, kjer je gost Weierstrassovega inštituta, vzdrževanje pa v celoti financira vlada Zvezne republike Nemčije. Ob 100. letnici ustanovitve IMU leta 2020 je bil N. Shappache naprošen, da napiše knjigo o zgodovini združenja. Knjiga z naslovom Framing Global Mathematics je prosto dostopna na spletu. IMU ima tudi novo spletno platformo IMU

News z novim urednikom in tudi kanal na YouTube, prek katerega so letos prenašali tudi podelitev nagrad IMU. Sledila so poročila raznih odborov.

Glede vsebine mednarodnega matematičnega kongresa ICM, ki poteka vsaka štiri leta, je predsednik strukturnega odbora Terence Tao poročal o novih priporočilih za sekcijska in vabljena predavanja, ki naj ne bi bila preveč specializirana, hkrati pa naj bi se vzpostavil format »specialnih« predavanj in spremenila razdelitev kongresnih sekcij, v kateri ima zgodovinska razdelitev matematike preveliko težo, zanemarjajo pa se nova, interdisciplinarna in eksperimentalna področja matematike. Razmišlja se tudi o bolj razpršenih lokacijah, ki bi olajšale dostop do kongresa mlajšim udeležencem in omogočile večji medgeneracijski stik.

Predsednik programskega odbora Martin Hairer je poročal, da je odbor, katerega naloga je izbor plenarnih in vabljenih predavateljev na Svetovnem matematičnem kongresu (ICM), izbral predavatelje iz 28 držav. Med njimi je 26 odstotkov žensk, kar je dvakrat več kot doslej. Za izvedbo naslednjega kongresa ICM 2026 je bilo izbrano mesto Philadelphia (ZDA). Kongres bo potekal v času od 20. do 29. julija 2026, ocena stroškov je 9 milijonov dolarjev. Generalna skupščina bo od 19. do 20. julija v New Yorku. Vodja programskega odbora kongresa ICM 2026 je Claire Voisin, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche.

Na volitvah je bil za novega predsednika IMU z mandatom 2023–2026 izvoljen Hiraku Nakajima, za podpredsednici Ulrike Tillmann in Tatiana Toro, za tajnika pa je bil izvoljen Christoph Sorger. Novi člani izvršnega odbora so še Mouhamed Mustafa Fall, Nalini Joshi (dosedanja podpredsednica), JongHae Keum, Paolo Piccione, Guenther Ziegler in Tamar Ziegler.

Izvoljeni so bili tudi nekateri predsedniki in člani različnih odborov IMU. Odbor CDC (Odbor za države v razvoju) bodo vodili predsednica Andrea Solotar, tajnik za projekte Jose Balmaceda in tajnik za usmeritve Lodovic Rifford. Člani za celine so Mahouton Norbert Hounkonnou (Afrika), Le Tuan Hoa (Azija), Mariel Saez (Latinska Amerika). Odbor za zgodovino matematike ima nova člana Guillerma Curbero in Isobel Falconer.

Ukrajinski predstavnik je prosil za oprostitev plačila članarine za čas vojne, vendar bodo Nemčija, Gruzija in Združeno kraljestvo pokrili članarino za Ukrajino, za kar so poželi dolg aplavz. Na predlog ameriške predstavnice Susan Friedlander je bila sprejeta resolucija o podpori IMU Ukrajini in ukrajinskim matematikom. Na predlog omanske predstavnice Magde Talib Al Hinai je vodstvo IMU ustanovilo sklad za nujne primere, ki se financira s prostovoljnimi prispevki. O prejemnikih odloča izvršni odbor.

Sledila so poročila pridruženih članic IMU (AMU, EMS, MSofA, SAMS), komisij in odborov IMU (ICMI, ICHM, CEIC, CWM). Christiane Rousseau je poročala o Mednarodnem dnevu matematike. Prijatelji IMU (Friends of IMU) so v štirih letih donirali IMU okoli 600 tisoč dolarjev za podporo projektov in Chernovo nagrado. Posebej podpirajo CDC, CWM, digitalno knjižnico. Svoje poročilo je prispeval tudi odbor ICIAM.

V torek, 5. julija, je potekala slavnostna podelitev nagrad IMU na Univerzi Aalto. Po nagovorih predsednika države Finske Saula Niinstoja in predsednika IMU C. E. Keniga je sledila predstavitev nagrajencev.

Fieldsove medalje so prejeli Hugo Duminil-Copin, za rešitev dlje časa odprtih problemov v verjetnostni teoriji faznih prehodov v statistični fiziki, posebej v dimenzijah tri in štiri, June Huh, za povezavo med Hodgevo teorijo in kombinatoriko, dokaz treh pomembnih domnev (Dowling-Wilsonove, Heron-Rota-Welsheve, krepke Masonove domneve) in razvoj teorije Lorentzovih polinomov, James Maynard, za prispevek k analitični teoriji števil, ki so vodili k bistvenemu napredku v razumevanju strukture praštevil in prispevek k diofantski aproksimaciji, Maryna Viazovska, za dokaz, da mreža E8 omogoča razporeditev sfer z največjo gostoto v 8 dimenzijah in nadaljnje prispevke k s tem povezanim ekstremalnim in interpolacijskim problemom v Fourierovi analizi.

Medaljo Abacus za matematične aspekte informatike je prejel Mark Braverman, za teorijo informacijske kompleksnosti in razvoj komunikacijskih protokolov, odpornih na šum. Chernovo medaljo za življenjsko delo je prejel Barry Mazur za delo na področju topologije, aritmetične geometrije, teorije vozlov, teorije števil in njegovo velikodušnost pri vzgoji naslednje generacije matematikov. Nagrado Carla Friedricha Gaussa za dosežke, ki imajo vpliv izven matematike, je prejel Elliot Lieb za svoje delo v kvantni mehaniki, statistični mehaniki, računski kemiji in kvantni informacijski teoriji. Nagrado Leelavati za popularizacijo matematike je prejel Nikolaj Andreev, za animacijo v matematiki in konstrukcijo maket, ki ponazarjajo matematične koncepte.

Tradicionalni kongres ICM 2022 je nato od 6. do 15. 7. 2022 v celoti potekal v spletni obliki. Predavanja so na voljo na YouTube kanalu IMU.

Jasna Prezelj

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2023
Letnik 70, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Odbita svetloba je lahko polarizirana. Slika na naslovnici kaže pročelje fizikalne stavbe Fakultete za matematiko in fiziko fotografirano brez polarizatorja (levo) in s polarizatorjem, ki prepušča svetlobo polarizirano v navpični ali vodoravni smeri (sredina in desno). Primerjajte razlike v količini prepuščene svetlobe, najbolj se te opazijo na spodnjem oknu. Sonce se nahaja desno, zadaj in nad kamero. Foto: Aleš Mohorič