IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2020
Letnik 67
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 67 • ŠT. 1 • STR 1-40 • JANUAR 2020

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2020, letnik 67, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2020 DMFA Slovenije – 2116 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PRIMERLJIVOST IZPITOV NA OSNOVNI IN VIŠJI RAVNI PRI PREDMETU MATEMATIKA NA SPLOŠNI MATURI[1]

JAKA ERKER[2], MATEJA FOŠNARIČ[3], ALOJZ GRAHOR[4], TATJANA LEVSTEK[5], MATEJA ŠKRLEC[6] IN JANEZ ŽEROVNIK[7]

[2]Gimnazija Šentvid,
[3]II. gimnazija Maribor, [4]Škofijska gimnazija Vipava,
[5]Gimnazija Ledina, [6]Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer,
[7]Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 97B99

Osnovna in višja raven izpita iz matematike na splošni maturi sta bili doslej obravnavani kot dva ločena izpita. V prispevku analiziramo statistične rezultate v letih od 2013 do 2018 na celotni populaciji. Pišemo o potrebi po bolj usklajenem ocenjevanju obeh ravni in o pomenu primerljivosti med različnimi izpitnimi roki in med generacijami. Opisane so osnovne ideje metode, s katero bi bilo mogoče z večjo zanesljivostjo doseči boljšo usklajenost med nivoji in med različnimi generacijami maturantov.

COMPARABILITY OF GENERAL MATURA MATHEMATICS EXAMS AT BASIC AND HIGHER LEVEL

The basic and higher level of the mathematics exam at the general matura have been so far treated as two separate examinations. In this paper, we consider the statistical results over the years from 2013 to 2018 on the entire population. We are writing about the need for a more coordinated assessment of both levels and on the importance of comparability between different exam levels and between generations. The basic ideas of a method are described that could with greater reliability allow better coordination between levels and between different generations of graduates.

Uvod

V katalogu [3] in prispevku [2] o novostih pri izpitu iz matematike na splošni maturi leta 2021 je opisana nova struktura izpita. Informacija je namenjena profesorjem in njihovim dijakom, bodočim maturantom, osnovno sporočilo pa je, da bo kljub strukturnim spremembam matematika na maturi leta 2021 vsebinsko nespremenjena. V tem prispevku je prikazan pogled na izpit iz matematike z druge strani, ki je strokovni javnosti verjetno manj znana, pa zato morda nič manj zanimiva.

Sestavek je prekratek za razpravo o vseh zanimivih vprašanjih v povezavi z maturo, ki so nedvomno vredna premisleka in razprave. Tako se na

[1]Avtorji so člani Državne predmetne komisije za splošno maturo za matematiko.

primer ne bomo ukvarjali s pretirano visoko povprečno oceno internega dela in hkrati zelo slabo korelacijo rezultatov internega dela z eksternim. Fenomen je značilen za vse predmete splošne mature [7, 8], zato bi bila potrebna sistemska sprememba na nivoju vseh predmetov splošne mature. Ker številni kolegi mislijo, da je ustni izpit iz matematike koristen, močno upamo, da bo osvežitev internega dela [2, 3] prispevala k izboljšanju stanja pri matematiki. Nadalje ne bomo posebej razpravljali o zanesljivosti dosedanjih pozitivnih ocen in še posebej kriterijev, ki so do sedaj zadoščali za t. i. pogojno pozitivno oceno. Verjamemo, da bodo dodatne kratke naloge v novi strukturi izpita prispevale k večji zanesljivosti[8] ocen.

V tem prispevku se bomo posvetili primerljivosti izpitov na višji in na osnovni ravni ter primerljivosti maturitetnih izpitov med različnimi leti. V dosedanji praksi sta izpita iz matematike na višji in osnovni ravni obravnavana kot dva izpita. Na formalni ravni jima je skupno le to, da sta oba izpita opredeljena v istem maturitetnem katalogu in da izpitne pole pripravlja ista komisija. Ker se izpita vedno pišeta ob istem času, je bil doslej v praksi praviloma prvi del izpita (pola 1) na višji ravni kar enak izpitu na osnovni ravni, samo dovoljeni čas pisanja se je nekoliko razlikoval. Raven maturitetnega izpita iz matematike kandidati izbirajo sami, zato je za njih zelo pomembno, da s primerno izbiro ravni dosežejo za svoje znanje in sposobnosti primerno in seveda čim boljšo točkovno oceno. Odločitev o izbiri za kandidate nikakor ni enostavna, pa tudi njihovi učitelji se soočajo z dilemami, kako jim svetovati. Z vidika boljšega znanja matematike je vsekakor dobro, da se za višjo raven odloča čim več maturantov, saj to pomeni, da bodo predelali več snovi, zaradi česar bodo imeli več znanja in bodo boljše pripravljeni na zahtevne študije. Za več znanja in več vloženega časa pa morajo ti kandidati praviloma dobiti vsaj toliko točk v rezultatu mature, kot bi jih dobili ob izbiri osnovne ravni. Žal so v preteklosti kandidati po izbiri višje ravni (pre)pogosto dobili občutek, da se niso odločili pravilno, in čeprav objektivni podatki tega praviloma ne potrjujejo, taka mnenja vplivajo na odločitve naslednjih generacij. Zato je smiselno oba nivoja usklajeno ocenjevati na način, ki bo z večjo zanesljivostjo zagotavljal, da bo za enako znanje kandidat dobil enako oceno ne glede na izbiro nivoja.

Zaradi analiz uspešnosti šolskega sistema, uspešnosti posamezne šole, učiteljev itd. je smiselno primerjati tudi različne generacije in različne izpitne roke. Državna predmetna komisija za splošno maturo za matematiko poskuša s skrbno pripravo izpitnih kompletov in z vsakoletnim postopkom pretvarjanja rezultatov maturitetnega izpita v ocene v čim večji meri doseči:

- primerljivost ocen, ne glede na izbiro ravni (na osnovni in na višji ravni naj kandidat za enako znanje dobi enako oceno),

[8] V psihometriji izraz *zanesljivost* označuje natančnost merjenja oziroma neodvisnost meritve od naključnih napak [6].

- primerljivost ocen med spomladanskim in jesenskim izpitnim rokom,
- primerljivost med generacijami.

Ugotavljamo, da so bili ti cilji v preteklosti v veliki meri doseženi, kljub dejstvu, da se s temi vprašanji na sistematičen način ni doslej še nihče ukvarjal resneje. Predpostavki, da so vsakokratni izpitni kompleti enakovredni in da so vsakokratne populacije maturantov enako sposobne, sta skoraj zagotovo zdržali predvsem zaradi tega, ker je vsakoletna populacija splošnih maturantov dovolj velika. K temu so bistveno prispevale predmetne komisije, ki so v preteklosti z veliko mero intuicije uspešno pripravljale primerljive izpitne komplete, pri vsakoletnih manjših korekcijah ob določanju mej pa so bili deloma upoštevani tudi rezultati starejših generacij. Pri pripravi izpitnega gradiva je treba ob primerni pokritosti snovi, ki jo definira učni načrt, upoštevati tudi predpisana razmerja taksonomskih stopenj, kot je določeno v predmetnem izpitnem katalogu. Izkaže se, da je pri pripravi karseda enakovrednih izpitnih kompletov ključno tudi razumevanje taksonomije in težavnosti izpitnih nalog.

V naslednjem razdelku je dan pregled rezultatov matur v letih 2013–2018, kjer nas predvsem zanimajo nihanja porazdelitve ocen med generacijami. Opazna so nihanja, ki niso prevelika, pa vendar je smiselno vprašanje, v kakšni meri so ta nihanja posledica razlik med generacijami, v kakšni meri pa samo posledica razlik pri merjenju z različnimi »metri«. Vemo, da enakovrednost izpitnih kompletov temelji na zanesljivosti napovedi težavnosti nalog, saj je zaradi izpitne tajnosti empirična primerjava s predtestiranjem nalog nemogoča. Pri tem so zelo pomembne izkušnje na osnovi prejšnjih izpitov. Izkaže se, da je za vsako smiselno napoved težavnosti izpita pomembna tudi analiza taksonomije posameznih nalog.

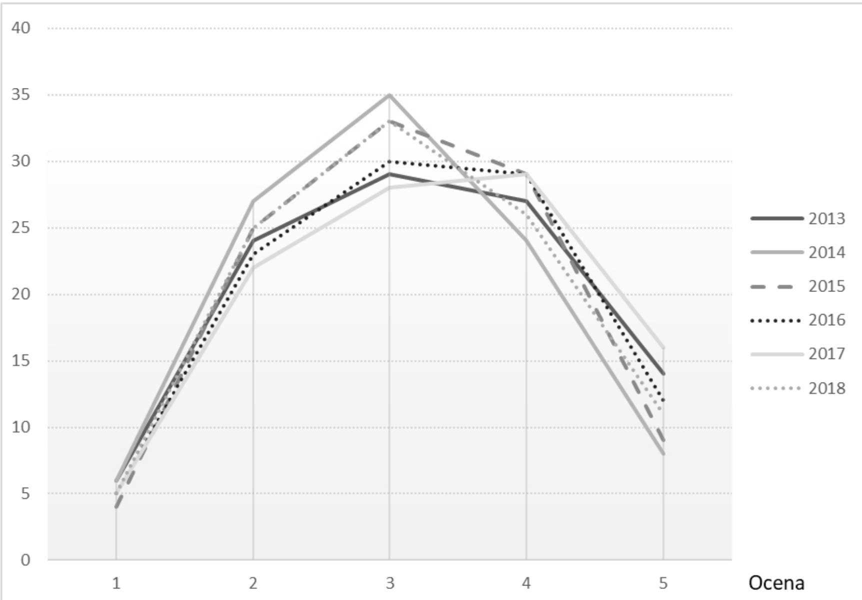
V prispevku utemeljujemo, da je smiselno v prihodnosti resno razmisliti o implementaciji metode za boljše razumevanje in kontroliranje primerjave dosežkov na osnovni in višji ravni. V razdelku Pretvorba točk v točkovne ocene opišemo osnovne ideje, na katerih bi lahko temeljila metoda, ki bi na jasen način povezovala dosežke na osnovni in višji ravni izpita. Hkrati z jasno povezavo med dosežki na osnovni in višji ravni metoda tudi na predvidljiv in pregleden način omogoča upoštevanje rezultatov prejšnjih generacij. Cilj je ohraniti in povečati zanesljivost maturitetnih rezultatov, pa tudi spodbuditi večji del maturantov, da se odločijo za višjo raven.

Osnovna in višja raven – primerjava dosežkov

Primerjava rezultatov spomladanskih rokov mature iz matematike od leta 2013 do leta 2018 nam pokaže, da se deleži populacije po ocenah (točkah) iz leta v leto rahlo spreminjajo. V nadaljevanju bomo zaradi primerjave obeh

Ocena \ Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	povprečje
1	6	6	4	5	5	5	5,2
2	24	27	25	23	22	25	24,3
3	29	35	33	30	28	33	31,3
4	27	24	29	29	29	26	27,3
5	14	8	9	12	16	11	11,7
število vseh kandidatov OR	5152	4889	4892	4698	4258	4339	

Tabela 1. Deleži kandidatov na osnovni ravni (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki na maturi v letih 2013–2018.



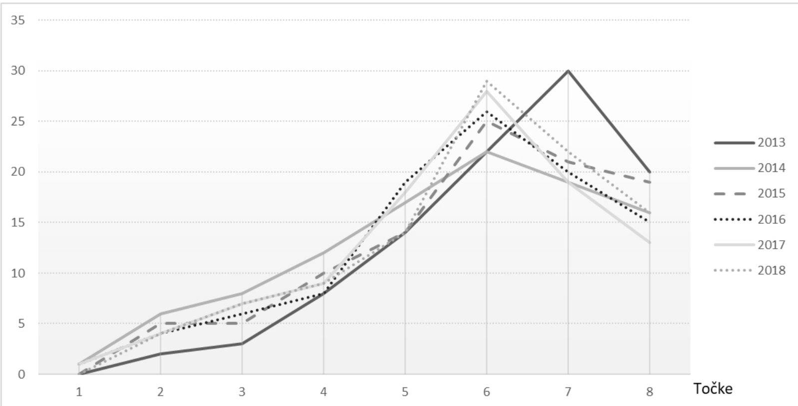
Slika 1. Deleži kandidatov na osnovni ravni (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki na maturi v letih 2013–2018.

nivojev uporabljali točkovne ocene.[9] Tabela 1 prikazuje deleže kandidatov na osnovni ravni po točkovnih ocenah v posameznih letih, tabela 2 pa deleže kandidatov na višji ravni po točkovnih ocenah v letih 2013–2018. Najmanjše

[9]Na osnovni ravni kandidati dobijo ocene od 1 do 5, na višji ravni pa ocene od 1 do 5, pa tudi točkovne ocene od 1 do 8. Točkovna ocena na osnovni ravni je kar enaka oceni. V skupnem rezultatu mature se upošteva točkovna ocena.

Točke \ Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	povprečje
1	0	1	0	1	1	0	0,5
2	2	6	5	4	4	4	4,2
3	3	8	5	6	7	7	6
4	8	12	10	8	9	9	9,3
5	14	17	14	19	18	14	16
6	22	22	25	26	28	29	25,3
7	30	19	21	20	19	22	21,8
8	20	16	19	15	13	16	16,5
število vseh kandidatov VR	1613	1522	1398	1460	1453	1261	

Tabela 2. Deleži kandidatov na višji ravni (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki na maturi v letih 2013–2018.

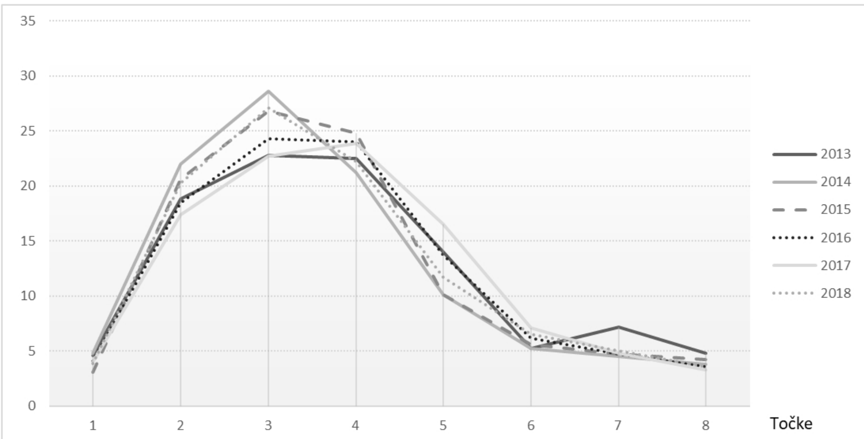


Slika 2. Deleži kandidatov na višji ravni (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki na maturi v letih 2013–2018.

odstopanje med kandidati na osnovni ravni v posameznih letih je pri točkovni oceni 1 (2 %), največje odstopanje pa pri točkovni oceni 5 (8 %), glej tabelo 1 in sliko 1. Podobno na višji ravni, kjer je najmanjše odstopanje pri točkovni oceni 1 (1 %), največje pa pri sedmih točkah (11 %) (tabela 2 in slika 2). Vsi podatki so povzeti po poročilih objavljenih na spletu [9] in veljajo za t. i. referenčno skupino SM, v kateri so redni dijaki, ki prvič v celoti opravljajo splošno maturo (brez kandidatov z maturitetnim tečajem,

Točke \ Leto	2013	2014	2015	2016	2017	2018	povprečje
1	4,6	4,8	3,1	4,1	4	3,9	4,1
2	18,8	22	20,6	18,5	17,4	20,3	19,6
3	22,8	28,6	26,8	24,3	22,7	27,1	25,4
4	22,5	21,2	24,8	24	23,9	22,2	23,1
5	14	10,1	10,1	13,7	16,5	11,7	12,6
6	5,2	5,2	5,6	6,2	7,1	6,5	5,9
7	7,2	4,5	4,7	4,7	4,8	5	5,2
8	4,8	3,8	4,2	3,6	3,3	3,6	3,9
število vseh kandidatov	6765	6411	6290	6158	5711	5600	

Tabela 3. Deleži vseh kandidatov (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki v letih 2013–2018.



Slika 3. Deleži vseh kandidatov (v %) po točkovnih ocenah pri matematiki v letih 2013–2018.

21-letnikov, odraslih in poklicnih maturantov, ki pišejo peti predmet splošne mature).

V dosedanji praksi se matura iz matematike analizira ločeno za osnovno in za višjo raven, kot da sta to dva izpita. Ker se kandidati samostojno odločajo, na kateri ravni bodo opravljali izpit, njihova odločitev pa je odvisna od različnih dejavnikov (npr. vpisni pogoji, izkušnje prejšnje generacije itd.) se delež in struktura kandidatov, ki izberejo višjo raven, z leti rahlo spreminja. Vsak kandidat ima za odločitev svoje razloge, globalno pa so te odločitve s stališča analitika naključne in predvsem nepredvidljive. Ker so vsi kandidati, ne glede na to, katero raven izpita so izbrali, maturanti splošne mature, jih je smiselno obravnavati kot dve podmnožici iste populacije. Zato lahko v nadaljevanju analiziramo dosežke kandidatov celotne populacije in jih primerjamo med seboj po letih. Tabela 3 in slika 3 prikazujeta deleže vseh kandidatov po točkah na maturi iz matematike v letih 2013–2018. Odstopanja po letih so po pričakovanju manjša, kljub temu pa lahko rečemo, da so pomembna, saj se gibljejo med 1 in 6,4 odstotne točke. To pa za celotno populacijo ni zanemarljiv delež. Manjša odstopanja je mogoče delno pojasniti s prosto izbiro ravni, ta pa je lahko pomembno odvisna npr. od spremembe vpisnih pogojev na eni od popularnih fakultet.

Spomnimo, da je matematika obvezen predmet splošne mature, zato je prosta izbira ravni opravljanja izpita utemeljena, saj bi s previsokim minimalnim standardom znanja matematike lahko postavili previsoko oviro maturantom, ki so zelo talentirani na kakem drugem področju. Kot matematiki lahko obžalujemo, da je delež kandidatov na višji ravni sorazmerno skromen (okoli 25 %), saj bi bilo smiselno pričakovati, da bodo vsaj bodoči študenti naravoslovja in tehnike opravljali izpit na višji ravni zahtevnosti. Ker fakultete tega v vpisnih pogojih ne zahtevajo, bodoči študenti zelo pogosto izberejo osnovno raven. Celo za bodoče študente matematike maturitetni izpit iz matematike na višji ravni ni obvezen. Zato je (pre)skromen delež kandidatov na višji ravni razumljiv. Maturitetna komisija s politiko pretvorbe točk v ocene, o kateri bo več povedano v nadaljevanju, namerava v prihodnosti povečati primerljivost dosežkov na obeh ravneh in s tem še bolj jasno zagotoviti premalo pogumnim kandidatom, da je smiselna prijava in priprava na višjo raven izpita, saj bo ta ob naložbi v boljše predznanje matematike ob začetku študija tudi praktično brez tveganja, da bi zaradi izbire višje ravni tvegali nižjo oceno zaradi zahtevnejšega izpita.

Pri vpisu na fakultete z omejenim vpisom pogosto hkrati kandidirajo maturanti različnih generacij. (Pre)velike razlike v porazdelitvi ocen med generacijami imajo lahko nezaželene posledice, zato jih je smiselno kontrolirati in kar se da zmanjšati nepojasnjena ali neutemeljena nihanja.

Taksonomske stopnje in težavnost izpitnih nalog

Taksonomske stopnje

Pri oblikovanju izpitnih ciljev ter izpitnih nalog in vprašanj pri splošni maturi se upošteva enotna lestvica taksonomskih stopenj, ki so opredeljene v Maturitetnem izpitnem katalogu za splošno maturo [5]:

- prva stopnja: poznavanje (poznavanje dejstev, podatkov, pojmov, definicij, teorij, formul . . .);

- druga stopnja: razumevanje in uporaba (ugotavljanje vzročno-posledičnih odnosov, iskanje zgledov, navajanje svojih lastnih primerov, reševanje problemov, prevajanje enega simboličnega zapisa v drugega ...);

- tretja stopnja: samostojno reševanje novih problemov, interpretacija in vrednotenje (izvirne rešitve v novih okoliščinah, analiza, primerjanje, posploševanje, sklepanje, sinteza, samostojno utemeljevanje ...).

Gornje opredelitve taksonomskih stopenj so splošne in jih je težko korektno in na enak način implementirati v vse maturitetne predmete. Zato uporablja komisija za matematiko dodatne in bolj natančne opisne kriterije za razvrščanje nalog in vprašanj na posamezno taksonomsko stopnjo. Deleži taksonomskih stopenj v maturitetnem izpitu so predpisani s katalogom, kar velja za vse maturitetne predmete. Kljub morebitnim upravičenim pomislekom zaradi nenatančnosti definicije taksonomskih stopenj izkušnje pokažejo, da upoštevanje taksonomskih stopenj bistveno prispeva k predvidljivosti pričakovanega rezultata izpita ali testa.

Edukometrični indeksi

V edukometričnih analizah se pojavljajo različni indeksi (glej na primer poročila [9]). Tu omenimo samo enega, ki ima intuitivno precej jasen pomen. Indeks težavnosti naloge je povprečen rezultat naloge na populaciji, torej povprečen delež doseženih točk. Po definiciji je torej izmerjena težavnost naloge odvisna od populacije, na kateri jo merimo. Zato je meritev težavnosti neke naloge sorazmerno zanesljiva, lahko bi rekli tudi ustrezna, če je izračunana kot povprečen rezultat na prvem izpitnem roku mature, ko je število kandidatov okoli 5000 (ali 1500 na višji ravni).

Ker so bile doslej praviloma naloge na poli 1 na višji ravni kar enake nalogam na osnovni ravni, je bila težavnost teh nalog izmerjena dvakrat. Seveda je bila opažena bistvena razlika, če primerjamo težavnost iste naloge na osnovni in višji ravni. Predvidevamo, da bi lahko opazili precejšnje razlike tudi, če bi isto nalogo merili na spomladanskem in na jesenskem izpitnem roku, saj vemo, da je struktura kandidatov jeseni precej drugačna kot na prvem roku.

Če premislimo malo širše, bi lahko definirali relativno težavnost glede na siceršnje sposobnosti populacije, na kateri merimo težavnost naloge. Takšna definicija je naravno prisotna, če uporabimo teorijo odgovora na postavko, kjer je težavnost funkcija, ki pove verjetnost pravilnega odgovora za kandidata z dano sposobnostjo.

Težavnost in taksonomija

Praviloma so naloge nižjih taksonomskih stopenj lažje, imajo torej višjo vrednost indeksa težavnosti.[10] Pri merjenju težavnosti se izkaže, da je za rezultat izredno pomembno tudi to, ali kandidati nalogo ali tip naloge pričakujejo. Tako je bilo v preteklosti kar nekaj primerov, ko se je naloga izkazala za zelo slabo reševano, čeprav po taksonomiji ne bi bila uvrščena visoko, ali pa objektivno gledano ni pretirano zahtevna. Naloga višje taksonomske stopnje postane lažja, če so kandidati podobno nalogo že videli, na primer v kaki zbirki nalog. Presenečenje je lahko tudi naloga, ki je sicer povsem običajna, a je na maturitetnih izpitih (dolgo) ni bilo. Primer iz ene od matur v bližnji preteklosti je presenetljivo slabo reševana naloga s tremi povsem standardnimi limitami, skoraj zanesljivo zaradi tega, ker je večino kandidatov presenetila.

Pretvorba točk v točkovne ocene

Ugotavljanje taksonomije nalog in predvidevanje indeksa težavnosti sta orodji, s katerima predmetne komisije poskusijo v čim večji meri pripraviti več enakovrednih izpitnih kompletov. Postopek je v veliki, ali bolje rečeno, v preveliki meri odvisen od znanja in intuicije članov predmetne komisije, zato je koristno razmišljati o metodi, ki bi dala dodatna zagotovila, da ne bo prevelikih nepredvidenih razlik. Tu najprej opišemo sedanji postopek pretvorbe rezultatov v točkovne ocene.

Potem ko so vsi kandidati ob istem času pisali maturo in so zunanji ocenjevalci v skladu s potrjenim moderiranim točkovnikom ocenili izdelke anonimnih kandidatov, pridejo rezultati nazaj k predmetni komisiji, ki pripravi predlog pretvorbe točk v točkovne ocene (in ocene). Osnova so vnaprej predvidene meje med ocenami, ki temeljijo na oceni težavnosti izpitnih nalog, kar je vsebinski kriterij. Po primerjavi dejanskih rezultatov s pričakovanimi in po primerjavi porazdelitve ocen s preteklimi leti se komisija lahko odloči za manjše popravke mej. Spremembe mej so pogosto utemeljene vsebinsko, ko analiza uspeha po posameznih nalogah pokaže, da je bila neka konkretna naloga nepričakovano reševana slabše od pričakovanj ali da je rezultat pri nekaterih nalogah nad pričakovanji. Bistveno težje je v izpitnem kompletu (pred letom 2021) utemeljiti razmerje med mejami med ocenami na osnovni in višji ravni, saj je težavnost pole 2 na višji ravni še težje napovedati, predvsem zato, ker kandidati ob dveh obveznih nalogah izbirajo še eno med dvema izbirnima nalogama. Precejšnja nihanja v porazdelitvi ocen na višji ravni (slika 2) so bila zato pri dosedanjem načinu pretvorbe točk v ocene neizbežna.

[10] Bolj ustrezno bi bilo ta indeks poimenovati »indeks lahkosti«.

V nadaljevanju opišemo osnovno idejo, na kateri bi lahko temeljilo pretvarjanje točk v ocene v prihodnosti.[11] Metoda temelji na kombinaciji klasične teorije in teorije odgovora na postavko (glej npr. [1, 4, 6]). Iz strukture izpita [2] lahko izpitni komplet razumemo kot kombinacijo treh postavk ali treh klasičnih testov (test A sestavljajo naloge sklopa A, podobno za B in C). Vsakega od treh testov lahko v duhu teorije odgovora na postavko razumemo kot eno obsežno nalogo.[12]

Zelo na kratko in brez podrobnosti (več o tem na drugem mestu) je ideja usklajene pretvorbe točk v ocene za obe ravni naslednja. Ob privzetku, da je celotna populacija na spomladanskem roku običajna,[13] lahko iz rezultatov dobimo težavnost sklopa B. Sklop B pišejo vsi kandidati, zato je število kandidatov dovolj veliko in zanesljivost ocene težavnosti sklopa B ni vprašljiva. Na osnovi rezultatov na sklopu B lahko dobimo oceno sposobnosti obeh skupin kandidatov, ki so pisali osnovno in višjo raven izpita. Iz znane (tako izračunane) sposobnosti skupine lahko v naslednjem koraku dobimo težavnosti testov A in C. In nazadnje, potem ko smo na opisani način dobili težavnosti testov A, B in C (predvsem je pomembno, da imamo zanesljivo oceno razmerja med težavnostmi A in C), lahko utemeljeno postavimo meje za ocene v obeh primerih. Tako bi na primer lahko dobili, da je meja za točkovno oceno 4 na osnovni ravni enaka 75 %, na višji ravni pa 64 %. Nadalje samo povejmo, da je mogoče pokazati, da obstaja neko (izračunljivo) število točk m na sklopu B, tako da je verjetnost, da bo naključno izbrani kandidat, ki je na sklopu B dosegel m točk, z enako verjetnostjo dosegel vsaj 75 % v primeru, da je izbral osnovno raven, ali vsaj 64 % v primeru, da je izbral višjo raven. Ker so dosežene točke na maturi cela števila, lahko na splošno pride do napake zaradi zaokrožanja in so omenjene verjetnosti le približno enake.

Tako dosežemo utemeljeno primerljivost med točkovnimi ocenami na osnovni in višji ravni. Na (še večjo kot doslej) stabilnost porazdelitve med generacijami lahko vplivamo tako, da predpostavimo, da so zaporedne generacije povsem (ali skoraj) enako sposobne, na osnovi te hipotetične porazdelitve pa določimo težavnost sklopa B. Kot že omenjeno, to predpostavko maturitetne komisije pri vseh predmetih uporabljajo za osnovo že do sedaj, s tem da je bila pri izpitu iz matematike narejena ločeno za osnovno in višjo raven.

Pred zaključkom povejmo nekaj več o posledicah, torej o tem, kaj, ob

[11] Metodo bi lahko uporabili tudi na dosedanjih maturah. Iz neznanih razlogov se s tem doslej kot kaže ni še nihče resno ukvarjal. Vprašanje je zaradi strukture izpita pomembno samo (ali predvsem) za matematiko, implementacija alternativne metode pa presega pooblastila predmetne komisije, zato je v tej opombi uporabljen pogojnik.

[12] Popolna uporaba teorije odgovora na postavko bi za postavke vzela posamezne naloge ali celo posamezne dele nalog.

[13] S tem mislimo, da je generacija po sposobnostih zanemarljivo drugačna od generacije pred njo.

upoštevanju prej povedanega, lahko svetujemo kandidatom, ki se bodo odločali o izbiri med osnovno in višjo ravnjo izpita. Za lažje razumevanje najprej kandidate v grobem razdelimo v tri skupine glede na dosežen uspeh na gimnaziji:

1. kandidati z ocenami 5 in 4,
2. kandidati z oceno med 3 in 4,
3. kandidati z oceno 2.

Za večino, predvsem pa za povprečne kandidate druge skupine, bo pričakovana ocena enaka, ne glede na to, ali izberejo izpit na osnovni ali višji ravni. To z drugimi besedami pomeni, da se je za raven smiselno odločiti na osnovi tega, kaj nameravajo študirati in koliko energije so pripravljeni vložiti v resno pripravo na maturo. Za kandidate tretje skupine je zelo priporočljivo, da izberejo osnovno raven, ker menimo, da jim verjetno na sklopu C ne bo uspelo pokazati svojega znanja. Za kandidate prve skupine je seveda smiselno izbrati višjo raven, saj imajo tam priložnost zasluženo dobiti višje točkovne ocene. Seveda pa morajo za to ponoviti ali se naučiti nekaj dodatne in zahtevnejše snovi, ki je v učnem načrtu opredeljena kot posebna znanja.

LITERATURA

[1] D. Andrich, *Rasch models for measurement*, Sage publications, Newbury Park, 1988.

[2] I. Banič, J. Erker, M. Fošnarič, A. Grahor, T. Levstek, M. Škrlec in J. Žerovnik, *Novosti na splošni maturi 2021 pri predmetu matematika*, Obzornik mat. fiz. **66** (2019), 161–171.

[3] I. Banič, J. Erker, M. Fošnarič, A. Grahor, T. Levstek, M. Škrlec in J. Žerovnik, *Predmetni izpitni katalog za splošno maturo – matematika*, Državni izpitni center, Ljubljana, 2019; dostopno na `www.ric.si/mma/M-MAT-2021/2019082714564660/`, ogled 17. 9. 2019.

[4] V. Bucik, *Osnove psihološkega testiranja*, Filozofska fakulteta, Ljubljana, 1997.

[5] S. Černoša (ur.), *Izpitni katalog za splošno maturo*, Državni izpitni center, Ljubljana, 2017; dostopno na `www.ric.si/mma/M-MIK\%202019/2017083009162098/`, ogled 28. 11. 2019.

[6] G. Sočan, *Ocenjevanje zanesljivosti maturitetnih izpitov*, Psihološka obzorja **9** (2000), 79–90.

[7] B. Zmazek, D. Zupanc in R. Zorec, *Višja zahtevnost vstopnega znanja za boljšo kakovost univerzitetnih študentov in diplomantov*, v: *Od minimalnih standardov k odličnosti : zbornik razprav o kakovosti v visokem šolstvu in letno poročilo 2018*, (ur. T. Horvat), NAKVIS, Ljubljana, 2019; dostopno na `www.nakvis.si/wp-content/uploads/2019/05/Nakvis-brosura-interactive-pages.pdf`, ogled 28. 11. 2019.

[8] D. Zupanc, G. Cankar, M. Bren, *Interno ocenjevanje pri slovenski maturi : velike razlike med šolami*, Šolsko polje: revija za teorijo in raziskave vzgoje in izobraževanja **23** (2010), 113–137.

[9] *Poročila DPK SM za matematiko*, dostopno na `www.ric.si/splosna_matura/predmeti/matematika/`, ogled 1. 8. 2019.

PADANJE KAPLJIC, IZLOČENIH IZ DIHAL

GREGOR SKOK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ključne besede: epidemija, padanje kapljic, dihala

Dandanes, ko po svetu razsaja virus SARS-CoV-2, ki se med ljudmi najverjetneje najbolj prenaša kapljično, je zelo aktualno vprašanje, koliko časa v zraku ostanejo potencialno patogene kapljice, ki jih iz telesa izločimo iz dihal ob kihanju, kašljanju, govorjenju ali dihanju. Ob določenih poenostavitvah o kemični sestavi kapljic in nekaterih drugih predpostavkah je možno izračunati, koliko časa bi potrebovala kapljica, da pade na tla iz neke začetne višine. Rezultati kažejo, da večje kapljice (npr. tiste z radijem večjim od 50 μm) padejo iz višine dveh metrov na tla v nekaj sekundah, medtem ko bi lahko manjše kapljice (npr. tiste z radijem manjšim od 5 μm) padale do tal tudi več ur – seveda v ne preveč suhem zraku, ko se ne bi povsem osušile.

FALLING OF RESPIRATORY DROPLETS

Nowadays, with the pandemic caused by the SARS-CoV-2 virus, which is most likely transmitted between humans by respiratory droplets emitted by coughing and sneezing, the question of how long these droplets stay airborne is relevant. With the simplification of the chemical composition of the droplets and assuming stationary air, it is possible to calculate how long it would take for a droplet to fall to the ground from some initial height. The results show that larger droplets (e.g., those with a radius greater than 50 μm) fall from a height of two meters to the ground in a matter of seconds, while smaller droplets (e.g., those with a radius less than 5 μm) can remain airborne for several hours – assuming that the droplets don't completely dry out.

Uvod

Dandanes, ko po svetu razsaja virus SARS-CoV-2, ki se med ljudmi najverjetneje najbolj prenaša kapljično, je zelo aktualno vprašanje, koliko časa v zraku ostanejo potencialno patogene kapljice, ki jih iz telesa izločimo iz dihal.

Ob kihanju, kašljanju, govorjenju in dihanju se iz dihal izloča večje število kapljic [4]. Na primer, ob močnem kihanju se lahko izloči več kot 40 000 kapljic [9] in če si ust in nosu med kihanjem ne pokrijemo, lahko kapljice priletijo tudi do 8 metrov daleč v horizontalni smeri [1]. Te kapljice so del turbulentnega oblaka, ki se stran od izvora premika z veliko hitrostjo (lahko tudi več kot 100 m/s, [9]). Med premikanjem lahko predvsem večje kapljice iz oblaka že izpadejo in potencialno kontaminirajo različne površine na tleh ali predmetih. Sčasoma oblak izgubi zagon in razpade, preostale kapljice v oblaku pa začnejo intenzivneje padati in izhlapevati. Tudi pri govorjenju in dihanju se lahko izloča večje število kapljic. Te iz telesa sicer ne izhajajo s tako veliko hitrostjo kot pri kihanju, vendar pa se lahko med počasnim padanjem proti tlom premikajo skupaj z okoliškim zrakom in v tem času lahko prepotujejo večjo horizontalno razdaljo. Pri tem glavno vlogo igra hitrost padanja kapljic skozi zrak, saj določa, kako hitro bo neka kapljica padla na tla, to pa je odvisno predvsem od njene velikosti. Velikost kapljic se ob izhlapevanju manjša, hitrost izhlapevanja pa je močno odvisna od temperature in vlažnosti zraka, skozi katerega padajo.

Nas predvsem zanima, koliko časa traja, da posamezna kapljica pade na tla skozi povsem mirujoč zrak ob določeni predpostavki o relativni vlažnosti. Ker je izhlapevanje kapljic, ki jih tvorijo kompleksne biološke tekočine, slabo raziskano [1], bomo v naši obravnavi kemično sestavo kapljic zelo poenostavili. Predpostavimo, da je sestava kapljic podobna slini, v kateri 99,5 % mase predstavlja voda [3], ter da preostale 0,5 % mase predstavlja NaCl, ki je v vodi raztopljen.

Ravnovesna hitrost padanja kapljic

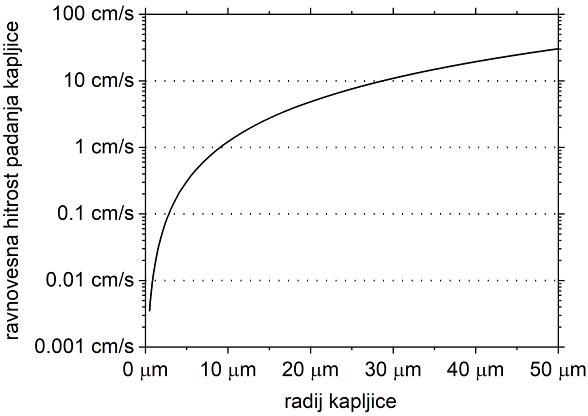
Majhna kapljica zelo hitro doseže ravnovesno hitrost padanja. Na primer, kapljica z radijem 30 μm doseže 99 % ravnovesne hitrosti v približno 0,05 sekunde, ko iz mirovanja pade za približno 4 mm [5]. Ravnovesno hitrost padanja zelo majhnih kapljic (v_{rav}) je možno preprosto izraziti ob predpostavki Stokesovega zakona upora, pri čemer ima v_{rav} približno kvadratno odvisnost od radija kapljice ([5], enačba 10-139)

$$v_{\mathrm{rav}} = Ckr^2. \tag{1}$$

V enačbi je r radij kapljice, k pa konstanta, odvisna od težnega pospeška, gostote vode in zraka ter dinamične viskoznosti zraka. C je korekcijski faktor, ki je pomembno različen od 1 le za zelo majne kapljice z radijem manjšim od 5 μm. Velja pol-empirična zveza $C = 1 + 1{,}26 \cdot \lambda_a/r$, kjer je λ_a povprečna prosta pot molekul v zraku. Pri temperaturi 20 °C in zračnem tlaku 1 bar približno velja $k \approx 1{,}2 \cdot 10^8\ \mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$ in $\lambda_a \approx 6{,}6 \cdot 10^{-8}$ m [2]. Predpostavka o Stokesovem uporu in s tem enačba (1) dobro veljata za kapljice z radijem 0,5 $\mu\mathrm{m} \lesssim r \lesssim 10\ \mu$m, vsaj približno pa še vse do $r <$ 50 μm.

Slika 1 prikazuje ravnovesno hitrost padanja kapljic v odvisnosti od radija. Za kapljico z radijem 10 μm je ravnovesna hitrost padanja približno 1,2 cm/s, torej bi takšna kapljica z višine dveh metrov na tla padla v približno 2,7 minute (seveda spet ob predpostavki, da zrak popolnoma miruje). Ker pa okoliški zrak večinoma ni nasičeno vlažen, začne voda iz kapljice izhlapevati in se kapljica manjša. Zato se njeno padanje upočasni in potrebuje več časa, da pade na tla. Na primer, za kapljico z radijem 2 μm je v_{rav}

približno 0,5 mm/s, kar pomeni, da bi za padec globok dva metra potrebovala precej več časa kot kapljica z radijem 10 μm (približno 1,1 ure). Spet drugače velja za še večjo kapljico z radijem 50 μm – za njo je v_{rav} približno 30 cm/s, kar je dosti več kot za kapljico z radijem 10 μm. Takšna kapljica bi za dvometrski padec potrebovala le dobrih 6 sekund, kar je premalo, da bi se njena velikost v tem času bistveno zmanjšala, in zato takšna kapljica hitro pade na tla.



Slika 1. Ravnovesna hitrost padanja kapljic v mirujočem zraku (v_{rav}) izračunana po enačbi (1) pri temperaturi 20 °C in zračnem tlaku 1 bar.

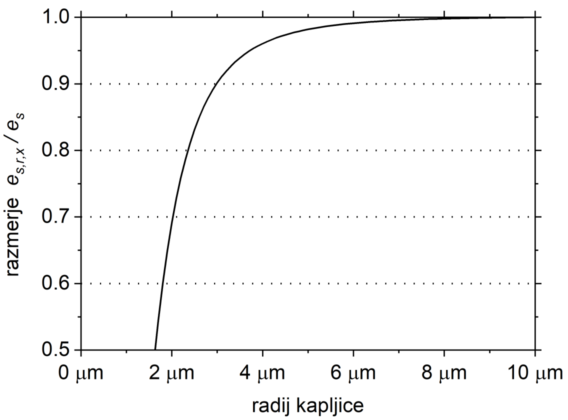
Vpliv topljenca in ukrivljenosti na nasičeni parni tlak ob kapljici

Hitrost izhlapevanja vode iz kapljice je močno odvisna od vrednosti nasičenega parnega tlaka tik nad površino kapljice. Razmerje med nasičenim parnim tlakom nad površino kapljice, v kateri je raztopljena določena masa x topljenca ($e_{s,r,x}$), ter nasičenim parnim tlakom nad ravno površino vode, v kateri ni topljenca (e_s), opisuje Köhlerjeva enačba ([5], enačba 6-27):

$$\ln\left(\frac{e_{s,r,x}}{e_s}\right) = \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3}. \tag{2}$$

Člen $\frac{A}{r}$ s konstanto A, ki je sorazmerna z vrednostjo površinske napetosti vode, opisuje vpliv ukrivljenosti površine kapljice – ta ima učinek, da nad površino kapljice poveča nasičeni parni tlak (čim manjša bo kapljica, tem bolj bo ukrivljena njena površina in tem večji bo člen A/r). Člen $\frac{B}{r^3}$ z $B(x)$, ki je sorazmeren masi topljenca, pa opisuje vpliv topljenca – ta ima učinek, da nad površino kapljice zniža nasičeni parni tlak. Pri majhnih kapljicah, zaradi kubične odvisnosti od radija, prevlada učinek topljenca in posledično je nasičeni parni tlak nad majhno kapljico praviloma nižji od tistega nad ravno površino vode, v kateri ni topljenca.

Kapljica z radijem 10 μm ima maso približno $4{,}2 \cdot 10^{-12}$ kg, kar (ob predpostavki, da 0,5 % mase kapljice tvori NaCl) pomeni, da bi bila masa raztopljenega NaCl približno $2{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg. Ob predpostavki, da je temperatura 20 °C in da je v vodi raztopljenega $2{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg NaCl, dobimo za $A \approx 3{,}2 \cdot 10^{-8}$ m in za $B \approx 3{,}1 \cdot 10^{-18}$ m^3 ([5], enačba 6-28).



Slika 2. Razmerje med nasičenim parnim tlakom $e_{s,r,x}$ nad ukrivljeno kapljico s topljencem in nasičenim parnim tlakom e_s nad ravno čisto vodo v odvisnosti od radija kapljice. Vrednosti so izračunane iz enačbe (2) ob predpostavkah, da je temperatura 20 °C in da je v vodi raztopljenega $2{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg NaCl.

Odvisnost razmerja $e_{s,r,x}/e_s$ v odvisnosti od radija kapljice je prikazana na sliki 2. Praviloma velja, da je nad površino manjše kapljice nasičeni parni tlak manjši in da vrednost z vse večjim radijem narašča proti vrednosti, ki je nad ravno vodno površino. Na primer, pri radiju 3 μm je nasičeni parni tlak nad površino kapljice enak približno 90 % vrednosti nasičenega parnega tlaka nad ravno površino vode. To je predvsem posledica raztopljenega NaCl, ki nad površino kapljice zniža nasičeni parni tlak, ter tega, da je koncentracija enake količine NaCl v večji kapljici manjša. Ob izhlapevanju se seveda koncentracija NaCl v kapljici povečuje.

Dodatno komplikacijo predstavlja dejstvo, da koncentracija raztopljenega NaCl v vodi ne more biti poljubno velika. Koncentracija NaCl je praviloma nasičena, ko parni tlak nad kapljico doseže približno 75 odstotkov vrednosti nasičenega parnega tlaka nad ravno čisto vodo (tako imenovana točka delikvescence, [5]). Če je relativna vlažnost nižja od 75 %, se kapljica sicer lahko povsem osuši (v tem primeru bo ostal le trdni delec NaCl) – vendar to ni nujno. Eksperimenti kažejo, da lahko tekoče kapljice, ki vsebujejo NaCl, obstajajo vse do vlažnosti 45 % (tako imenovana točka efflorescence, [10]).

Trdni delec NaCl, ki nastane, če se kapljica popolnoma osuši, nima nujno povsem sferične oblike, precej pa se spremeni tudi gostota delca (gostota kristalizirane NaCl je približno dvakratnik gostote tekoče vode). Zato se bomo pri nadaljnji obravnavi omejili na primere, kjer je relativna vlažnost vsaj 50 %, pri čemer bomo predpostavili, da se kapljice ne osušijo povsem.

Hitrost manjšanja kapljice ob izhlapevanju

Ob predpostavki, da okoliški zrak ni nasičeno vlažen, voda iz kapljice izhlapeva in kapljica se manjša. Pričakovali bi, da bo čez nekaj časa dosegla ravnovesno velikost glede na vlažnost v okolici (npr. za relativno vlažnost 90 % je pri $2{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg NaCl to radij 3 μm) – seveda, če kapljica ne bo že prej padla na tla.

Hitrost izhlapevanja kapljice je odvisna od hitrosti prenosa vodne pare stran od kapljice, ki skozi miren zrak poteka le z molekularno difuzijo. Hitrost spremembe mase sferične kapljice ob izhlapevanju oziroma kondenzaciji lahko izrazimo z izrazom (enačba 7-7 v [6])

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r D_v(\rho_v - \rho_{vr}), \tag{3}$$

kjer je m masa kapljice, D_v konstanta difuzivnosti vodne pare skozi zrak (pri temperaturi ledišča in standardnem tlaku 1013 hPa je vrednost D_v približno 0,2 cm^2/s), ρ_v gostota vodne pare v okoliškem zraku, ρ_{vr} pa gostota vodne pare tik nad površino kapljice. Enačba (3) je omenjena tudi v članku, ki se ukvarja z zmrzovanjem podhlajenih kapljic, saj izhlapevanje pomembno vpliva tudi na odvod toplote v okolico [8].

Za izhlapevanje je pomembno, da je gostota vodne pare tik ob kapljici večja od tiste v okolici – v tem primeru je $dm/dt < 0$ in kapljica se manjša. Za gostoto vodne pare tik ob površini kapljice lahko privzamemo kar nasičeno vrednost – pri tem pa je treba upoštevati, da imata kapljica in zrak tik ob kapljici nekoliko nižjo temperaturo od okolice, saj se za izhlapevanje vode porablja toplota (pri kondenzaciji je ravno obratno).

Iz enačbe (3) je možno v nekaj korakih priti do izraza za hitrost spremembe velikosti kapljice

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{r}\left(S - \frac{e_{s,r,x}}{e_s}\right), \tag{4}$$

Ta izraz je enak enačbi 7.18 v [6], le da je v števcu namesto člena $1 + A/r - B/r^3$ zapisan kar bolj splošen izraz $e_{s,r,x}/e_s$, koeficienta F_k in F_d pa sta združena v koeficient $\xi = 1/(F_k + F_d)$. S je relativna vlažnost zraka v okolici (razmerje med parnim tlakom v zraku in nasičenim parnim tlakom nad čisto ravno vodo). ξ je odvisna le od temperature in zračnega tlaka – vrednosti lahko preberemo iz slike 7.1 v [6]. Pri temperaturi 20 °C in zračnem tlaku 1 bar približno velja $\xi \approx 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ m^2/s.

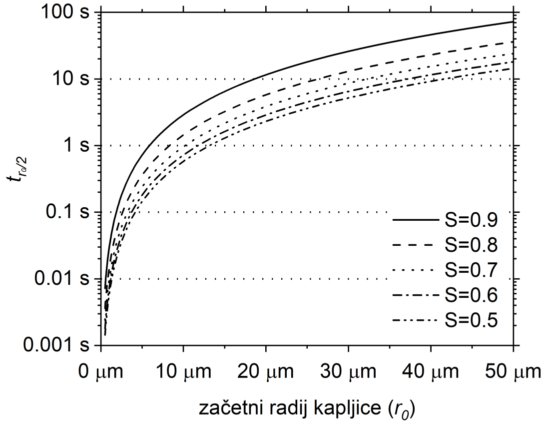
Enačbi (3) in (4) veljata le v primeru, da kapljica glede na zrak povsem miruje – če se kapljica glede na zrak premika, je treba upoštevati tudi konvekcijski prenos vlage in toplote. Tega lahko poenostavljeno upoštevamo s tem, da desne strani enačb (3) in (4) pomnožimo s t. i. ventilacijskim faktorjem f_v. Velja $f_v \geq 1$, saj konvekcija vedno poveča prevajanje toplote oziroma prenos vodne pare. Izkaže se, da je za kapljice z radijem manjšim od 10 μm učinek konvekcije zanemarljiv ($f_v \approx 1$). Za večje kapljice pa učinek ni več zanemarljiv – na primer, za kapljice z radijem 50 μm je $f_v \approx 1{,}2$ ([5], enačba 13-60). V naši obravnavi bomo učinek konvekcije zanemarili, saj se bomo omejili na velikosti kapljic do $r = 50$ μm. Sicer pri $r = 50$ μm učinek konvekcije ni več popolnoma zanemarljiv, vendar pa ta poenostavitev ni zelo velika glede na nekatere druge (npr. o kemični sestavi kapljic in o povsem mirujočem zraku).

Najprej lahko poskušamo ugotoviti, koliko časa bi bilo potrebno, da bi se kapljica zmanjšala do polovičnega radija. Enačbo (4) lahko rešimo z integracijo od začetnega radija r_0 do polovičnega radija $r_0/2$ ter od časa 0 do $t_{r_0/2}$. Če predpostavimo, da je učinek topljenca in ukrivljenosti kapljice na nasičeni parni tlak majhen (kar v primeru na sliki 2 približno velja, dokler je $r > 5$ μm), lahko predpostavimo kar $e_{s,r,x}/e_s \approx 1$. V tem primeru se enačba 4 precej poenostavi in jo lahko rešimo s preprosto integracijo

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\xi}{r}(S-1), \\ \int_{r_0}^{r_0/2} r dr &= \xi(S-1) \int_0^{t_{r_0/2}} dt, \\ t_{r_0/2} &= \frac{3r_0^2}{8\xi(1-S)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Slika 3 prikazuje odvisnost $t_{r_0/2}$ od začetnega radija in vlažnosti. Za $S = 0{,}9$ in $r_0 = 10$ μm dobimo $t_{r_0/2} = 3$ s. Torej se velikost radija zelo hitro prepolovi – padec kapljice v tem času je majhen (približno 3 cm). Če bi bila relativna vlažnost 50 %, bi bil $t_{r_0/2}$ še petkrat krajši (0,6 s). Prav tako bi bil $t_{r_0/2}$ krajši za kapljice z manjšo začetno velikostjo, saj je v izrazu kvadratna odvisnost od r_0.

Posledično lahko pričakujemo, da kapljica z začetnim radijem manjšim od 10 μm v nekaj sekundah doseže svojo ravnovesno velikost. Ker se prilagoditev velikosti hitrosti zgodi zelo hitro, lahko spust kapljice v tem času



Slika 3. Odvisnost časa $t_{r_0/2}$, ki je potreben, da se kapljica zmanjša na polovično velikost, od začetnega radija kapljice in relativne vlažnosti – enačba (5). Izračun je narejen ob predpostavkah, da je temperatura 20 °C, zračni tlak 1 bar ter da je v začetni fazi izhlapevanja učinek topljenca in ukrivljenosti na nasičen parni tlak majhen.

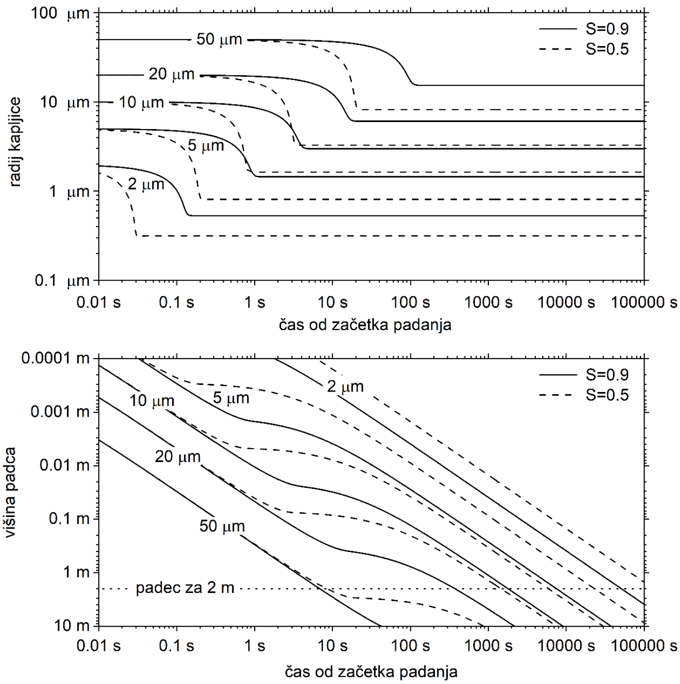
kar zanemarimo (v primerjavi z višino dveh metrov) in predpostavimo kar konstantno hitrost padanja.

Na primer, kapljica z začetnim radijem 10 μm v nekaj sekundah izhlapi do ravnovesne velikosti z radijem 3 μm (velja za $S = 0{,}9$). Za tako veliko kapljico je ravnovesna hitrost padanja približno 1,1 mm/s – torej bi za dvometrski padec na tla potrebovala približno 30 minut.

Drugače pa velja za večje kapljice. Na primer, za $r_0 = 50\ \mu$m in $S = 0{,}9$ dobimo $t_{r_0/2} = 72$ s. Ker je ravnovesna hitrost padanja kapljice z radijem 50 μm približno 30 cm/s, lahko upravičeno pričakujemo, da bo kapljica z višine 2 m v tem času že padla na tla. Hkrati tudi ne moremo več privzeti, da ves čas pada s konstantno hitrostjo, saj med padanjem hlapi, se manjša in zato pada vse počasneje, a pade na tla, preden doseže ravnovesno velikost.

Čas padca kapljice do tal

Za izračun padanja kapljice torej ne moremo vedno privzeti, da kapljica pada s konstantno hitrostjo. Za oceno padanja lahko v enačbo (4) vstavimo izraz za $e_{s,r,x}/e_s$ iz enačbe (2), ter jo kombiniramo z enačbo (1) za ravnovesno hitrost padanja, kjer v_{rav} zapišemo kot dz/dt ter izrazimo koeficient C. Tako



Slika 4. Sprememba radija (zgoraj) in padec kapljice (spodaj) v odvisnosti od časa pri relativni vlažnosti 50 % oziroma 90 %. Prikazani so izračuni za pet kapljic z različnimi začetnimi velikosti, ki so označene na slikah ($r_0 = 2\ \mu$m, 5 μm, 10 μm, 20 μm in 50 μm). Izračun je narejen z numerično integracijo enačb (6) ob predpostavkah, da zrak povsem miruje, da 0,5 % začetne mase kapljice predstavlja NaCl, preostalo pa je voda, da je temperatura 20 °C, da je zračni tlak 1 bar, da kapljica ves čas pada z ravnovesno hitrostjo padanja ter da se kapljica nikoli povsem ne osuši.

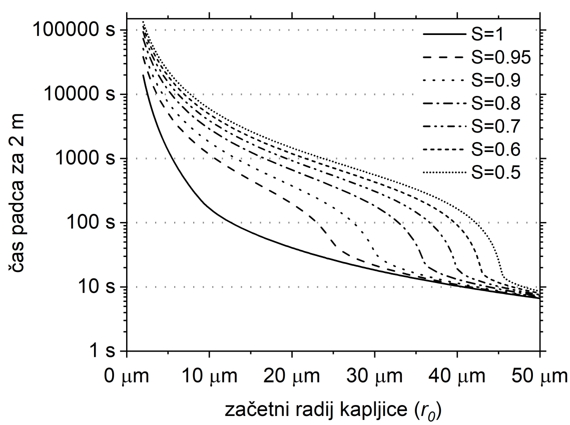
dobimo sistem dveh diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\xi}{r}\left(S - \exp\left(\frac{A}{r} - \frac{B}{r^3}\right)\right), \\ \frac{dz}{dt} &= \left(1 + 1{,}26\frac{\lambda_a}{r}\right) k r^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Ta sistem enačb lahko rešimo z numerično integracijo v času ter tako dobimo spremembo radija in višine kapljice v času. Na sliki 4 so prikazani rezultati numerične integracije za pet velikosti kapljic in dve vrednosti relativne vlažnosti. Padanje vseh kapljic poteka podobno. V prvi fazi se velikost kapljic bistveno še ne zmanjša in padanje je enakomerno. Prva faza je pri manjših kapljicah kratka (npr. za $r_0 = 5\ \mu$m je med 0,1 s in 1 s, odvisno od vlažnosti), pri večjih pa daljša (npr. za $r_0 = 50$ μm je $\gtrsim 5$ s). V drugi fazi, tam, kjer se na črtah na sliki 4 zgoraj vidi koleno, se kapljica začenja manjšati in padanje je vse počasnejše. V tretji fazi kapljica doseže ravnovesno velikost in padanje spet postane enakomerno. Do tretje faze prej pride pri manjših kapljicah kot pri velikih. Na padanje ima velik vpliv vlažnost okoliškega zraka. V bolj vlažnem zraku pride do druge in tretje faze pozneje kot v bolj suhem zraku – posledično kapljica pri večji vlažnosti pada hitreje. Tudi ravnovesna velikost kapljice bo v bolj vlažnem zraku večja, kar pomeni, da bo tudi hitrost padanja v tretji fazi večja.

Z vodoravno točkasto črto je označena tudi višina padca za 2 m – za kar privzamemo, da je začetna višina kapljice nad tlemi. Kapljica z $r_0 = 50$ μm pade na tla v približno 10 sekundah, pri čemer je še vedno v prvi fazi, saj se njena velikost v tem času ne zmanjša bistveno. Kapljica z $r_0 = 10$ μm pride do tretje faze v približno 1 do 5 sekundah. Pri takšni kapljici je tudi jasno viden velik vpliv vlažnosti na izhlapevanje in s tem na padanje – pri 90 % vlažnosti bo kapljica padla na tla v približno 30 minutah, pri 50 % pa v približno 100 minutah.

Slika 5 in tabela 1 bolj podrobno kažeta odvisnost časa, v katerem kapljica pade za 2 m, od začetne velikosti kapljice in vlažnosti. Za kapljice vseh velikosti velja, da čim bolj vlažen je zrak, tem manj bodo hlapele in zato tem prej padle na tla. Pri nekaterih kapljicah je čas padanja pri 50 % vlažnosti lahko tudi več kot 30-krat daljši kot čas pri 100 % vlažnosti (npr. za kapljico z $r_0 = 10$ μm je pri 50 % vlažnosti ta čas enak 1,7 ure, pri 100 % vlažnosti pa 2,8 minute).



Slika 5. Čas, v katerem kapljica pade na tla z višine 2 m, v odvisnosti od začetne velikosti kapljice in relativne vlažnosti. Izračun je narejen pri enakih pogojih in predpostavkah kot pri sliki 4.

S	začetni radij kapljice (r_0) 2 μm	5 μm	10 μm	20 μm	50 μm
1,00	5,5 h (0,88 μm)	22 min (3,5 μm)	2,8 min (9,9 μm)	41 s (20 μm)	6,7 s (50 μm)
0,95	11 h (0,62 μm)	1,4 h (1,8 μm)	19 min (3,7 μm)	3,3 min (7,6 μm)	6,8 s (49 μm)
0,90	14 h (0,53 μm)	2,1 h (1,4 μm)	30 min (3,0 μm)	6,2 min (6,1 μm)	6,9 s (48 μm)
0,80	20 h (0,44 μm)	3,2 h (1,2 μm)	48 min (2,4 μm)	11 min (4,8 μm)	7,2 s (46 μm)
0,70	26 h (0,38 μm)	4,3 h (1,0 μm)	1,1 h (2,0 μm)	15 min (4,1 μm)	7,5 s (44 μm)
0,60	31 h (0,34 μm)	5,3 h (0,89 μm)	1,4 h (1,8 μm)	20 min (3,6 μm)	8,0 s (41 μm)
0,50	37 h (0,31 μm)	6,4 h (0,81 μm)	1,7 h (1,6 μm)	24 min (3,3 μm)	8,5 s (37 μm)

Tabela 1. Enako kot slika 5, le da so prikazane numerične vrednosti za nekatere izbrane začetne velikosti kapljic. Vrednosti v oklepajih predstavljajo radij kapljice ob času padca na tla.

Večje kapljice večinoma hitro padejo na tla. Na primer: kapljice z radijem večjim od 40 μm padejo na tla v največ treh minutah (sicer ob predpostavki, da relativna vlažnost ni manjša od 50 %). Čas padanja manjših kapljic je lahko zelo dolg – tudi več ur – še posebej, če je zrak zelo suh (a vseeno ne toliko suh, da bi povsem izhlapele). Na primer, kapljice z radijem 5 μm pri 100 % vlažnosti potrebujejo do tal 22 minut, pri vlažnosti 50 % pa kar 6,4 ure.

Zaključki

Čas, v katerem kapljica pade na tla, je odvisen predvsem od njene začetne velikosti ter temperature in vlažnosti okoliškega zraka. Večje kapljice izpadejo v nekaj sekundah, medtem ko lahko manjše kapljice ostanejo v zraku tudi več ur – seveda ob tem delno izhlapijo. Velik vpliv na padanje ima vlažnost. Če je zrak bolj suh, majhne kapljice bolj izhlapijo in dosežejo manjšo ravnovesno velikost in zato padajo počasneje. Če pa bi bil zrak zelo suh, pa bi se lahko tudi povsem osušile in bi ostal le delec NaCl. Vpliv vlažnosti je verjetno tudi razlog, zakaj so v notranjih prostorih kapljice prisotne v zraku dlje časa pozimi kot poleti. Pozimi notranje prostore običajno ogrevamo in s tem znižamo relativno vlažnost, poleti pa prostorov ne ogrevamo in je relativna vlažnost v notranjih prostorih višja in bolj podobna tisti zunaj.

Na padanje – posredno preko nasičenega tlaka vodne pare – pomembno vpliva tudi kemična sestava kapljice. Topljenec v kapljici vpliva na nasičeni parni tlak nad površino kapljice, ter posledično na hitrost izhlapevanja in padanja kapljice. Pri naši obravnavi smo zelo poenostavljeno predpostavili, da 0,5 % začetne mase kapljice predstavlja NaCl, preostalo pa je voda. V resnici je kemična sestava kapljic, izločenih iz dihal, precej bolj zapletena. Predpostavili smo tudi, da kapljice padajo skozi zrak, ki povsem miruje. V resnici tudi v notranjih prostorih zrak skoraj nikoli povsem ne miruje. Razlike v temperaturi sten oziroma različnih površin povzročijo konvekcijske tokove – na primer, topli radiatorji, površine, ki so skozi okno obsijane s sončnim sevanjem, štedilnik med kuhanjem in ne nazadnje tudi ljudje, ki segrevamo okoliški zrak s telesom in lahko povzročimo konvekcijsko dviganje s hitrostjo več kot 0,2 m/s [7]. Premikanje zraka ima lahko tudi mehanske vzroke – na primer, ventilatorji, prepih, premikanje in dihanje ljudi, odpiranje in zapiranje vrat. Ravnovesna hitrost padanja majhnih kapljic je pogosto manjša kot hitrost premikanja zraka in posledično zrak nosi te kapljice s seboj naokrog, tudi navzgor. Tako lahko kapljice ostanejo v zraku dlje časa, kot pa če bi ta povsem miroval, zračni tokovi pa jih lahko prenašajo tudi med različnimi prostori skozi morebitne odprtine, kot so vrata, ali pa skozi centralno povezan prezračevalni sistem.

Zaradi poenostavitev o kemični sestavi kapljic, predpostavki o mirovanju zraka in privzetku, da se kapljice nikoli povsem ne osušijo (tudi ko je vlažnost manjša od 75 %), naši rezultati niso povsem kvantitativno uporabni. Vseeno pa lahko služijo za kvalitativno razlago in razumevanje procesov, ki vplivajo na padanje potencialno patogenih kapljic.

LITERATURA

[1] L. Bourouiba Turbulent, *Gas Clouds and Respiratory Pathogen Emissions: Potential Implications for Reducing Transmission of COVID-19*, JAMA, Published online March 26, 2020. doi:10.1001/jama.2020.4756.

[2] S. Jennings, *The mean free path in air*, Journal of Aerosol Science, **19** (1988), 2, 159–166.

[3] L. K. McCorry, *Essentials of Human Physiology for Pharmacy*, CRC Press, 2005.

[4] L. J. G. R. Morawska, G. R. Johnson, Z. D. Ristovski, M. Hargreaves, K. Mengersen, S. Corbett, C. Yu Hang Chao, Y. Li in D. Katoshevski, *Size Distribution and Sites of Origin of Droplets Expelled from the Human Respiratory Tract During Expiratory Activities*, Journal of Aerosol Science **40** (2009), 3, 256–69.

[5] H. R. Pruppacher in D. J. Klett, *Microphysics of clouds and precipitation*, 2nd Ed., Springer, xx+954 pp, 2010.

[6] R. R. Rogers in M. K. Yau, *A Short Course in Cloud Physics*, 3rd Ed., Butterworth-Heinemann, an Imprint of Elsevier, xiv+290 pp, 1989.

[7] M. Salmanzadeh, H. Zahedi, G. Ahmadi, D. R. Marr in M. Glauser, *Computational modeling of effects of thermal plume adjacent to the body on the indoor airflow and particle transport*, Journal of Aerosol Science, **53** (2012), 29–39.

[8] G. Skok in J. Rakovec, *Podhlajene vodne kapljice v ozračju*, Obzornik mat. fiz., **67** (2019), 5, 171–183.

[9] J. W. Tang, et al., *Factors involved in the aerosol transmission of infection and control of ventilation in healthcare premises*, Journal of Hospital Infection, **64** (2006), 2, 100–114.

[10] M. E. Wise, T. A. Semeniuk, R. Bruintjes, S. T. Martin, L. M. Russell in P. R. Buseck, *Hygroscopic behavior of NaCl-bearing natural aerosol particles using environmental transmission electron microscopy*, J. Geophys. Res., **112** (2007), D10224, doi:10.1029/2006JD007678.

Vabilo za predloge priznanj DMFA Slovenije za leto 2020

Spoštovane članice in člani DMFA Slovenije.

Vabimo vas k vložitvi predlogov za podelitev priznanja DMFA Slovenije za leto 2020. Priznanje lahko prejme posameznik ali posameznica za uspešno delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, posameznice oz. posamezniki ali ustanove pa tudi za uspešno sodelovanje z Društvom.

Predloge s pisnimi utemeljitvami pošljite po e-pošti na naslov `tajnik@dmfa.si` ali po običajni pošti na naslov DMFA Slovenije, Komisija za društvena priznanja, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, **do 20. septembra 2020**. Predlogi naj bodo pripravljeni v skladu z veljavnim pravilnikom, ki je objavljen na društveni spletni strani in v Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 65, št. 5.

Priznanja bodo podeljena na letošnjem Občnem zboru DMFA Slovenije, katerega termin in lokacija bosta zaradi trenutnih negotovih razmer objavljena naknadno. Predlagatelji in prejemniki priznanj bodo o odločitvi komisije obveščeni najkasneje 14 dni pred podelitvijo.

V imenu Komisije za društvena priznanja pripravil Boštjan Kuzman

Novice Evropskega matematičnega združenja (EMS)

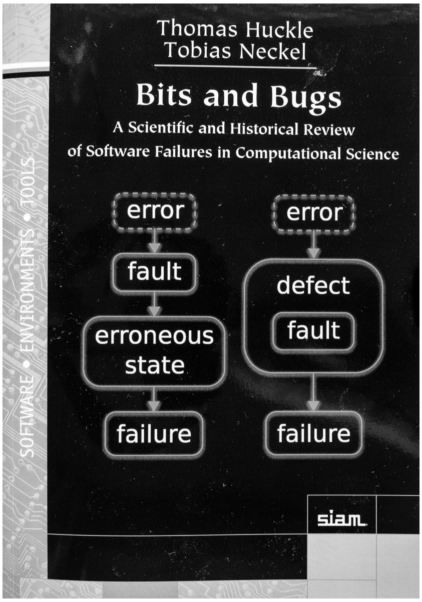
Kongres in nagrade EMS 2020. Evropsko matematično združenje (European Mathematical Society) vsaka štiri leta organizira Evropski matematični kongres in na njem podeli nagrade EMS. Letošnji kongres, ki bi moral potekati julija 2020 v Portorožu, je zaradi pandemije COVID-19 prestavljen na 20.–26. junij 2021. Ob tej odločitvi je odbor za nagrade v maju sporočil tudi imena prejemnikov nagrad. Nagrade EMS mladim matematikom (do 35 let) bodo prejeli Karim Adiprasito (Hebrew University of Jerusalem / University of Copenhagen), Ana Caraiani (Imperial College London), Alexander Efimov (Steklov, Moscow), Simion Filip (Chicago), Aleksandr Logunov (Princeton), Kaisa Matomäki (Turku), Phan Thành Nam (LMU Munich), Joaquim Serra (ETH Zurich), Jack Thorne (Cambridge) in Maryna Viazovska (EPFL, Lausanne). Nagrado Felixa Kleina za uporabo matematike v industriji prejme Arnulf Jentzen (University of Munster), nagrado Otta Neugebauerja za področje zgodovine matematike pa Karine Chemla (Univerza v Parizu in CRNS). Vsi nagrajenci bodo predvidoma predstavili svoje delo prihodnje leto na kongresu v Portorožu, že zdaj pa si lahko utemeljitve nagrad preberemo na spletni strani EMS in na spletni strani kongresa.

Zasedanje sveta EMS. Vsaki dve leti poteka tudi zasedanje Sveta EMS (Council of EMS), na katerem predstavniki individualnih in kolektivnih članov potrdijo različna poročila o delu in sprejemajo načrte za prihodnje delovanje. Letošnje zasedanje bi moralo potekati na Bledu 4. 7. 2020, a je bilo zaradi pandemije COVID-19 izvedeno preko spletne videokonference. EMS ima trenutno okoli 3000 individualnih in 110 kolektivnih članov, od tega iz Slovenije 27 individualnih in 4 kolektivne člane: DMFA, SDAMS, UL FMF in UP FAMNIT, podpisani sem se zasedanja udeležil kot predstavnik DMFA. Udeleženci smo se ob finančnem poročilu seznanili s spremembami v založniški hiši EMS, ki je bila v stari obliki ukinjena, njena dejavnost pa iz Švice prenesena na novo podjetje v lasti EMS s sedežem v Berlinu. Ob tem bodo zajetna finančna sredstva stare hiše v nekaj letih prenesena na EMS, ki jih bo kot neprofitno združenje namenil predvsem za posodobitev delovanja in izdatnejše financiranje različnih znanstvenih aktivnosti. Novičnik EMS Newsletter bo preoblikovan v sodobnejši EMS Magazine, aktualnim novicam bo namenjena posodobljena spletna stran. Izbrane znanstvene revije, ki jih izdaja EMS, z letom 2021 prehajajo v odprti dostop po modelu S20 (Subscribe to Open). Ob izteku mandata nekaterim članom Izvršnega odbora (Executive Committee) so bile pod vodstvom predsednika Volkerja Mehrmanna (DAMM) uspešno izvedene tudi volitve z anonimnim spletnim glasovanjem. Z veliko večino sta bila izvoljena novi podpredsednik Jiří Rákosník in novi tajnik Jorge Buescu (oba na predlog Izvršnega odbora EMS), za nove člane odbora pa so bili izvoljeni še Barbara Kaltenbacher (na predlog GAMM in DMV), Beatrice Pelloni (LMS), Frederic Helein (SMF, SMAI), Sussana Terracini (UMI, SIMAI) in Luis Narvaez Macarro (RSME). Žal so bili na volitvah neuspešni vsi trije kandidati iz vzhodnoevropskih držav. Prisotni so z volitvami izglasovali tudi, da bo kongres, načrtovan za leto 2024, potekal v Sevilli (Španija), ki je prejela več glasov od Lizbone (Portugalska). Če bodo razmere dovoljevale, bo EMS konec oktobra 2020 praznoval 30 let svojega obstoja z dvodnevnim znanstvenim srečanjem v Edinbourghu, naslednje srečanje predstavnikov nacionalnih združenj pa bo predvidoma v Franciji spomladi 2021. Za Slovenijo pa je posebej razveseljiva novica, da bo na predlog Izvršnega odbora naslednje zasedanje Sveta EMS leta 2022 potekalo na Bledu, kar je v imenu organizatorjev potrdila dr. Klavdija Kutnar iz UP FAMNIT.

Boštjan Kuzman

NOVE KNJIGE

Thomas Huckle in Tobias Neckel, Bits and Bugs: A Scientific and Historical Review of Software Failures in Computational Sciences, SIAM, Philadelphia 2019, 251 str.



Prvi avtor te knjige je profesor na Tehniški univerzi v Münchnu, drugi raziskovalec na isti ustanovi. Prvi avtor vzdržuje spletno stran [1], na kateri zbira poročila o programskih napakah, ki so povzročile nesreče in druge nezaželene dogodke.

Knjiga je namenjena zelo širokemu krogu ljudi, ki jih zanimajo take zgodbe: od strokovnjakov in predavateljev, ki želijo popestriti pouk, do laikov, ki bodo preskočili težje razumljive dele. Vsebuje tudi razlage nekaterih bolj tehničnih stvari. V drugem poglavju tako začne s predstavitvijo celih števil v računalniku, potem nadaljuje z zapisom realnih števil, plavajočo vejico, pretvorbo med raznimi formati zapisa in na koncu z ravnanjem v izjemnih primerih. Če recimo pride do deljenja z 0, se sistem ne sme sesuti. (Avtor te recenzije se spomni, kako so jih pred pol stoletja pri predmetu *Računski praktikum* posvarili, naj ne poskušajo deliti z 0 na dragih švedskih elektromehaničnih računskih strojih. Ko je nekdo vseeno naredil tako napako, se je težki stroj »zaciklal«, se hitro vrtel brez prestanka in po nekaj minutah se je iz njega začelo kaditi.) Dobro je, če je sistem kar se da zaščiten pred takimi nepričakovanimi stanji.

Vse to je potrebno za razlago **nesreče prve rakete Ariane 5** (let 501) leta 1996. Raketa, ki bi v orbito morala prenesti štiri satelite, je slabo minuto po izstrelitvi zavila iz smeri in eksplodirala. Škoda je znašala okrog 500 milijonov dolarjev.

Preiskavo je vodil znani francoski matematik Jacques-Louis Lions. Knjiga dobro analizira serijo napak, ki so povzročile katastrofo. Če nekoliko poenostavimo, so uporabili programe šibkejše rakete Ariane 4. Podatki inercialnega sistema o položaju in vodoravnem gibanju rakete so bili 64-bitni in nato pretvorjeni v 16-bitna cela predznačena števila. Pri tem je prišlo do prekoračitve obsega, kar je povzročilo ustavitev in nato ponovni zagon inercialnega sistema. Ponovni zagon se je začel s testnimi podatki, ki niti približno niso odražali dejanskega stanja. Interni računalnik rakete pa je to interpretiral kot trenutno stanje in ukazal močan zasuk pogonskih šob. Sile, ki so ob tem nastale, so prekinile povezavo osnovne rakete in pomožnih raket. Čeprav je bil inercialni sistem podvojen, je do iste napake prišlo v obeh sistemih in tako ta rezerva ni prav nič pomagala. Ob vsakem takem podrobno analiziranem primeru knjiga na kratko navede še vrsto podobnih.

Naslednji je na vrsti problem **prehoda v novo tisočletje**. Letnica je bila do takrat podana le z zadnjima dvema števkama. Zato je bilo treba pravočasno spremeniti številne programe in letnice podajati v celoti ali vsaj s tremi števkami. Prehod je začuda potekal brez katastrof velikega obsega. Vseeno je seznam zapletov dolg – od smešnih, ko so v Veliki Britaniji tisoče dojenčkov uvrstili med stoletnike, do tragičnih, ko so v Sheffieldu zaradi napačno izračunanega rizika za Downov sindrom izvedli dva splava. Nekaj zapletov so kot običajno povzročili slabo izvedeni programski popravki, ki naj bi odpravili problem.

Vpliv **zaokrožitvenih napak** je predstavljen z zgledom Vancouverske borze v Kanadi. Računalniški sistem je računal borzni indeks kot uteženo povprečje cene okrog 1500 delnic. Pravzaprav je seštel cene teh delnic in jih pomnožil s faktorjem w, ki je bil izbran tako, da je bila začetna vrednost enaka 1000. Po 22 mesecih je indeks padel na 524,811, torej na dobro polovico začetne vrednosti. Zdi se neverjetno, da naj bi šele takrat opazili, da je nekaj močno narobe. Knjiga tega paradoksa ne razloži. Vendar naj bi bil po Wikipediji [2] sloves te borze izredno slab (bila naj bi polna delnic ničvrednih rudnikov). Poleg tega je bil to eden izmed prvih primerov borznih indeksov in tako verjetno številni teh vrednosti tako in tako niso jemali resno.

Borza je končno poklicala zunanje strokovnjake. Tem je stvar hitro postala jasna. Računalniški program je računal na štiri decimalke in rezultate skrajšal na tri decimalke z rezanjem zadnje decimalke. Če je bila četrta decimalka 0, napake zaradi rezanja ni bilo. V povprečju pa se je rezultat zmanjšal za $\epsilon = 0{,}00045$ glede na pravo vrednost. Indeks je program posodabljal s podatki o spremembah cen delnic. Vsakič, ko se je cena neke delnice spremenila, je k staremu indeksu prištel razliko cen, pomnoženo z w, in odrezal četrto decimalko. To se je zgodilo približno 2800-krat na dan, kar je v povprečju dnevno zmanjšalo pravo vrednost za približno $2800 \times 0,00045 = 1{,}26$. Dvaindvajset mesecev je 440 delovnih dni ... Ko so novembra 1983 indeks znova izračunali »z ničelne točke«, je vrednost čez vikend poskočila s 524,811 na 1098,892.

Simulacije so pokazale, da bi bila ob normalnem zaokroževanju napaka tudi po tako dolgem času zanemarljiva, saj takrat zaokrožamo navzgor in navzdol približno enako pogosto in se napake izničijo.

Bolj zapleten je neuspeh protiraketnega sistema Patriot v Zalivski vojni leta 1991. Tu je šlo med drugim za slabo posodobitev precej starega sistema: nekateri podatki o isti spremenljivki so bili 24-bitni, drugi po novem 48-bitni.

Posledično naj bi prišlo do kopičenja zaokrožitvenih napak. Sistem je bil prvotno zamišljen za prestrezanje letal in ne raket.

Izgubo vrtalne ploščadi *Sleipner A* leta 1991 knjiga začne s kratko predstavitvijo *Metode končnih elementov*. Velikansko plavajočo ploščad iz votlih valjastih železobetonskih delov so sestavili v enem od norveških fjordov. Ko so jo začeli testno potapljati, je na stiku treh valjev popustila ena od sten. Prostor med valji je namreč načrtovano napolnila voda, ki je bila v globini pod tlakom približno 7 barov, konstrukcija pa tega (nenačrtovano) ni zdržala. Ploščad je v 18 minutah za vedno izginila v globinah in ob udarcu v dno povzročila potres tretje stopnje po Richterju. Neposredne škode je bilo za 180–250 milijonov dolarjev, posredne za 700–1000 milijonov USD. Knjiga podrobno opiše vrsto problematičnih ravnanj, ki so vodila do nesreče.

V Severnem morju je bilo že pred tem postavljenih več takih ploščadi. Gradbeno podjetje je bilo sicer isto kot pri nekaterih prejšnjih ploščadih, a noben od takratnih inženirjev ni sodeloval pri novem projektu. Morda je bil vzrok menjava lastnika: namesto inženirjev so zdaj podjetje vodili poslovneži. Varnostni faktorji za ploščadi niso tako visoki kot recimo za mostove. Struktura mora plavati, da jo lahko odvlečejo do kraja, kjer bo pritrjena na morsko dno, zato morajo biti stene dovolj tanke.

Za analizo napetosti so uporabili serijo programov. (Pri prejšnjih projektih so precej te analize opravila specializirana podjetja.) Prvi program je narisal mrežo celic za metodo končnih elementov, žal ne ravno dobro. Mreža je bila tudi groba. Za nekatera kritična mesta so uporabili kvadratno ekstrapolacijo, kar se je izkazalo kot neposrečeno. Tako so močno podcenili napetosti v kritičnih točkah. Za armaturo so zaradi varčevanja ponekod uporabili preostalo železje iz starih projektov, ki ni segalo dovolj globoko v beton. Če primerjamo sliko novega tipa ojačitve s preizkušenim iz prejšnjih projektov, je razlika velikanska in očitna vsakomur z malo mehaničnega znanja. Nesreča vsaj ni zahtevala žrtev in je prispevala k zmanjšanju takih napak. Kot pravi poročilo o nezgodi (str. 72 knjige):

> Verjetno največja lekcija iz študija tega primera je, da računalniške analize nikdar ne smemo obravnavati kot »proces v črni škatli«. Računalniška analiza je dobra le toliko, kot je dober uporabnik, ki vstavlja podatke in interpretira rezultate. Pravo modeliranje in interpretacija zahtevata resnično razumevanje teoretičnega in praktičnega delovanja programa in polno razumevanje pomena rezultatov. Zmeraj moramo uporabiti racionalne metode preverjanja rezultatov. Metode zagotavljanja kakovosti morajo zagotoviti čas za pregled takih podrobnosti.

Od leta 1978 je NASA s satelitom Nimbus med drugim spremljala koncentracijo ozona v atmosferi. Meritve niso kazale bistvenih sprememb. Leta

1985 pa je britanska odprava s tal na Antarktiki izmerila 40-odstotno zmanjšanje ozonskega plašča. Kako je bilo mogoče, da Nasini instrumenti tega niso zaznali? Izkazalo se je, da je bil satelit programiran tako, da ni upošteval podatkov, ki so bili daleč od pričakovanih vrednosti. To je večkrat uporabljana metoda v statistiki: ignoriramo rezultate, ki zelo odstopajo od povprečja ali pričakovanja. Ker je bila koncentracija ozona veliko manjša od pričakovane, tega satelit enostavno ni poročal.

Leta 1999 nemški meteorologi niso napovedali katastrofalnega neurja Lothar. Spet je bilo za to zaslužnih več faktorjev. Vremenski balon, ki so ga spustili na kanadski obali, je eksplodiral. Zato so dve uri po nesreči spustili novega. Podatke novega balona pa so Nemci vnesli s časom, kot da bi šlo za originalni balon. Očitno pa se je atmosfera v vmesnem času precej spremenila. Podatke so tudi sicer vnašali le za vsakih šest ur. Majhne spremembe v začetnih podatkih lahko hitro privedejo do velikih razlik, ker so vremenski modeli slabo pogojeni. Meteorološke službe, ki so ignorirale novi balon, so imele boljše napovedi. Danes se vremenski modeli posodabljajo v krajših časovnih intervalih.

Poglavje **Sinhronizacija in časovni načrti** podrobneje obravnava problem odpovedi prvega poleta vesoljskega plovila Columbia leta 1981. Plovilo je bilo opremljeno s petimi računalniki. Štirje so imeli naložen isti program. Če bi eden izpadel, bi preostali trije še zmeraj lahko delovali po principu večine: se pravi, če bi se vsaj dva računalnika »strinjala«, bi to bila izbrana odločitev. Peti računalnik pa je imel naložen drugačen operacijski sistem in drugačen program, ki bi lahko prevzel upravljanje, če bi se izkazalo, da je v programski opremi preostalih štirih računalnikov napaka. Teoretično je to zelo dobro premišljeno. Vendar pa je moral peti računalnik spremljati dogajanje in deloma tudi rezultate delovanja preostalih štirih računalnikov, da bi lahko takoj reagiral. Sistema sta imela različen način časovnega delovanja. Zapleteno sinhronizacijo so rahlo pokvarili naknadni ne dovolj premišljeni popravki in tako se je start ponesrečil. Teoretično večja zanesljivost je zaradi dodane kompleksnosti privedla do odpovedi sistema. Podrobnosti so verjetno razumljive predvsem strokovnjakom s tega področja. Zanimivo je, da je bila verjetnost, da pride do napake, le 1: 67, tako da tudi večkratno testiranje ne bi nujno odkrilo problema.

Profesor Thomas Nicely je junija 1994 pri raziskavah v teoriji števil seštevał inverzne vrednosti praštevil z računalnikom. Rezultati pa so bili včasih napačni. Na koncu je ugotovil, da je nekaj narobe z Intelovim procesorjem Pentium. Ta je imel vgrajen nov, hitrejši algoritem za deljenje. Obvestil je Intelovo servisno službo, ki mu je pričakovano poslala vzvišen odgovor, da s procesorjem ni nič narobe in da ga bodo poklicali. (Kasneje se je izkazalo, da je napako odkril že mesec prej Tom Kraljevic, ki je študiral na univerzi Purdue in obenem delal za Intel. Vendar je informacija ostala nekje v podjetju.) Po šestih dneh čakanja je Nicely obvestil nekaj prijateljev in prišlo je do objave na spletu. Navedeno je bilo več primerov, ko je izračun inverzne vrednosti števila dal ne prav točen rezultat. Več neodvisnih strokovnjakov je podrobneje raziskalo vzrok napak in verjetnost, da bo do njih prišlo. Res je, da so bili taki primeri zelo redki. Tako je po [3] Pentium izračunal, da je 5506153 deljeno z 294911 enako 18,66990… namesto 18,670558…

Po objavi je Nicely z Intelom sklenil dogovor o molku, ki pa je bil prepozen. Novica se je razširila in krožile so šale kot: »Kaj pomeni nalepka *Intel inside*? To je varnostno opozorilo!« ali »Intel inside = vsebuje tudi napako«. Že konec leta je Intel po takem in drugačnem izogibanju oznanil, da je pripravljen zamenjati vse defektne procesorje. Strošek: pol milijarde dolarjev. Knjiga podrobno razlaga, kje in kako je bil algoritem deljenja pomanjkljiv. To bodo laže razumeli tisti, ki imajo nekaj izkušenj na tem področju. K razumevanju lahko pripomore tudi razlaga [3].

V poglavju o **kompleksnosti** se knjiga ukvarja z nesrečami medicinske naprave Therac-25 za obsevanje tumorjev. Podjetje Atomic Energy of Canada Limited jo je sestavilo iz francoskega linearnega pospeševalnika elektronov (5-25 MeV) in druge opreme, vključno z računalnikom. Imela je dva načina delovanja: obsevanje z elektroni za površinske dele tkiva in obsevanje z rentgenskimi žarki (zavorno sevanje) za globlje predele. Operater se je včasih zatipkal in vnesel napačen način delovanja. Ko je to na hitro poskušal popraviti, je bilo videti, da je sistem zablokiral. Zato je postopek večkrat ponovil. V resnici je vsakič prišlo do nekontroliranega izredno močnega sevanja in posledično več smrti pacientov. Vse to se je dogajalo v letih od 1985 do 1987 v ZDA in Kanadi. Zgodbe so prav grozljive. Tako je eden od pacientov začutil pravi udarec v hrbet. Ker se je zavedel, da je nekaj narobe, je vstal z mize in poskušal pobegniti, pa ga je nova masivna doza zadela v roko.

Vzrok so sprva iskali v napakah stikal in druge električne opreme. Po knjigi naj bi bilo takrat zaupanje v računalniške programe izredno veliko. Šele kasneje se je izkazalo, da so bili krivi programska oprema, slabosti v dokumentaciji in navodilih za operaterje ter odsotnost varnostnih mehanizmov. Programska oprema je bila delo enega samega programerja.

Knjiga kratko omenja še veliko hujšo katastrofo v letih od 2005 do 2009. Po oceni ameriške Food and Drug Administration je pomanjkljiva programska oprema infuzijskih črpalk povzročila okrog 700 smrti in skoraj 20000 poškodb.

Naslednji podrobno obdelan primer je polomija avtomatiziranega sistema upravljanja prtljage na mednarodnem letališču v Denverju. Na javni razpis so se od 16 kontaktiranih podjetij javila le tri, ki pa se niso hotela obvezati, da prvi tak velik sistem na svetu naredijo v nekaj letih. Tako je v začetku leta 1992 delo dobilo projektantsko podjetje, ki ga je privlekla letalska družba United. To podjetje v resnici ni imelo izkušenj s sistemi, ki morajo delovati sproti. Imelo pa je izredno velikopotezne načrte in je uporabilo revolucionarne novosti na številnih področjih. Vozički za prtljago naj bi potovali z veliko hitrostjo, se polnili in praznili kar med upočasnjeno vožnjo; uporabljali naj bi prepoznavanje vozičkov s čipi RFID; dovoljena je bila prtljaga, večja od standardnih mer. Prvič naj bi sistem upravljala mreža računalnikov namesto centralnega računalnika. Po zakasnitvah so spomladi 1994 imeli veliko otvoritev, ki se je sprevrgla v popolno polomijo. Kovčki in torbe so padali s tekočih trakov, se odpirali, obleka je letela po zraku, vozički so se zaletavali … Programerji se niso zavedali, da je optimizacija takega transporta NP-zahteven problem. Iskanje optimuma je računsko prezahtevno; zadovoljiti se je treba s kolikor toliko dobrimi rešitvami, kar pa zahteva veliko preizkušanja in testiranja. Tehničnih novosti je bilo prav tako veliko preveč. Tudi inženirske rešitve so bile problematične. Tirnice transportnih linij so imele preostre zavoje, hitrosti so bile prevelike, tako da je zračni upor razmetaval prtljago. Vse skupaj so morali opustiti in škoda je bila velikanska.

Desetletje kasneje so manj zapletene podobne sisteme uresničili v Evropi. Na letališču Heathrow se je pri otvoritvi sistema za upravljanje prtljage tudi zapletlo, a so po kakem mesecu težave odpravili.

Knjiga dokazuje, da je računalništvo nekoliko različno od matematike. Ob primerih eksponentne rasti števila operacij namreč na strani 198 navaja:

n	2^n	e^n
100	$1{,}26765\ldots \times 10^{30}$	$2{,}688\ldots \times 10^{43}$
1000	$1{,}0715\ldots \times 10^{301}$	Inf

Prava vrednost spodaj desno je $1{,}970\ldots \times 10^{434}$, kar pa presega omejitve pri zapisu velikih števil v računalniku v dvojni natančnosti.

To je le nekaj primerov iz obsežne zbirke zgodb v knjigi. Kot rečeno, je veliko pripovedi zanimivih tudi za nepoznavalce in dobro napisanih. Nekatere razlage so dostopne in informativne, druge za matematika nič novega, tretje zahtevne in bolj suhoparne. Knjiga seveda opozarja, da lahko poznavalci številne razlage preskočijo.

Na koncu knjige imamo še razdelek **Urbane legende in druge zgodbe** ter nekaj programov v Matlabu, ki ilustrirajo obravnavane primere.

LITERATURA

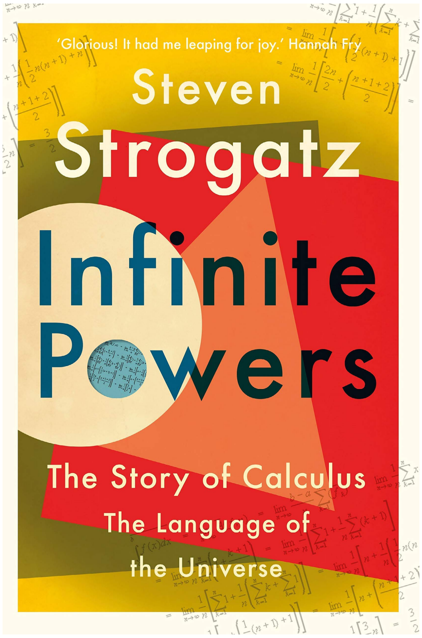
[1] T. Huckle, *Collection of Software Bugs*, dostopno na `www5.in.tum.de/persons/huckle/bugse.html`, ogled 13. 5. 2020.

[2] *Vancouver Stock Exchange*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Vancouver_Stock_Exchange`, ogled 13. 5. 2020.

[3] D. W. Deley, *The Pentium division Flaw*, 1995, dostopno na `daviddeley.com/pentbug/pentbug4.htm`, ogled 13. 5. 2020.

Peter Legiša

Steven Strogatz, Infinite Powers, The Story of Calculus, The Language of the Universe, Atlantic Books, London 2019, 360 str.



Avtor knjige je bil v letih 1989–1994 profesor na univerzi MIT, zdaj pa je profesor uporabne matematike na univerzi Cornell v New Yorku. Ima zelo impresivno bibliografijo. On in Duncan Watts sta v reviji *Nature* leta 1998 objavila članek [1] *Collective dynamics of small-world networks*, ki je bil citiran več kot 42000-krat.

Strogatz je avtor štirih knjig. Ena od njih, **The Joy of** x, je dobila leta 2014 nagrado *Euler Book Prize*, ki jo podeljuje *The Mathematical Association of America (MAA)*. Znan je tudi po poljudnih člankih v časopisu *The New York Times*, s katerimi je veliko naredil za predstavitev lepote in uporabnosti matematike v širši družbi. Snov teh zapisov je uporabil v svojih knjigah.

Knjiga **Infinite Powers** je bila leta 2019 na lestvici najbolj prodajanih knjig časopisa The New York Times. Namenjena je širšemu krogu bralcev. Pisec na ležeren, zelo poljuden, a vseeno korekten način predstavi zgodovinski razvoj in lepoto matematične analize, predvsem odvoda in integrala. Matematik ali fizik že pozna večji del snovi knjige. Vseeno jo je ta poročevalec rad prebiral, ker je zelo lepo napisana in priča o avtorjevem izredno dobrem vpogledu v snov. Marsikaj je predstavljeno na izviren način, drugače, kot smo navajeni s predavanj Analize. Poleg tega pa so, zlasti v drugem delu, navedeni zanimivi primeri uporabe matematične analize. Spremna beseda pravi, da je knjiga nastajala dve leti in da so bili uredniki zahtevni, tako da so šla številna poglavja skozi več verzij.

Delo helenističnega matematika in fizika Arhimeda predstavlja enega od vrhuncev antične znanosti. Knjiga opiše njegovo oceno števila π navzgor in navzdol in to poveže z aproksimacijo krivulj s poligoni, analogijami takih približkov v več razsežnostih in uporabo v računalniški animaciji. Znano je, da je Arhimed izračunal ploščino med parabolo in premico. Njegova matematično neoporečna pot do te formule, predstavljena recimo v dodatku h knjigi [2], pa je zahtevna in človek se vpraša, kako je sploh prišel do nje. Leta 1899 so v Samostanu svetega groba v Jeruzalemu našli rokopis iz desetega stoletja. Nabožno besedilo je bilo napisano čez delno izbrisan matematični rokopis. Izkazalo se je, da gre za Arhimedovo delo z naslovom *Metoda*. Šele takrat so matematiki izvedeli, da je formula v resnici nastala na »fizikalen« način: z razrezom odseka parabole na neskončno rezin, prestavljanjem rezin in uravnovešenjem s preprostejšim likom (trikotnikom) na primerno postavljeni gugalnici ali tehtnici. To že spominja na metode matematične analize. Vendar pa je bila ta pot za antične matematike vprašljiva, tako da je Arhimed formulo naknadno dokazal drugače. Strogatzova knjiga predstavi bistvo te »fizikalne« izpeljave. Seveda pa nekatere izračune spusti, ker tudi ti niso ravno enostavni. Na podoben, a laže razumljiv način je Arhimed prišel tudi do prostornine krogle, kot lahko preberete v članku v reviji Presek [3]. Tudi po tem, ko je Arhimed imel formulo za ploščino odseka parabole, je bil njegov neoporečen dokaz netrivialen in priča o njegovi genialnosti.

Knjiga ima zelo obsežno bibliografijo, v kateri najdemo reference za vse, kar Strogatz ni mogel ali želel razlagati na tem nivoju.

Strogatz lepo predstavi delo Galilea, Keplerja, Descartesa in Fermata.

Avtor je odličen pripovedovalec zgodb. Tako izvemo, da je Isaac Newton sestavil seznam grehov pred devetnajstim letom starosti:

»Pri trinajstih: Grozil mojemu očetu in materi Smith, da ju bom zažgal s hišo vred.«

»Pri štirinajstih: Želel smrt in upal, da doleti nekatere.«

»Pri petnajstih: Udaril mnoge.«

To je laže razumljivo, če vemo, da ga je njegova mati pri treh letih izročila v vzgojo babici. Izak je bil namreč rojen po smrti svojega očeta. Mati se je znova poročila, njen novi mož, častiti Barnaby Smith, pa ni želel dečka imeti v hiši. Tudi sicer je bila mati precej trda do Newtona. Pri desetih letih ga je, spet vdova, dala v bližnjo internatsko šolo. (Newton ni bil edini čustveni invalid, ki so ga dale te angleške vzgojne metode.) Pri šestnajstih ga je mati vzela iz šole, da bi vodil domačo kmetijo. Ker pa je kmečka opravila sovražil in posestvo slabo upravljal, ga je ponovno pustila v šolo.

Med študijem na univerzi Cambridge je nanj naredila velik vtis knjiga Johna Wallisa *Arithmetica Infinitorum*. Pozimi 1664/65 je Newton po analogiji z binomsko formulo uganil potenčno vrsto za funkcijo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Že Wallis je znal izračunati ploščine pod krivuljo $y = x^n$. Tako je Newton lahko ploščino pod krožnim lokom $y = \sqrt{1-x^2}$ na intervalu od 0 do x izrazil s potenčno vrsto. Od tod je Newton dobil idejo, kako z razvojem funkcij v potenčno vrsto dobiti ploščine pod njihovim grafom. Ko je to uporabil na hiperboli $y = 1/(1+x)$, je prišel do vrste za naravni logaritem (ki ga je Newton imenoval hiperbolični logaritem).

Knjiga pove, da so tri pomembne potenčne vrste (za sinus, kosinus in arkustangens) že nekaj stoletij prej tem odkrili v Kerali v južni Indiji. Avtor naj bi bil Madhava iz Sangamagrame, ki je živel približno v letih 1340–1425. Vendar pa to znanje po vsej verjetnosti ni prišlo do Evrope.

V času epidemije kuge v letih 1665–67, ko je bila univerza zaprta, se je Newton umaknil na domače podeželje in tam naredil neverjeten napredek na področju matematične analize (in tudi fizike). Postavil je temelje infinitezimalnemu računu. Večino teh odkritij je sprva zadržal zase in marsičesa dolgo ni objavil. Tako je Mercator tri leta po Newtonu odkril in kot prvi objavil vrsto za naravni logaritem.

V knjigi imamo navedeno vrsto zanimivih uporab matematične analize. V reviji Presek je bilo pred kratkim navedeno, da je matematično znanje odločilno pomagalo pri terapiji okuženih z virusom HIV. Ta knjiga pojasni to zgodbo takole.

Zdravniki so sprva ugotavljali, da nezdravljena bolezen poteka v treh fazah. V prvi fazi se virus namnoži in zelo zmanjša število obrambnih limfocitov T v telesu, kar povzroči podobne simptome kot gripa. V drugi fazi se telo odzove in imunski sistem se začne boriti z virusom. Počutje se izboljša in nivo virusa se stabilizira. Število limfocitov T pa se počasi zmanjšuje. Ta druga faza lahko traja desetletje. V tretji fazi imunski sistem začne odpovedovati in nivo virusa se začne višati. Infekcije, Kapošijev sarkom ipd. napadejo organizem.

Zdravniki so ugibali, da je v drugi fazi, brez hujših simptomov, morda virus manj aktiven in v nekakšnem zimskem spanju (hibernaciji). Ekipa raziskovalcev, ki sta jo vodila dr. David Ho (ki je bil deležen tudi fizikalne izobrazbe) in matematični imunolog Alan Perelson, je v letih 1995/96 prišla do prelomnih spoznanj. Pacientom so poskusno dajali zdravilo – zaviralec proteaz. Zdravilo je preprečilo razmnoževanje virusov. Število virusov v krvi se je začelo (približno) eksponentno zmanjševati, z razpolovnim časom okrog dva dni. Če z $V(t)$ označimo koncentracijo virusa, dobimo enačbo

$$V(t) = V_0 \exp(-ct)$$

in od tod

$$dV/dt = -cV, \quad V(0) = V_0.$$

Tu je V_0 znana koncentracija na začetku zdravljenja. Ker poznamo razpolovni čas, poznamo tudi c. Nato sta Perelson in Ho poskusila koncentracijo virusa modelirati s preprosto enačbo

$$dV/dt = P - cV.$$

Tu je P hitrost produkcije virusov. Pri nezdravljenem bolniku v drugi fazi je leva stran v zadnji enačbi 0 (koncentracija virusa se ne spreminja in je enaka V_0) in tako $P = cV_0$. Ker poznamo desno stran v tej enačbi, zdaj poznamo P v drugi fazi. Tako izračunani P je velik, kar pomeni, da virus sploh ne spi. To je bilo izredno pomembno odkritje. Podrobnejši eksperimenti so dali še točnejše podatke. Z njimi so zgradili boljše modele in ugotovili, da je P v drugi fazi zelo velik. Odkrili so tudi, da ima okuženi limfocit T življenjsko dobo le dva dni. V drugi fazi brez večjih simptomov se torej telo ves čas močno bojuje z virusom. Imunski sistem sčasoma začne odpovedovati. Pred tem so mislili, da je zdravljenje bolje prihraniti za zadnjo fazo, ker virus hitro postane odporen na posamezno zdravilo.

Našli so še druge antivirusne kemikalije. Matematična obravnava je pokazala, da je edino smiselno in visoko učinkovito uporabljati koktejl treh antivirusnih zdravil, ki delujejo na različne tarče na virusu. Pacienti morajo to terapijo izvajati redno in doživljenjsko.

Perelson je leta 2014 pomagal razviti tudi zelo učinkovito zdravilo za hepatitis C.

Precej prostora v knjigi je namenjenega nihanju in valovanju in revolucionarnim idejam, ki jih je leta 1807 v obravnavi parcialne diferencialne enačbe za pretok toplote uvedel Joseph Fourier.

Avtor se je zelo potrudil, da je v zgodbe o razvoju matematične analize vključil prispevke matematičark. Še posebej dobro je poljudno razložil delo Sophie Germain in Sofje Kovalevske. Manj znano je, da sta med drugo svetovno vojno Mary Cartwright in John Littlewood pomagala razrešiti probleme novo konstruiranih radarjev. Ojačevalci signala so bili nelinearni in so se pri delovanju v robnih razmerah začeli obnašati kaotično. Matematično znanje o nelinearnih dinamičnih sistemih, temelječe na delu Henrija Poincaréja, je pokazalo, da ni šlo za napako konstruktorjev. Ti so potem laže odpravili problem. Nelinearni in kompleksni dinamični sistemi so sicer Strogatzova specialnost.

LITERATURA

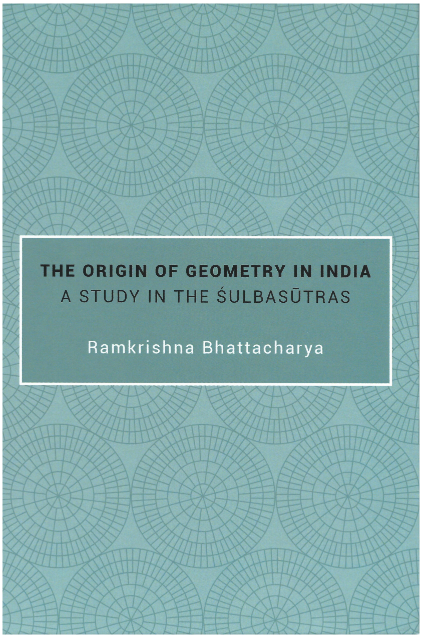
[1] D. Watts in S. Strogatz, *Collective Dynamics of Small-World Networks*, Nature **393** (1998), 440–442.

[2] L. Russo, *The Forgotten Revolution, How Science Was Born in 300 BC and Why it Had to Be Reborn*, Springer Verlag, 2004.

[3] P. Legiša, *Arhimed*, Presek **17** (1989/1990), 2–5, dostopno na `www.presek.si/17/966-Legisa.pdf`, ogled 13. 5. 2020.

Peter Legiša

Ramkrishna Bhattacharya, The Origin of Geometry in India, A Study in the Śulbasūtras, Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, 2019, 221 strani.



Predstavljena knjiga je prva celovita študija nastanka geometrije v Indiji. Šulbasutre so prva razpoložljiva besedila, ki uporabljajo geometrijo in merjenje. Sestavljene so bile okoli leta 600 pr. n. št., čeprav so obstajale v ustnem izročilu že vsaj 900 let prej. Beseda Šulbasutra pomeni *navodilo za merjenje z vrvico.*

Značilnost staroindijske matematike je bila na začetku predvsem uporabnost v religioznem in vsakodnevnem življenju. Pri tem imamo v mislih merjenje, tehtanje, trgovino, gradbeništvo, namakalne sisteme, astronomska opazovanja, velika števila itd.

Geometrijo lahko upravičeno štejemo za najstarejšo vejo staroindijske matematike. Njene začetke lahko postavimo v predarijsko obdobje, v čas okoli 2500 let pr. n. št. v dolino reke Ind, in to na podlagi arheoloških izkopavanj v mestih Harappa in Mohendžo Daro, sedaj oboje v Pakistanu. Mesti sta imeli med seboj pravokotne ulice, trinadstropne hiše, zgrajene iz opeke, skladišča, vodovod in kanalizacijo ter javna kopališča. Težko si je predstavljati, da bi vse to lahko zgradili brez znanja geometrije in računstva. Našli pa so tudi pečate, poslikave in pisavo, ki še ni razvozlana, mere in uteži ter zametke desetiškega številskega sistema.

V predarijskem obdobju so na indijski podcelini prevladovali temnopolti Dravidi, v drugem tisočletju pr. n. št. pa so se na podcelino z območja osrednje Azije prek današnjega Irana in Afganistana množično priseljevala arijska plemena, ki so prvotne prebivalce podjarmila ali jih postopoma potisnila proti jugovzhodu. Takrat se je oblikoval tudi znani kastni sistem.

V arijskem obdobju so se v Indiji pojavile *Vede*, sveta besedila, ki so se prvotno prenašala ustno iz roda v rod, dokler jih niso v sanskrtu tudi zapisali. Nastala naj bi v 2. tisočletju pr. n. št., nekateri pa njihov začetek pomikajo še kakih tisoč let nazaj v zgodovino. Beseda *veda* pomeni *znanje.* Indijci so prepričani, da imajo Vede božji izvor, da so torej dar bogov. Obstajajo štiri Vede: *Rigveda, Jadžurveda, Samaveda* in *Atharvaveda.*

Za matematike je najbolj zanimiva Jadžurveda, ki vsebuje navodila za čaščenje, spoštovanje in žrtvovanje ob raznih priložnostih. Jadžurveda ima dodatke, ki natančno razlagajo, kako je treba opravljati žgalne daritve v čast božanstvom. V ta namen so uporabljali oltarje, ki so bili narejeni iz tesno prilegajočih se opek različnih velikosti in oblik. Število opek je šlo včasih v tisoče. V tlorisu so bili oltarji pravokotni, okrogli, pa tudi nenavadnih oblik, ki spominjajo na želve in ptiče.

Del navodil so *Šulbasutre*, ki dajejo natančne napotke za geometrijsko oblikovanje oltarjev. Indijci so namreč verjeli, da nepravilno narejen oltar ali nepravilen potek vedskega obreda žrtvovanja na njem ne bo pri božanstvu, ki mu je bil namenjen, dosegel svojega namena. Zato so bili pri izdelavi oltarjev zelo natančni.

Knjiga tudi podaja podroben opis zgodovine geometrije v Egiptu, Mezopotamiji in Grčiji ter pokaže, da se geometrija povsod začne z zidarskimi deli, ne pa z merjenjem zemlje, na čemer temelji beseda *geometrija*. V Indiji so bili po avtorjevem mnenju, ki je podkrepljeno z raziskavami drugih znanstvenikov, glavni uporabniki geometrije zidarji in tesarji. Kjer je bilo na razpolago dovolj gline, so ljudje kmalu začeli izdelovati opeko in iz nje zidati stavbe. Pri tem so si, kar se geometrije in merjenja tiče, pomagali s preprostimi orodji: vrvicami, palicami, gnomoni in šestili. V Šulbasutrah je nedvoumno zapisan Pitagorov izrek v trditvi, ki pove, da je kvadrat nad diagonalo pravokotnika enak vsoti kvadratov nad njegovima stranicama. Brez tega védenja najbrž ne bi mogli zapisati navodila, kako konstruirati kvadrat, ki ima za ploščino vsoto oziroma razliko ploščin dveh danih kvadratov. Niso pa tega nikjer dokazali v današnjem smislu. To pomeni, da so izrek Indijci poznali vsaj 200 let pred Pitagoro. Uporabljali so tudi pitagorejske trojice, na primer $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(8,15,17)$, $(12,35,37)$.

V Šulbasutrah so navodila, kako z navpično palico in senco (gnomonom) določimo smer vzhod–zahod in nato še smer sever–jug. To je bilo pomembno za pravilno orientacijo oltarjev. V Šulbasutrah so navodila, kako konstruiramo kvadrat, enakokraki trikotnik, romb, enakokraki trapez, kako pretvarjamo dane like v ploščinsko enake druge like, vključno s približno pretvorbo kvadrata v krog. Iz slednje pretvorbe, ki je podrobno opisana, lahko izluščimo približek števila π, ki pa je precej nenatančen: $\pi \doteq 18(3-2\sqrt{2}) \doteq 3{,}088$. Šulbasutre poznajo precej dober racionalni približek za $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \doteq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}.$$

Kako so do tega prišli, ni znano. Na splošno takrat Indijci niso še ničesar dokazovali. Njihova geometrija je bila drugačna kot Evklidova in je imela popolnoma drug, namreč praktičen namen.

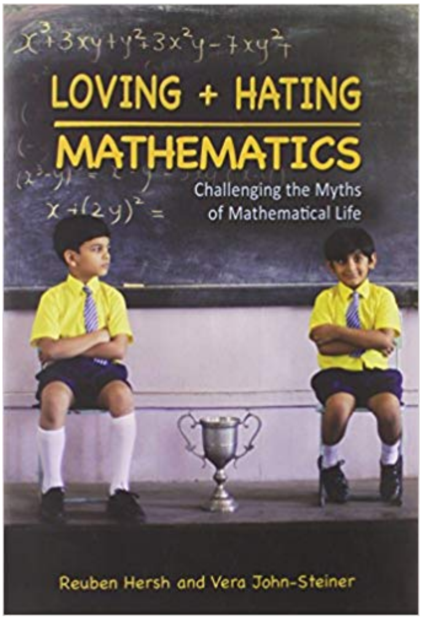
Knjiga poudarja, da je geometrija v Indiji dolgo temeljila bolj na dolžinah, za razliko od tiste v Grčiji, ki je uporabljala tudi kote. Pomislimo na primer na besede *trikotnik*, *pravokotnik*, *večkotnik*, ki so dobesedni prevodi ustreznih grških besed. Vse so zgrajene na besedi *kot*. V sanskrtu je na primer trikotnik *tribhudža*, beseda *bhudža* pa pomeni *stranica*.

Besedilo je bogato ilustrirano s skicami oltarjev različnih oblik. Žal ne prispeva nobene fotografije. Najdemo pa jih na svetovnem spletu, če iščemo *fire altars India*.

Avtor Ramkrishna Bhattacharya, rojen 1947, je doktoriral na Univerzi v Kalkuti. Poučeval je angleščino na nekaterih visokih šolah v Kalkuti. Od leta 2008 je v pokoju. Njegova raziskovalna dela vključujejo filozofske študije, študije o novejši zgodovini Indije in o zgodovini znanosti v Indiji.

Marko Razpet

Reuben Hersh in Vera John-Steiner, Loving + Hating Mathematics, Challenging the Myths of Mathematical Life, Princeton University Press, Princeton in Oxford, 2011, 428 strani.



Reuben Hersh je zaslužni profesor matematike na Univerzi v Novi Mehiki. Je avtor ali soavtor več zelo branih in tudi nagrajenih knjig.

Vera John-Steiner je profesorica lingvistike in izobraževanja na Univerzi v Novi Mehiki. Je tudi zgodovinarka in sociologinja. Tudi ona je avtorica nagrajenih knjig.

O življenju in delu matematikov obstaja veliko knjig namenjenih širokemu krogu bralcev. Pri novejših knjigah o tej tematiki pogosto zasledimo že večkrat objavljene in dobro znane citate in anekdote. Nekaterim od teh se tudi Hersh in John-Steinerjeva nista mogla izogniti, vendar sta uporabila tudi druge, do sedaj manj upoštevane vire. Knjiga je zato zanimiva tako za tiste, ki o zgodovini matematike že nekaj vedo, kot tudi za tiste, ki se s to temo šele spoznavajo.

Knjiga skuša razbiti številne mite o matematikih, vključno s predstavami, da je matematika samotarsko delo, da lahko do pomembnih odkritij pridejo le zelo mladi ljudje, ali kot pravi angleški matematik G. H. Hardy, matematika je »igra za mlade« (young man's game). Govori o prepričanjih nekaterih ljudi, da so matematiki čustveno drugačni ljudje, in celo o misli, da pri razvoju v dobrega matematika pomaga, če si malo nor. Avtorja pripovedujeta zgodbe iz življenja matematikov od njihovih začetkov do pozne starosti. Seznanjata nas o izobraževanju in mentorstvu, prijateljstvu in rivalstvu, ljubezenskih odnosih in porokah ter o izkušnjah žensk in ljudi z roba družbe na področju, ki je bilo že tradicionalno do teh dveh skupin neprijazno, odklonilno. Sem spadajo tudi zgodbe ljudi, za katere je bila matematika neizmerna tolažba v času osebnih ali družbenih kriz, vojne in celo zapora – pa tudi tistih redkih posameznikov, ki jih je obsedenost z matematiko gnala v norost in celo umor.

Knjiga je razdeljena na devet poglavij.

Prvo poglavje je posvečeno začetkom ukvarjanja z matematiko. Avtorja skušata odgovoriti na naslednja vprašanja: s čim se na začetku ukvarjajo otroci, ki kasneje postanejo matematiki? Imajo kakšne posebne lastnosti, poseben dar? Ali na to vpliva vzpodbujanje staršev? Kaj jim tak razvoj omogoča in nazadnje, kaj jih pripelje do tega, da se ukvarjajo z matematiko? Kakšen vpliv imajo učitelji in mentorji? Posebej poudarjata tekmovalnost, ki je tudi med matematiki močno prisotna. Zgodnje udejstvovanje na matematičnih tekmovanjih lahko po eni strani pritegne tudi tiste učence, ki sicer matematike nimajo najraje, po drugi strani pa jih lahko od nje tudi odvrne.

Drugo poglavje je namenjeno matematični kulturi in je tudi najdaljše ter najbolj raznoliko, zato mu namenimo nekaj več besed. Opisuje medsebojno udejstvovanje, izmenjavo dognanj, sodelovanje pri raziskavah, druženje, pa tudi medsebojna trenja in spore. Poglavje ima več podpoglavij.

Prvo podpoglavje se ukvarja s spoznanji in občutenji. Ko so P. Halmosa, madžarskega matematika, ki je živel v ZDA, vprašali, kaj je matematika, je odgovoril: *Varnost. Resnica. Lepota. Vpogled. Struktura. Arhitektura.* Abstrakcija je eden izmed temeljev matematičnega razmišljanja. P. J. Davis in R. Hersh opisujeta dva vidika abstrakcije. Prvi je idealizacija, pomeni odstranitev vseh nepomembnih detajlov. Na primer: pri risanju trikotnika debelina črt ni pomembna. Drugi vidik pa je ekstrakcija, to pomeni, da moramo znati izluščiti vse lastnosti in povezave, ki so pomembne za reševanje problema. Bistvo matematičnega jezika je uporaba simbolov in oznak. V nadaljevanju avtorja opisujeta način štetja in načine poimenovanja osnovnih matematičnih pojmov pri različnih primitivnih ljudstvih. Kaj je še značilno za matematike? Kreativnost in analitičnost. Avtorja iščeta razlike med matematičnimi teoretiki in matematiki, ki se ukvarjajo le z reševanjem problemov.

Drugo podpoglavje ima naslov *Matematična lepota*. Kaj pravzaprav to pomeni? Hardy pravi, da matematična lepota pomeni: da je premišljena, globoka in presenetljiva. Hardy za primer matematične lepote navaja dva zgleda: dokaza, da je $\sqrt{2}$ iracionalno število in da obstaja nešteto praštevil. Seveda se vsi matematiki ne strinjajo s to opredelitvijo lepote v matematiki, zato avtorja zapišeta še mnenja drugih matematikov. Zapisane so tudi izjave matematikov o tem, kako so prišli do velikih odkritij in kako so se pri tem počutili.

Tretje podpoglavje govori o socialnem vplivu matematične kulture. Zunanji opazovalci matematikov bi sklepali, da so matematiki samotni misleci. Vendar številni matematiki dobro sodelujejo. Res je, da nekateri dolgo časa samostojno rešujejo določen problem, ampak velikokrat se zgodi, da potem tavajo v krogu. Zato se potem srečujejo, se pogovarjajo, razpravljajo, si dopisujejo.

Četrto podpoglavje je kratko in se ukvarja z ljubeznijo do matematike in usodami ljudi, ki so se ukvarjali izključno samo z matematiko.

Peto podpoglavje se ukvarja s problemi, ki nastanejo, potem ko je objavljena rešitev težkega problema in se začnejo razprave o tem, ali je dokaz pravilen, oziroma zakaj ni. Avtorja omenjata nekaj primerov sporov o prvenstvu pri rešitvah težjih matematičnih problemov.

Poglavje se konča s primeri *bitk* za sprejem v službo na University of California, Berkeley. Kdo je lahko član oddelka na prestižni univerzi? Kdo odloča o tem? Opisani so boji za sprejem žensk in Afroameričanov.

Naslov *tretjega poglavja* je *Matematika kot tolažba*. V njem avtorja opisujeta usode ljudi, ki so se iz težkih življenjskih preizkušenj rešili prav z ukvarjanjem z matematiko. Omenjata usodo Napoleonovega vojaka J. V. Ponceleta, ki so ga zajeli Rusi in je v zaporu v Sibiriji študiral geometrijo in postavil temelje projektivne geometrije. Urugvajec J. L. Massera je v zaporu dvigal moralo sojetnikom tako, da jih je učil matematiko. Poleg njih so omenjeni še I. Newton, B. Pascal, J. Littlewood in še številni drugi. Tudi politika lahko prizadene matematike. Naj omenimo le en primer, ki je opisan v knjigi. V času *makartizma*, lova na čarovnice, protikomunistične gonje, je tako preganjanje doživel C. Davis, kasnejši urednik The Mathematical Intelligencerja, ki je bil celo šest mesecev zaprt, pristal na *črni listi* in zato ni mogel dobiti službe na univerzah v ZDA. Imel je srečo, saj ga je D. Coxeter povabil na univerzo v Toronto.

Zasvojenost nekaterih oseb z matematiko je tema *četrtega poglavja.* Kaj žene ljudi, da se celo življenje posvetijo matematiki? Če je to obsedenost, kakšne so psihične posledice? Kot primer navajata enega izmed največjih matematikov 20. stoletja, A. Grothendiecka, ki je svoje življenje povsem podredil matematiki in se po upokojitvi umaknil v osamo. A. Bloch je imel na psihiatrični kliniki posebno rutino, po njej je ob določenih urah proučeval matematiko. Najbolj znan *nor* matematik je T. Kaczynski, ki je nekaj let pošiljal pisemske bombe ameriškim profesorjem in poslovnežem, jih nekaj umoril oziroma resno poškodoval. K. Gödel je bil prav tako psihično nestabilen. Na smrt strah ga je bilo zastrupitve, zato je užival le hrano, ki mu jo je pripravljala žena. Ko je le-ta zbolela in ni mogla več skrbeti zanj, je prenehal jesti in nazadnje od lakote umrl. Ob smrti je tehtal le še 29 kg.

Peto poglavje je posvečeno dolgoletnemu prijateljstvu in sodelovanju nekaterih matematikov. Naj omenimo le D. Hilberta in H. Minkowskega, trojico G. H. Hardyja, J. Littlewooda in S. Ramanujana, in dvojice: profesorja K. Weierstrassa in študentko S. Kovalevsko, ruska matematika A. N. Kolmogorova in P. S. Aleksandrova, K. Gödla in A. Einsteina ter ne nazadnje prijateljevanje P. Erdősa z drugimi matematiki po svetu. Konec poglavja je posvečen matematičnim zakoncem.

Šesto poglavje opisuje delo matematikov v *matematičnih centrih in združenjih.* Omenjene so raziskovalne skupine v Göttingenu, New Yorku, Moskvi, Budimpešti, v Franciji (Burbaki). Pozabljeni niso tudi začetki matematičnih združenj in njihov pomen za razvoj matematike in matematičnega izobraževanja ter širjenje matematične literature.

Sedmo poglavje skuša razbiti mit o matematiki kot igri za mlade. Govori o dozorevanju, staranju in vplivu spola na doseganje vidnih rezultatov v matematiki. Do katerega leta lahko sledimo razvoju in novostim v matematiki? Do petdesetih, sedemdesetih let ali še dalj? Hardy je na primer nehal z raziskovanjem pri šestdesetih in rekel, da je prestar, da bi imel še kakšne nove ideje. Njegovo nasprotje je L. J. Mordell, ki je šele po upokojitvi objavil 270 člankov in publikacij in začel predavati na številnih univerzah po svetu. Zadnje predavanje je imel le nekaj mesecev pred svojo smrtjo v Moskvi. V pozni starosti so bili aktivni še številni drugi matematiki. Omenjeni so rezultati raziskav o vplivu starosti na raziskovalne dosežke.

Matematičarke so imele težko pot do uveljavitve v moški raziskovalni domeni. Omenjena so življenja in dela matematičark: S. Germain, S. Kovalevske, E. Noether, M. Rudin, J. Birman, L. Blum, K. Uhlembeck in drugih.

Osmo poglavje ima naslov *Poučevanje matematike: strogo ali prijazno.* Učitelji, od osnovne šole do univerze, in njihov način poučevanja imajo velik vpliv na študente in s tem na odločitev za raziskovanje v matematiki. Omeji se na nekaj primerov, ko profesorji začnejo z osnovami, potem pa zastavijo problem, ki ga morajo študenti samostojno rešiti, brez njihovega vmešavanja, oziroma profesorje, ki študente vodijo in jim pomagajo preskočiti ovire z nekaj pojasnili ali namigi. Po drugi strani pa so omenjeni profesorji, ki so želeli poučevati le elito, posebej izbrane študente, druge pa zavračali. Primer za to je R. L. Moore. Ta ni dovolil Afroameričanom prisostvovati na predavanjih, medtem ko je bil C. F. Stephens njegovo nasprotje, saj je sam živel v črnskem okolju in tudi študiral na ustanovah, namenjenih črncem.

Kot *Ljubim in sovražim šolsko matematiko* bi lahko prevedli *zadnje poglavje* knjige. Zakaj toliko učencem in dijakom, pa tudi odraslim, matematika vzbuja nelagodnost? Zakaj mislijo, da so nesposobni za matematiko? Kako lahko to spremenijo učitelji? Od kod ta globok odklonilen odnos do matematike? Po raziskavah v ZDA naj bi se ta sovražnost do matematike začela nekje v sedmem, osmem razredu, ko se preide na računanje z občimi števili in reševanjem različnih problemov. Učenci preprosto rečejo, da niso dovolj pametni, da bi stvari razumeli, oziroma da se učijo stvari, ki niso pomembne za življenje. Tako pomanjkljivo znanje se pokaže kasneje, saj imajo številni odrasli težave že z razumevanjem osnovnih matematičnih povezav, ki so pomembne za življenje, kot na primer računanje odstotkov. Večinoma so testi iz matematike nekakšen filter za sprejem v višje in visoke šole, kar še dodatno pripomore k nepriljubljenosti predmeta. Kljub številnim reformam in spremembam učnih načrtov se stvari le počasi ali pa sploh ne spreminjajo.

Na koncu vsakega poglavja je obširen seznam uporabljene literature, na koncu knjige pa še imensko in stvarno kazalo.

Knjiga *Loving + Hating Mathematics* torej govori o skritih človeških čustvenih in družbenih vplivih, ki oblikujejo matematiko in vplivajo na izkušnje učencev, dijakov, študentov in seveda na vse tiste, ki se še posebej intenzivno ukvarjajo z matematiko. Napisana je v živahnem, poljudnem slogu in prepletena z zanimivimi zgodbami in anekdotami. Seznanja nas tako z veseljem kot z bolečino raziskovalcev v matematiki. Z veseljem in užitkom jo boste prebrali.

Nada Razpet

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2020
Letnik 67, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Primerljivost izpitov na osnovni in višji ravni pri predmetu matematika na splošni maturi (Jaka Erker, Mateja Fošnarič, Alojz Grahor, Tatjana Levstek, Mateja Škrlec in Janez Žerovnik) .. 1–11

Padanje kapljic, izločenih iz dihal (Gregor Skok) 12–22

Vesti

Vabilo za predloge priznanj DMFA Slovenije za leto 2020 (Boštjan Kuzman) 23

Novice Evropskega matematičnega združenja (EMS) (Boštjan Kuzman) 23–24

Nove knjige

Bits and Bugs: A Scientific and Historical Review of Software Failures in Computational Sciences (Peter Legiša) 25–30

Infinite Powers, The Story of Calculus (Peter Legiša) 31–34

The Origin of Geometry in India (Marko Razpet) 35–37

Loving + Hating Mathematics, Challenging the Myths of Mathematical Life (Nada Razpet) 37–III

CONTENTS

Articles **Pages**

Comparability of general matura mathematics exams at basic and higher level (Jaka Erker, Mateja Fošnarič, Alojz Grahor, Tatjana Levstek, Mateja Škrlec and Janez Žerovnik) 1–11

Falling of respiratory droplets (Gregor Skok) 12–22

News 23–24

New books 25–III

Na naslovnici: Komet C/2020 F3 (NEOWISE) so astronomi odkrili 27. marca 2020 z vesoljskim infrardečim teleskopom WISE v okviru opazovalnega programa NEOWISE. Ob odkritju skromen komet je po prehodu perihelja 3. julija postal presenetljivo svetel in viden celo s prostim očesom. Razvil je dolg dobro viden prašnati rep in manj izrazit plinasti rep. V prvi polovici julija je bil v naših krajih viden v zgodnjih jutranjih urah, v drugi polovici julija pa v večernih urah in sredi noči, zato je postal atraktivno nebesno telo za širšo javnost. Foto: Andrej Guštin