

2018  
Letnik 65  
2

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



## OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije  
Ljubljana, MAREC 2018, letnik 65, številka 2, strani 41–80

**Naslov uredništva:** DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana  
**Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

**Uredniški odbor:** Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2017 DMFA Slovenije – 2078

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

### NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večina razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov  $\text{\TeX}$  oziroma  $\text{\LaTeX}$ , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# O POLOVIČNEM ODVODU FUNKCIJE

NIK STOPAR

Fakulteta za elektrotehniko

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 26A33

Definicijo  $n$ -tega odvoda funkcije, kjer je  $n$  naravno število, lahko razširimo do definicije odvoda reda  $\alpha$ , kjer je  $\alpha$  realno število. V prispevku predstavimo tako imenovan Riemann-Liouvillov odvod, ki je ena od možnih posplošitev običajnega odvoda. Pri tem največ pozornosti namenimo polovičnemu odvodu funkcije. Za motivacijo najprej definiramo odvode potenčnih funkcij na elementaren način, nato pa definicijo s pomočjo integralov razširimo na splošnejše funkcije, definirane na intervalu  $[0, \infty)$ . Na koncu predstavimo nekaj pomembnih lastnosti Riemann-Liouvillovega odvoda in med drugim pokažemo, da polovični odvod  $D^{\frac{1}{2}}$  zadošča enakosti  $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$  za velik razred funkcij  $f$ .

## ON THE HALF DERIVATIVE OF A FUNCTION

The definition of the  $n$ th derivative of a function, where  $n$  is a positive integer, can be extended to a definition of a derivative of order  $\alpha$ , where  $\alpha$  is a real number. In this note we present the so called Riemann-Liouville derivative, which is one of several possible generalizations of the ordinary derivative. We devote the most attention to the half derivative of a function. For motivation we first define derivatives of power functions in an elementary way and then extend the definition to include more general functions defined on the interval  $[0, \infty)$ . At the end we present some important properties of the Riemann-Liouville derivatives and show that the half derivative  $D^{\frac{1}{2}}$  satisfies the equality  $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$  for a large class of functions  $f$ .

### 1. Polovični odvod

Z odvodom funkcije se prvič srečamo v srednji šoli, kjer spoznamo njegov pomen in njegovo uporabo v matematiki. Pri fiziki s pomočjo odvoda izračunamo hitrost objekta, če poznamo njegovo pot v odvisnosti od časa. Prav ta uporaba je bila motivacija Newtonu in Leibnizu pri vpeljavi odvoda in diferencialnega računa.

Pravimo, da je funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $x_0$ , če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vrednosti  $f'(x_0)$  pravimo *prvi odvod funkcije  $f$  v točki  $x_0$* . Če je funkcija  $f$  odvedljiva v vsaki točki  $x$  z intervala  $(a, b)$ , tedaj funkciji  $f': x \mapsto f'(x)$

pravimo *prvi odvod* funkcije  $f$ . Njena vrednost v točki  $x_0 \in (a, b)$  je enaka  $f'(x_0)$ . Če je tudi funkcija  $f'$  odvedljiva na celem intervalu  $(a, b)$ , potem njen odvod  $(f)'$  označimo krajše z  $f''$  in mu pravimo *drugi odvod* funkcije  $f$ . V tem primeru rečemo, da je funkcija  $f$  dvakrat odvedljiva na intervalu  $(a, b)$ . Nobenega razloga ni, zakaj bi se pri drugem odvodu ustavili. V primeru, da je funkcija  $f$  še večkrat odvedljiva, lahko izračunamo njen *tretji odvod*  $f'''$ , *četrti odvod*  $f^{(4)}$ , *peti odvod*  $f^{(5)}$  in tako dalje, vse dokler ti obstajajo. Mnoge funkcije  $f$  so celo neskončno mnogokrat odvedljive in zanje lahko izračunamo  $n$ -ti odvod  $f^{(n)}$  za poljubno naravno število  $n$ .

S tem smo opredelili, kaj je  $n$ -ti odvod funkcije, če je  $n$  naravno število. Kaj pa, če bi namesto naravnega števila vzeli kakšno drugo realno število, recimo  $n = \frac{1}{2}$  ali  $n = \frac{4}{3}$ , ali celo  $n = \pi$ ? Ali lahko tudi v tem primeru definiramo  $n$ -ti odvod funkcije? S tem vprašanjem se bomo ukvarjali v tem prispevku in poskusili nanj tudi odgovoriti.

Prva omemba vprašanja o definiciji odvoda poljubnega realnega reda sega v leto 1695, ko je Leibniz v pismu L'Hôpitalu omenil možnost posplošitve pojma odvoda naravnega reda do odvoda realnega reda. L'Hôpital je takoj želel vedeti, kaj je rezultat odvoda reda  $\frac{1}{2}$ . Kljub temu pa so se v literaturi odvodi realnih redov pojavili šele leta 1819, ko je Lacrox podal prvo formalno definicijo.

V tem razdelku se bomo osredotočili na primer  $n = \frac{1}{2}$ . Želeli bi torej osmisлити pomen izraza *polovični odvod* funkcije  $f$ . Po vzoru višjih odvodov ga označimo kar s  $f^{(\frac{1}{2})}$ , čeprav za zdaj še ne vemo, kaj to pomeni. Seveda želimo, da je  $f^{(\frac{1}{2})}$  spet funkcija, da jo lahko po potrebi ponovno odvajamo. Poleg tega pa bi radi, da polovični odvod zadošča nekaterim lastnostim običajnih odvodov.

Prva pomembna lastnost običajnega odvoda je linearnost, to pomeni, da je za vsaki odvedljivi funkciji  $f$  in  $g$  in vsaki konstanti  $\alpha$  in  $\beta$  tudi funkcija  $\alpha f + \beta g$  odvedljiva in zanjo velja

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Tudi za polovični odvod bomo zahtevali, da je linearen.

Do druge smiselne zahteve za polovični odvod vodijo višji odvodi. Vzemimo funkcijo  $f$ , ki je poljubno mnogokrat odvedljiva, in naj bosta  $m$  in  $n$  naravni števili. Če najprej izračunamo  $n$ -ti odvod funkcije  $f$  in nato  $m$ -ti odvod rezultata, tj.  $(f^{(n)})^{(m)}$ , tedaj dobimo  $(n + m)$ -ti odvod funkcije

## O polovičnem odvodu funkcije

$f^{(n+m)}$ , saj smo funkcijo skupaj odvajali  $(n + m)$ -krat. Zapišimo to še z enačbo:

$$(f^{(n)})^{(m)} = f^{(n+m)}. \quad (1)$$

Smiselno je torej zahtevati, da tudi polovični odvod ustreza tej formuli. Če vzamemo  $m = n = \frac{1}{2}$ , dobimo zvezo

$$\left(f^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = f'.$$

Formula pove, da mora dvakratna zaporedna uporaba polovičnega odvoda na funkciji  $f$  kot rezultat dati prvi odvod funkcije  $f$ . Skratka, če označimo

$$D(f) = f' \quad \text{in} \quad P(f) = f^{\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (2)$$

tedaj iščemo tako preslikavo  $P$ , za katero bo veljalo  $P \circ P = D$  oziroma  $P(P(f)) = D(f)$  za določen razred funkcij  $f$ . Opozoriti je treba, da ne moremo pričakovati, da bo enakost  $P(P(f)) = D(f)$  izpolnjena za poljubno odvedljivo funkcijo  $f$ , bo pa veljala za precej velik razred funkcij.

Če se omejimo le na potenčne funkcije s pozitivnimi eksponenti, take preslikave  $P$  ni težko najti. Oglejmo si, kako lahko pridemo do nje. Naj bo  $h(x) = x^k$ , kjer je  $k$  naravno število. Po vrsti izračunajmo običajne odvode funkcije  $h$  in uganemo splošno formulo.

$$\begin{aligned} h'(x) &= kx^{k-1}, \\ h''(x) &= k(k-1)x^{k-2}, \\ &\dots \\ h^{(n)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)x^{k-n}. \end{aligned}$$

Opazimo, da lahko  $n$ -ti odvod zapišemo s pomočjo fakultet

$$h^{(n)}(x) = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}. \quad (3)$$

Da bi prišli do definicije polovičnega odvoda, bi želeli v tej formuli  $n$  zamenjati z  $\frac{1}{2}$ . Tega za zdaj še ne smemo storiti, saj je funkcija fakulteta definirana le za nenegativna cela števila. Spomnimo se, da obstaja funkcija, ki posplošuje funkcijo fakulteta, tj. *Eulerjeva funkcija gama*, in je definirana za skoraj vsa realna števila. Definicijo in lastnosti te funkcije si bomo podrobneje ogledali v naslednjem razdelku. Na tem mestu omenimo le, da

za vsako naravno število  $n$  velja  $\Gamma(n+1) = n!$ , hkrati pa za vsako pozitivno realno število  $x$  velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (4)$$

S pomočjo funkcije  $\Gamma$  lahko formulo (3) zapišemo v obliki

$$h^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}.$$

Za definicijo polovičnega odvoda potenčne funkcije v tej formuli  $n$  nadomestimo z  $\frac{1}{2}$  in dobimo

$$P(x^k) = (x^k)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} x^{k-\frac{1}{2}}.$$

Ker je funkcija gama definirana za vsa pozitivna realna števila, lahko v tej formuli dopustimo, da je  $k$  poljubno realno število večje od  $-\frac{1}{2}$ . Če želimo izračunati  $P(P(x^k))$ , mora biti torej  $k > 0$ , zato se bomo omejili na funkcije s pozitivnimi eksponenti. Z upoštevanjem linearnosti lahko definicijo preslikave  $P$  razširimo na poljubne linearne kombinacije potenčnih funkcij s pozitivnimi eksponenti. Neformalno rečeno so take funkcije polinomi s poljubnimi, ne nujno naravnimi, pozitivnimi eksponenti. Preverimo, da tako definirana preslikava na tej množici funkcij res ustreza zahtevani enačbi  $P \circ P = D$ . Naj bo  $k > 0$ . Tedaj z upoštevanjem linearnosti in enakosti (4) dobimo

$$\begin{aligned} P(P(x^k)) &= P\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} x^{k-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} P\left(x^{k-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)} x^{k-1} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} x^{k-1} = \frac{k\Gamma(k)}{\Gamma(k)} x^{k-1} \\ &= kx^{k-1} = (x^k)' = D(x^k). \end{aligned}$$

Zaradi linearnosti od tod sledi

$$P(P(\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \dots + \alpha_m x^{k_m})) = D(\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \dots + \alpha_m x^{k_m})$$

za poljubne  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  in  $k_i > 0$ .

## 2. Eulerjeva funkcija gama

V tem razdelku si bomo ogledali definicijo funkcije  $\Gamma$  in zabeležili njene najpomembnejše lastnosti, ki jih bomo potrebovali. Funkcijo  $\Gamma$  je uvedel Leonhard Euler.

**Definicija 1.** Eulerjevo funkcijo gama definiramo s predpisom

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

za vsako realno število  $x > 0$ .

Izkaže se, da ta integral obstaja za vsak  $x > 0$ , za  $x \leq 0$  pa ne obstaja. Ena od pomembnejših lastnosti funkcije  $\Gamma$  je naslednja enakost.

**Trditvev 2.** Za vsak  $x > 0$  velja  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

Enakost dokažemo z integracijo po delih, dokaz pa lahko bralec najde v [2, str. 441]. Iz te enakosti izpeljemo povezavo med funkcijo gama in funkcijo fakulteta.

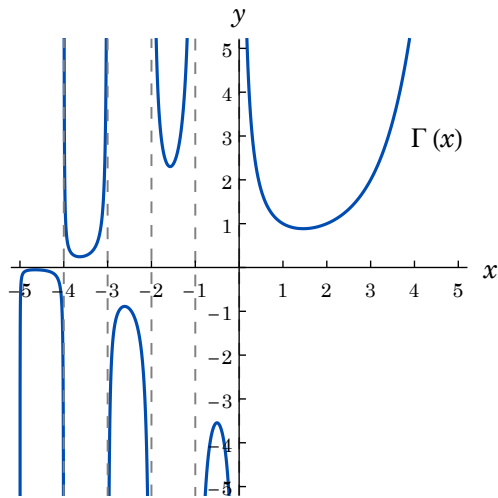
**Posledica 3.** Za vsako nenegativno celo število  $n$  velja  $\Gamma(n + 1) = n!$ .

Definicijo funkcije  $\Gamma$  lahko razširimo na vsa negativna realna števila, ki niso cela. To storimo tako, da enakost iz trditve 2 zapišemo nekoliko drugače:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}. \quad (5)$$

Ker je desna stran enakosti definirana za vse  $x \in (-1, 0)$ , lahko s to formulo razširimo definicijo funkcije  $\Gamma$  na interval  $(-1, 0)$ . Ko to storimo, je desna stran enakosti (5) definirana za vse  $x \in (-2, -1)$ , zato lahko enakost spet uporabimo za razširitev funkcije  $\Gamma$  na interval  $(-2, -1)$ . Postopek induktivno nadaljujemo in tako postopoma definiramo vrednosti funkcije  $\Gamma$  še na intervalih  $(-3, -2)$ ,  $(-4, -3)$ ,  $(-5, -4)$ , ... Na ta način dobimo funkcijo, katere graf je prikazan na sliki 1. Slika nakazuje, da funkcija  $\Gamma$  nima nobene ničle. Prepričajmo se, da je res tako. Iz definicije 1 sledi, da je  $\Gamma(x) > 0$  za vse  $x > 0$ , saj je funkcija pod integralom pozitivna. Če pa je  $x \in (-n - 1, -n)$ , kjer je  $n$  nenegativno celo število, tedaj je  $x + n + 1 > 0$ . Od tod po enakosti (5) sledi

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n + 1)}{x(x + 1) \cdots (x + n)} \neq 0. \quad (6)$$



**Slika 1.** Graf Eulerjeve funkcije gama.

Iz enakosti (6) sledi tudi, da za vsa nenegativna cela števila  $n$  velja

$$\lim_{x \rightarrow -n} \frac{1}{\Gamma(x)} = 0. \quad (7)$$

Ena izmed najbolj znanih vrednosti funkcije gama je vrednost

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (8)$$

S pomočjo te vrednosti lahko izračunamo vrednosti  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$  za vsa liha cela števila  $n$ .

S funkcijo gama je povezana še ena pomembna funkcija, to je *Eulerjeva funkcija beta*, ki jo označimo z  $B$ . Definirana je na naslednji način.

**Definicija 4.** *Eulerjevo funkcijo beta* definiramo s predpisom

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

za vsaki realni števili  $x, y > 0$ .

Funkcijo beta lahko izrazimo s funkcijo gama. Zabeležimo to povezavo v trditve, saj jo bomo potrebovali kasneje. Podroben dokaz trditve najdemo v [2, str. 440–441].



**Trditev 5.** *Za vsaki realni števili  $x, y > 0$  velja*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Več o funkcijah gama in beta in njihovih lastnostih lahko bralec prebere v [2] ali [3].

### 3. Definicija odvoda reda $\alpha$ potenčnih funkcij

Spomnimo se enakosti (3) iz prvega razdelka, ki jo s pomočjo funkcije gama lahko zapišemo kot

$$\left(x^k\right)^{(n)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Ker je funkcija gama definirana za vsa realna števila, razen za negativna cela števila in 0, lahko definiramo odvod reda  $\alpha$  potenčne funkcije  $x^r$  kot

$$\left(x^r\right)^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha}, \quad r, r-\alpha \notin \mathbb{Z}^-, \quad (10)$$

kjer smo z  $\mathbb{Z}^-$  označili množico vseh negativnih celih števil. Omejitvi za  $r$  in  $\alpha$  zagotovita, da sta funkcijski vrednosti  $\Gamma(r+1)$  in  $\Gamma(r-\alpha+1)$  definirani. Ker funkcija  $\Gamma$  nima nobenih ničel, je tudi ulomek  $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$  v tem primeru definiran. Tako definirani odvodi potenčnih funkcij zadoščajo pričakovani enakosti (glej enakost (1))

$$\left(\left(x^r\right)^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = \left(x^r\right)^{(\alpha+\beta)}, \quad (11)$$

čim sta obe strani definirani. Bralcu prepuščamo, da veljavnost enakosti preveri sam.

Definicijo lahko razširimo tudi na nekatere druge primere za  $r$  in  $\alpha$ , vendar moramo že vnaprej opozoriti, da razširjena definicija ne bo več ustrezala enakosti (11). Vseeno si oglejmo, katere primere še lahko dodamo.

Če  $r \notin \mathbb{Z}^-$  in  $r-\alpha \in \mathbb{Z}^-$ , tedaj je števec ulomka  $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$  definiran, imenovalc pa ne. Kljub temu pa iz enakosti (7) sledi, da je

$$\lim_{t \rightarrow r-\alpha+1} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(t)} = 0,$$

zato je ulomek  $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$  smiselno nadomestiti z 0 in definirati

$$(x^r)^{(\alpha)} = 0, \quad r \notin \mathbb{Z}^-, \quad r - \alpha \in \mathbb{Z}^-. \quad (12)$$

Tako je na primer  $(x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2})} = 0$ . S tako razširitvijo definicije odvoda je funkcija  $x^{-\frac{1}{2}}$  primer, ki krši enakost (11), saj je  $((x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2})})^{(\frac{1}{2})} = 0^{(\frac{1}{2})} = 0$  in hkrati  $(x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = (x^{-\frac{1}{2}})' \neq 0$ .

Kaj pa, če je  $r \in \mathbb{Z}^-$ ? Zakaj imamo tedaj težave z definicijo odvoda reda  $\alpha$ ? Če je  $\alpha = n$  naravno število, seveda težav ni, saj gre tedaj za običajen odvod. V tem primeru lahko za  $r < 0$  odvod izrazimo kot

$$(x^r)^{(n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(-r)} x^{r-n} \quad (13)$$

in desna stran je definirana celo za nekatere negativne  $n$ , tj. takrat, ko je  $n-r > 0$  in posledično  $n-r \in \mathbb{N}$ . Bralcu prepuščamo, da enakost (13) izpelje sam. Kaj pa če vzamemo na primer  $r = -1$  in  $\alpha = \frac{1}{2}$ ? Kaj gre tedaj narobe? Razlog za naše težave je zelo preprost. Če bi želeli, da odvodi zadoščajo enakosti (1), bi morale veljati

$$(x^{-1})^{(\frac{1}{2})} = ((\ln x)')^{(\frac{1}{2})} = (\ln x)^{(\frac{3}{2})}.$$

S tem pa pademo ven iz družine potenčnih funkcij in zato tudi ne moremo pričakovati, da bi bil rezultat odvajanja potenčna funkcija. To pomeni, da nam enakost (9) zagotovo ne more pomagati. Za določene primere, npr.  $(x^{-1})^{(\frac{1}{2})}$ , lahko celo pokažemo, da rezultat odvajanja ne more biti potenčna funkcija. Denimo, da velja  $(x^{-1})^{(\frac{1}{2})} = cx^r$ . Iz zahtevane enakosti (1) tedaj sledi  $(cx^r)^{(\frac{1}{2})} = -x^{-2}$ . V posebnem je  $c \neq 0$ . Ker pa rezultat odvajanja v enakostih (10) in (12) ni nikoli potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom, mora biti  $r \in \mathbb{Z}^-$ . Pišimo  $r = -n$ , kjer je  $n$  naravno število, torej je  $(x^{-1})^{(\frac{1}{2})} = cx^{-n}$  in  $(cx^{-n})^{(\frac{1}{2})} = -x^{-2}$ . Z upoštevanjem enakosti (1) prvo enačbo  $(n-1)$ -krat odvajamo, da dobimo  $(c_1 x^{-n})^{(\frac{1}{2})} = c_2 x^{-2n+1}$  za neki neničelni konstanti  $c_1$  in  $c_2$ . S primerjavo eksponentov v zadnjih dveh enačbah sklepamo  $-2 = -2n+1$ , od koder dobimo  $n = \frac{3}{2}$ , kar je protislovje. Torej  $(x^{-1})^{(\frac{1}{2})}$  ni potenčna funkcija.

Povzemimo enakosti (10), (12) in (13) v eno definicijo.

**Definicija 6.** Za realni števili  $r$  in  $\alpha$  definiramo odvod reda  $\alpha$  funkcije  $f(x) = x^r$  kot

$$(x^r)^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha} & ; r \notin \mathbb{Z}^-, r-\alpha \notin \mathbb{Z}^-, \\ 0 & ; r \notin \mathbb{Z}^-, r-\alpha \in \mathbb{Z}^-, \\ (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(-r)} x^{r-\alpha} & ; r \in \mathbb{Z}^-, \alpha-r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poudariti je treba, da odvodi realnih redov niso definirani po točkah, ampak kot funkcije. Zato moramo zgornjo definicijo razumeti v smislu funkcij z definicijskim območjem  $(0, \infty)$ . Če je  $\alpha$  naravno število, se definicija ujema z običajnim odvodom.

Primeri  $r \in \mathbb{Z}^-$ ,  $\alpha - r \notin \mathbb{N}$  tukaj ne bomo obravnavali.

#### 4. Definicija odvoda reda $\alpha$ splošnejših funkcij

Definicijo odvoda želimo razširiti na splošnejše funkcije, kot so potenčne. V tem razdelku bomo predstavili eno od možnih posplošitev, tj. *Riemann-Liouvillov odvod*, pri čemer se bomo omejili le na levo različico. Več o nekaterih drugih posplošitvah lahko bralec prebere v [4].

Do Riemann-Liouvillovega odvoda pridemo s pomočjo integralov. Morda se to zdi nenavadno, vendar je dokaj naravno, saj sta integriranje in odvajanje nasprotni operaciji. Pravzaprav smo v definiciji 6 integrale že uporabili. Če namreč vzamemo odvod negativnega reda  $\alpha = -1$  in naravni eksponent  $n$ , tedaj je

$$(x^n)^{(-1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

kar je ravno ena od primitivnih funkcij funkcije  $x^n$ . Kot bomo videli kasneje, definicija odvoda realnega reda izkoristi dejstvo, da integrali dvigujejo red odvedljivosti funkcij.

V nadaljevanju se bomo omejili na zvezne funkcije, definirane na intervalu  $[0, \infty)$ . Množico teh funkcij označimo s  $\mathcal{C}([0, \infty))$ . Za vsako funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  definiramo

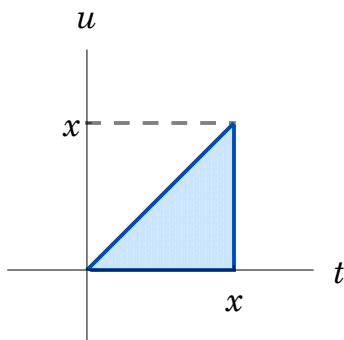
$$I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{za vse } x \geq 0.$$

Po izreku o določenem integralu kot funkciji zgornje meje je funkcija  $I(f)(x)$  ena od primitivnih funkcij funkcije  $f(x)$ , kar pomeni, da je odvedljiva in njen

odvod je enak  $f(x)$ . Preslikava  $f \mapsto I(f)$  podaja operator  $I: \mathcal{C}([0, \infty)) \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty))$ . Označimo še  $I^n = I \circ I \circ \dots \circ I$ , kjer v kompozitumu operator  $I$  nastopa  $n$ -krat. Poiskati želimo eksplicitno formulo za  $I^n(f)(x)$ , podobno, kot smo to storili v prvem razdelku pri odvodih. Pri izračunu  $I^2(f)(x)$  v notranjem integralu preimenujemo integracijsko spremenljivko, da se ne meša z integracijsko spremenljivko v zunanem integralu

$$I^2(f)(x) = I\left(t \mapsto \int_0^t f(u) du\right)(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du\right) dt.$$

Integracijsko območje dvakratnega integrala je trikotnik, prikazan na spodnji sliki.



Zamenjajmo vrstni red integriranja in računajmo dalje

$$\begin{aligned} I^2(f)(x) &= \int_0^x \left(\int_u^x f(u) dt\right) du = \int_0^x \left(f(u) \int_u^x dt\right) du \\ &= \int_0^x f(u)(x-u) du. \end{aligned}$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned} I^3(f)(x) &= I(I^2(f))(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)(t-u) du\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_u^x f(u)(t-u) dt\right) du = \int_0^x \left(f(u) \int_u^x (t-u) dt\right) du \\ &= \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^2}{2} du. \end{aligned}$$

in

$$I^4(f)(x) = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^3}{3!} du.$$

Od tod zlahka uganemo splošno formulo za  $I^n(f)(x)$ . Povzemimo jo v trditvah.

**Trditev 7.** Za vsako funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  in vsako naravno število  $n$  velja

$$I^n(f)(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt, \quad \text{za vse } x \geq 0.$$

Formulo dokažemo z indukcijo, dokaz pa poteka na enak način kot zgornja izpeljava, zato ga prepuščamo bralcu.

Pa ga imamo, splošen integral reda  $n$  funkcije  $f$ ! Bralec verjetno že sluti, kaj sledi. Naravno število  $n$  bomo zamenjali z realnim številom  $\alpha$  in funkcijo fakulteta s funkcijo gama.

**Definicija 8.** Za vsako funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  in realno število  $\alpha > 0$  definiramo *integral reda  $\alpha$*  s formulo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt, \quad x \geq 0.$$

Definiramo še  $I^0(f)(x) = f(x)$  za vse  $x \geq 0$ .

V primeru, ko je  $\alpha < 1$ , imamo v zgornji definiciji opravljen s posplošenim integralom, saj tedaj funkcija  $(x-t)^{\alpha-1}$  ni definirana pri  $t = x$ . Preverimo, da pod pogoji iz definicije integral kljub temu obstaja in da je  $I^\alpha(f)$  spet zvezna funkcija na intervalu  $[0, \infty)$ .

Obstoj integrala za vse  $\alpha > 0$  sledi iz ocene

$$\int_0^x \left| f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| dt \leq \frac{M_x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{M_x}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad (14)$$

kjer smo z  $M_x$  označili maksimum zvezne funkcije  $f$  na intervalu  $[0, x]$ .

Če je  $\alpha \geq 1$ , tedaj je funkcija  $(x, t) \mapsto f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  pod integralom zvezna, zato je tudi funkcija  $I^\alpha(f)$  zvezna. Za dokaz zveznosti v primeru  $0 < \alpha < 1$  izberimo pozitivni števili  $\varepsilon$  in  $a$ , za kateri velja  $\varepsilon < a$ , in naj bo  $x \in [\varepsilon, a]$ . V integral vpeljemo novo spremenljivko  $u = x - t$ , da dobimo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du = \int_0^\varepsilon f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du + \int_\varepsilon^x f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du.$$

Drugi integral v vsoti na desni strani je zvezna funkcija spremenljivke  $x$  na intervalu  $[\varepsilon, a]$ , saj je funkcija pod integralom zvezna. Prvi integral v vsoti

na desni strani je posplošeni integral in je prav tako zvezna funkcija na intervalu  $[\varepsilon, a]$ , ker integral konvergira enakomerno na  $[\varepsilon, a]$ . Enakomerna konvergenca sledi po Weierstrassovem M-testu<sup>1</sup>, saj velja ocena

$$\left| f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} \quad \text{za vse } u \in [0, \varepsilon] \text{ in } x \in [\varepsilon, a],$$

pri čemer smo z  $M_a$  označili maksimum zvezne funkcije  $f$  na intervalu  $[0, a]$ , hkrati pa je

$$\int_0^\varepsilon \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} du = \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}.$$

Ker sta bila  $\varepsilon$  in  $a$  poljubna, je funkcija  $I^\alpha(f)$  za  $0 < \alpha < 1$  zvezna na intervalu  $(0, \infty)$ . Hkrati pa je zvezna tudi v točki 0, saj iz ocene (14) sledi  $\lim_{x \rightarrow 0} I^\alpha(f)(x) = 0 = I^\alpha(f)(0)$ .

Za vsak  $\alpha > 0$  imamo torej operator

$$I^\alpha : \mathcal{C}([0, \infty)) \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty)).$$

Do definicije odvodov ni več daleč. Preden jih definiramo, pa preverimo, da integrali zadoščajo ekvivalentni kompozicijski enakosti, kot jo pričakujemo od odvodov (glej enakost (1)).

**Izrek 9.** *Za vsaki realni števili  $\alpha, \beta \geq 0$  in vsako funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  velja  $I^\alpha(I^\beta(f)) = I^{\alpha+\beta}(f)$ .*

*Dokaz.* Če je  $\alpha = 0$  ali  $\beta = 0$ , ni kaj dokazovati, zato predpostavimo, da sta  $\alpha, \beta > 0$ . Po definiciji je

$$\begin{aligned} I^\alpha(I^\beta(f))(x) &= \int_0^x \left( \int_0^t f(u) \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} du \right) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \int_0^x \left( \int_0^t f(u) \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du \right) dt. \end{aligned}$$

Označimo z  $M_x$  maksimum funkcije  $f$  na intervalu  $[0, x]$ . Z nekaj računanja se lahko prepričamo, da velja

$$\int_0^x \left( \int_0^t \left| f(u) \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| du \right) dt \leq M_x \cdot \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

---

<sup>1</sup>Običajna različica Weierstrassovega M-testa govori o posplošenih integralih z eno od mej  $\infty$ , glej [1, str. 268], vendar test deluje tudi za posplošene integrale, pri katerih funkcija pod integralom v eni od mej ni definirana.

za vse  $x \geq 0$ . Torej smemo v dvakratnem integralu zamenjati vrstni red integriranja, saj notranja integrala v obeh dvakratnih integralih konvergirata enakomerno

$$\begin{aligned} I^\alpha(I^\beta(f))(x) &= \int_0^x \left( \int_u^x f(u) \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \right) du \\ &= \int_0^x \left( f(u) \int_u^x \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \right) du. \end{aligned}$$

V notranjem integralu vpeljemo novo spremenljivko  $s = \frac{t-u}{x-u}$ . Tedaj je

$$\begin{aligned} (t-u)^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1} dt &= (s(x-u))^{\beta-1}((1-s)(x-u))^{\alpha-1}(x-u) ds \\ &= s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}(x-u)^{\alpha+\beta-1} ds, \end{aligned}$$

torej dobimo

$$I^\alpha(I^\beta(f))(x) = \int_0^x \left( f(u) \frac{(x-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds \right) du.$$

Po definiciji 4 in trditvi 5 je

$$\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds = B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

zato sledi

$$I^\alpha(I^\beta(f))(x) = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} du = I^{\alpha+\beta}(f)(x). \quad \blacksquare$$

Vrnimo se k definiciji odvodov. V tem razdelku bomo odvod reda  $\alpha$  funkcije  $f$  označili z  $D^\alpha(f)$  namesto  $f^{(\alpha)}$ . V posebnem je  $D(f) = D^1(f)$  prvi odvod funkcije  $f$  in za vsako naravno število  $n$  je  $D^n(f)$  običajni  $n$ -ti odvod funkcije  $f$ . V teh primerih pomen operatorja  $D^n$  torej že poznamo. Pri definiciji odvoda  $D^\alpha(f)$  za preostala nenegativna realna števila  $\alpha$  nam bo v pomoč zveza med operatorjema  $D$  in  $I$ . Zanju veljata enakosti

$$D(I(f))(x) = f(x), \quad (15)$$

$$I(D(f))(x) = f(x) - f(0), \quad (16)$$

za vse  $x \geq 0$ . Prva enakost sledi iz dejstva, da je  $I(f)$  primitivna funkcija funkcije  $f$ , druga pa je posledica osnovnega izreka analize. Enakosti povesta,

da sta si operatorja  $D$  in  $I$  skoraj inverzna. Smiselno je zahtevati, da sta tudi operatorja  $D^\alpha$  in  $I^\alpha$  na podoben način skoraj inverzna, le da se lahko v drugi enakosti v tem primeru pojavijo drugačni členi namesto  $f(0)$ . Tako naj bi zadoščala vsaj enakosti

$$D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = f(x) \quad \text{za vse } x \geq 0. \quad (17)$$

Spomnimo se, da poleg tega od odvodov želimo, da zadoščajo enakosti

$$D^\alpha(D^\beta(f)) = D^{\alpha+\beta}(f) \quad (18)$$

za velik razred funkcij  $f$  (iz razdelka 3 že vemo, da za vse funkcije to ne bo mogoče). Do definicije splošnega odvoda  $D^\alpha$  pridemo tako, da ga izrazimo s pomočjo operatorjev  $I^\beta$ ,  $\beta \geq 0$ , in operatorjev  $D^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . S pomočjo enakosti (17) in (18) lahko na primer izrazimo

$$D^{\frac{5}{3}}(f) = D^{\frac{5}{3}}(D^{\frac{1}{3}}(I^{\frac{1}{3}}(f))) = D^2(I^{\frac{1}{3}}(f)).$$

Tako pridemo do naslednje definicije.

**Definicija 10.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  in  $\alpha \geq 0$  realno število. Pravimo, da je funkcija  $f$   $\alpha$ -krat odvedljiva, če je za neko (in zato vsako) naravno število  $n > \alpha$  funkcija  $I^{n-\alpha}(f)(x)$   $n$ -krat odvedljiva v vsaki točki  $x \geq 0$ . V tem primeru *odvod reda*  $\alpha$  funkcije  $f$  definiramo s formulo

$$D^\alpha(f)(x) = D^n(I^{n-\alpha}(f))(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left( \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} dt \right)$$

za vse  $x \geq 0$ . Če je odvod  $D^\alpha(f)(x)$  zvezna funkcija, tedaj pravimo, da je  $f$   $\alpha$ -krat zvezno odvedljiva.

Preveriti moramo, da je definicija neodvisna od izbire naravnega števila  $n$ . Naj bosta  $n > \alpha$  in  $k$  naravni števili. Ker je  $I^{n-\alpha}(f)$  zvezna funkcija, iz enakosti (1), izreka 9 in enakosti (15) sledi

$$D^{n+k}(I^{n+k-\alpha}(f)) = D^n(D^k(I^k(I^{n-\alpha}(f)))) = D^n(I^{n-\alpha}(f)).$$

Torej je funkcija  $I^{n-\alpha}(f)(x)$   $n$ -krat odvedljiva natanko tedaj, ko je funkcija  $I^{n+k-\alpha}(f)(x)$   $(n+k)$ -krat odvedljiva. Hkrati ta enakost pove, da je definicija odvoda reda  $\alpha$  neodvisna od izbire naravnega števila  $n$ . V posebnem iz definicije in enakosti (15) sledi  $D^0(f)(x) = D(I(f))(x) = f(x)$ .



Za potenčne funkcije  $f(x) = x^r$  definicija 10 ne posploši definicije 6, saj pri naši omejitvi na zvezne funkcije definicijo 10 lahko uporabimo le, če je  $r \geq 0$ . Velja pa, da se v tem primeru obe definiciji ujemata, kar bomo preverili v razdelku 5. Izkaže se, da za  $-1 < r < 0$  integral iz definicije 10 še vedno obstaja, čeprav taka potenčna funkcija ni definirana v 0, za  $r \leq -1$  pa integral iz definicije ne obstaja več, saj ima potenčna funkcija v tem primeru v 0 pol previsoke stopnje.

V definiciji odvoda  $D^\alpha$  je točka 0 odlikovana točka, ker nastopa v spodnji meji integrala. V definiciji bi lahko točko 0 zamenjali s katerokoli drugo točko  $a$  in se omejili na funkcije, definirane na intervalu  $[a, \infty)$ . S tem bi seveda dobili drugačno definicijo odvoda tudi za funkcije, definirane na celotni realni osi. Razlog, da smo izbrali točko 0, je ta, da se v tem primeru definicija ujema z definicijo odvoda potenčnih funkcij. Če bi namesto z intervalom  $[0, \infty)$  delali z intervalom  $(-\infty, 0]$ , bi dobili desno različico Riemann-Liouvillovega odvoda, pri čemer pa bi se tudi formula za odvod nekoliko spremenila.

Bistvena razlika med običajnim odvodom  $f'$  in odvodom  $D^\alpha(f)$  je v tem, da je vrednost  $f'(x_0)$  odvisna le od vrednosti funkcije  $f$  v okolici točke  $x_0$ , medtem ko je vrednost  $D^\alpha(f)(x_0)$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , odvisna od vrednosti funkcije  $f$  na celotnem intervalu  $[0, \infty)$ .

## 5. Lastnosti odvodov

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj lastnosti odvodov. Preverimo najprej veljavnost enakosti (17).

**Trditev 11.** *Za vsako funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  in vsako realno število  $\alpha \geq 0$  velja*

$$D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = f(x)$$

za vse  $x \geq 0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $n > \alpha$  naravno število. Z upoštevanjem definicije odvoda ter izreka 9 izpeljemo  $D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = D^n(I^{n-\alpha}(I^\alpha(f)))(x) = D^n(I^n(f))(x)$ . Iz enakosti (15) sledi, da je rezultat enak  $f(x)$ . ■

Pri veljavnosti enakosti (18) moramo biti nekoliko bolj previdni, saj velja le, če je funkcija  $f$  »dovolj lepa«, kar ohlapno rečeno pomeni, da ima v točki

0 ničlo dovolj visoke stopnje. Natančneje, naj bo  $\gamma \geq 0$  in  $n$  najmanjše naravno število, da je  $n - \gamma > 0$ . Za funkcijo  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$  pravimo, da je *regularna reda*  $\gamma$ , če je funkcija  $g = I^{n-\gamma}(f)$   $n$ -krat zvezno odvedljiva in zanjo velja  $g^{(k)}(0) = 0$  za vse  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Izrek 12.** *Naj bosta  $\alpha, \beta \geq 0$  realni števili in  $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ . Če je funkcija  $f$  regularna reda  $\alpha + \beta$ , tedaj velja  $D^\alpha(D^\beta(f)) = D^{\alpha+\beta}(f)$ .*

Dokaz izreka 12 lahko bralec najde v [4, Theorem 2.5]. Tukaj si bomo ogledali le dokaz za primer polovičnih odvodov, torej ko je  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Za dokaz bomo potrebovali še naslednjo lemo. Bralec naj jo primerja z enakostjo (16).

**Lema 13.** *Naj bo  $\alpha > 0$  realno število in  $f$  zvezno odvedljiva funkcija, definirana na intervalu  $[0, \infty)$ . Tedaj je funkcija  $I^\alpha(f)$  odvedljiva na intervalu  $(0, \infty)$  in velja*

$$I^\alpha(D(f))(x) = D(I^\alpha(f))(x) - f(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

za vse  $x > 0$ .

*Dokaz.* V integral reda  $\alpha$  za funkcijo  $f$  vpeljemo novo spremenljivko  $u = x - t$ , da dobimo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \int_0^x f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du.$$

Po formuli za odvod integrala s parametrom velja

$$\begin{aligned} D(I^\alpha(f))(x) &= \frac{d}{dx} \left( \int_0^x f(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du \right) \\ &= \int_0^x f'(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du + f(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ker smo odvajali posplošeni integral, preverimo še, da formulo za odvod res smemo uporabiti. Naj bo  $a > \varepsilon > 0$  in  $M'_a$  maksimum funkcije  $f'(x)$  na intervalu  $[0, a]$ . Ker je

$$\left| f'(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \frac{M'_a}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} \quad \text{za vse } u \in [0, \varepsilon] \text{ in } x \in [\varepsilon, a]$$

in hkrati velja

$$\int_0^\varepsilon \frac{M'_a}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} du = \frac{M'_a}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha},$$

po Weierstrassovem M-testu posplošeni integral  $\int_0^\varepsilon f'(x-u) \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} du$  konvergira enakomerno na intervalu  $[\varepsilon, a]$ . Ker sta  $\varepsilon$  in  $a$  poljubna, enakost (19) velja za vse  $x > 0$ .

Sedaj v enakosti (19) v integral vpeljemo spremenljivko  $t = x - u$ , da dobimo

$$\begin{aligned} D(I^\alpha(f))(x) &= \int_0^x f'(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + f(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= I^\alpha(D(f))(x) + f(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Enakost iz leme od tod direktno sledi. ■

**Posledica 14.** Naj bo  $f$  zvezno odvedljiva funkcija, definirana na intervalu  $[0, \infty)$ , za katero velja  $f(0) = 0$ . Tedaj velja  $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = D(f)$ .

*Dokaz.* Pokažimo najprej, da je funkcija  $g = I^{\frac{1}{2}}(f)$  zvezno odvedljiva. Ker je  $f(0) = 0$ , iz enakosti (16) sledi  $I(f') = f$ . Torej velja

$$g = I^{\frac{1}{2}}(I(f')) = I(I^{\frac{1}{2}}(f')),$$

pri čemer je zadnja enakost posledica izreka 9. Ker je  $f'$  zvezna funkcija, je tudi  $I^{\frac{1}{2}}(f')$  zvezna funkcija, zato je po osnovnem izreku analize funkcija  $I(I^{\frac{1}{2}}(f'))$  zvezno odvedljiva.

Ker je torej  $g$  zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja  $g(0) = 0$ , iz leme 13 sledi

$$I^{\frac{1}{2}}(D(g))(x) = D(I^{\frac{1}{2}}(g))(x) \quad \text{za vse } x > 0. \quad (20)$$

Po izreku 9 in enakosti (15) je  $D(I^{\frac{1}{2}}(g)) = D(I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(f))) = D(I(f)) = f$ . Ker je hkrati  $I^{\frac{1}{2}}(D(g))(0) = 0$  in  $f(0) = 0$ , iz enakosti (20) sledi

$$I^{\frac{1}{2}}(D(g))(x) = f(x) \quad \text{za vse } x \geq 0.$$

Funkcija  $f$  je odvedljiva, zato lahko obe strani enakosti odvajamo in upoštevamo definicijo funkcije  $g$ , da dobimo

$$D(I^{\frac{1}{2}}(D(I^{\frac{1}{2}}(f))))(x) = D(f)(x) \quad \text{za vse } x \geq 0.$$

Upoštevamo še definicijo odvoda  $D^{\frac{1}{2}}(u) = D(I^{\frac{1}{2}}(u))$  in zaključimo

$$D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f))(x) = D(f)(x) \quad \text{za vse } x \geq 0. \quad \blacksquare$$

Za konec preverimo še, da se za potenčno funkcijo  $x^r$ ,  $r \geq 0$ , odvod iz definicije 10 ujema z odvodom iz definicije 6.

Naj bo torej  $r \geq 0$  in  $\beta > 0$ . Tedaj je

$$I^\beta(x^r) = \int_0^x t^r \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt.$$

V integral vpeljimo novo spremenljivko  $u = \frac{t}{x}$  in ga preuredimo

$$I^\beta(x^r) = \int_0^1 (xu)^r \frac{(x-xu)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} x du = \frac{x^{r+\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^r (1-u)^{\beta-1} du.$$

V zadnjem integralu prepoznamo funkcijo beta, zato s pomočjo trditve 5 dobimo

$$I^\beta(x^r) = \frac{x^{r+\beta}}{\Gamma(\beta)} B(r+1, \beta) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\beta+1)} x^{r+\beta}.$$

Naj bo sedaj  $\alpha > 0$  in  $n > \alpha$  naravno število. Iz zadnje enakosti in definicije 10 izpeljemo

$$D^\alpha(x^r) = D^n(I^{n-\alpha}(x^r)) = D^n \left( \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n-\alpha+1)} x^{r+n-\alpha} \right).$$

Odvod na desni poračunamo in dobimo

$$D^\alpha(x^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n-\alpha+1)} (r+n-\alpha)(r+n-\alpha-1) \cdots (r-\alpha+1) x^{r-\alpha}.$$

Če je  $r-\alpha \in \mathbb{Z}^-$ , je eden od faktorjev v produktu na desni strani enak 0, saj so vsi faktorji cela števila, pri čemer je  $r+n-\alpha \geq 0$  in  $r-\alpha+1 \leq 0$ . V tem primeru je odvod enak 0. Če pa  $r-\alpha \notin \mathbb{Z}^-$ , tedaj z večkratno uporabo trditve 2 izrazimo

$$\Gamma(r+n-\alpha+1) = (r+n-\alpha)(r+n-\alpha-1) \cdots (r-\alpha+1)\Gamma(r-\alpha+1),$$

od koder zaključimo

$$D^\alpha(x^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha}.$$

Vidimo, da se formula ujema z definicijo 6.

Kot smo že omenili na koncu razdelka 4, definicija 10 deluje na primer tudi za funkcijo  $x^{-\frac{1}{2}}$ , čeprav ta ni definirana v točki 0. Z enakim računom kot zgoraj izračunamo, da je  $D^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{1}{2}}) \equiv 0$ , kar se prav tako ujema z definicijo 6. Ta funkcija torej spet pokaže, da enakost (18) ne velja za poljubne funkcije, zato so v posledici 14 dodatne predpostavke na funkcijo res potrebne.

Če smo začeli s polovičnim odvodom, pa z njim še končajmo. Z uporabo definicije in enakosti (8) lahko polovični odvod funkcije  $f$  zapišemo kot

$$D^{\frac{1}{2}}(f)(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right).$$

Izkaže se, da je le za redke elementarne funkcije polovični odvod spet elementarna funkcija. Tako na primer funkcije  $D^{\frac{1}{2}}(e^x)$ ,  $D^{\frac{1}{2}}(\sin x)$  in  $D^{\frac{1}{2}}(\cos x)$  niso elementarne. Vemo že, da so  $D^{\frac{1}{2}}(x^r)$ ,  $r > 0$ , elementarne funkcije, za konec pa brez dokaza omenimo le še primer

$$D^{\frac{1}{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{x})) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x+1}}.$$

## LITERATURA

- [1] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [2] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.
- [4] S. G. Samko, A. A. Kilbas in O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

# VLOGA GLUONOV V GLOBOKO NEELASTIČNEM VIRTUALNEM COMPTONSKEM SIPANJU

MIHA MIHOVILOVIČ<sup>1,2,3</sup> IN SIMON ŠIRCA<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Institut Jožef Stefan, Ljubljana

<sup>2</sup>Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

<sup>3</sup>Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz

PACS: 24.85.+p, 25.30.-c

Podrobnosti zgradbe protona zaposlujejo znanstvenike že od samih začetkov jedrske fizike. Kmalu zatem, ko je Robert Hofstadter s pionirskimi meritvami elastičnega sipanja elektronov ugotovil, da proton ni točkast, so poskusi razkrili zapleteno zgradbo protona in pomagali vzpostaviti teorijo kvarkov in gluonov, imenovano kvantna kromodinamika. Kakšna je dinamika teh osnovnih gradnikov protona in kako vplivajo na njegove lastnosti, danes opisujemo s posplošenimi partonskimi porazdelitvami, primernimi za opis porazdelitve lege in gibalne količine posameznih gradnikov. Tako si lahko ustvarimo nekakšno holografsko podobo protona, del te slike pa je mogoče izpolniti z meritvijo comptonskega sipanja. V članku opisujemo tovrstno meritev v globoko neelastičnem režimu, s katero smo potrdili trenutno sprejeti opis zgradbe protona in jasno identificirali vpliv gluonov.

## GLIMPSE OF GLUONS THROUGH DEEPLY VIRTUAL COMPTON SCATTERING

Details on the internal structure of the proton are puzzling scientists since the beginnings of nuclear physics. Soon after the pioneering measurements of Robert Hofstadter, who discovered that the proton is not a point-like particle, the follow-up experiments revealed its complicated structure and paved the way for quantum chromodynamics, the theory of quarks and gluons. The dynamics of these fundamental constituents of the proton and of the way they influence its properties, are nowadays described by generalised parton distribution functions. They are used to characterise the position and momentum distributions of the constituents, allowing us to construct a holographic image of the proton. A part of this image can be obtained by investigating deeply virtual Compton scattering. In the paper we describe one such measurement which confirmed the presently accepted description of proton structure and exhibited an intriguing sensitivity to gluons.

Vsa snov, iz katere je zgrajen naš svet, je sestavljena iz atomov, mikroskopskih struktur, ki jih tvorijo elektroni ter v atomska jedra povezani protoni in nevtroni. A že več kot pol stoletja vemo, da protoni in nevtroni niso najmanjši delci snovi, temveč so sestavljeni iz še manjših gradnikov, tako imenovanih partonov. V okviru teorije kvantne kromodinamike, s katero pojasnujemo zgradbo protonov in nevtronov (krajše nukleonov), te poskušamo opisati s kvarki, ki jih trenutno razumemo kot najosnovnejše in nedeljive gradnike snovi, ter s posredniki močne sile, gluoni, ki kvarke kot nekakšno lepilo povezujejo v nukleone. Toda kljub poznavanju osnovnih

gradnikov in sil še vedno ne znamo dovolj natančno opisati osnovnih lastnosti nukleonov, kot sta prostorska porazdelitev naboja [1] ali izvor njegovega spina [2, 3]. Za slednjega so modeli sprva napovedovali, da so zanj odgovorni le valenčni kvarki, a meritve so pokazale, da ti v resnici ustvarijo le 30 % celotnega spina nukleona. Kaj prispeva preostalih 70 %, ni bilo jasno in vznemirja fizike že več desetletij. Šele sodobni kvantnokromodinamski izračuni nakazujejo, da k spinu znatno prispevajo tudi gluoni in kratkoživi pari kvark-antikvark, ki se v nukleonih rojevajo in umirajo dinamično [4]. Obenem je treba upoštevati še to, da imajo kvarki poleg spina tudi tirno vrtilno količino. Le tako izračuni pokažejo, da se celotna vrtilna količina gradnikov nukleona pravilno sešteje v spin protona.

Močna sila [5], ki jo med kvarki posredujejo gluoni, učinkuje podobno kot vzmet med žogicama, pritrjenima na njena konca. Ko sta si blizu, vzmet ni raztegnjena in žogici ne čutita nobene sile, ko ju razmaknemo, pa se vzmet napne in elastična sila ju poskuša znova zblížati. Podobno so kvarki znotraj nukleonov skoraj prosti, ko jih poskušamo izvleči iz nukleona, pa se močna sila med njimi tako zelo poveča, da jih nukleon posrka nazaj vase. Takšna narava močne sile je vzrok, da kvarkov in gluonov nikoli ne vidimo kot prostih delcev. Informacije o njih zato lahko dobimo le posredno, s študijem njihovega obnašanja znotraj nukleona in njihovega vpliva na količine, ki jih merimo med opazovanjem izbranih fizikalnih procesov. Različne jedrske reakcije so namreč občutljive na različne podrobnosti zgradbe nukleonov. Če želimo to zgradbo razumeti in natančno preveriti njeno teoretično ozadje, torej ne zadošča en sam poskus, pač pa moramo opraviti mnogo različnih meritev, ki vsaka iz svojega zornega kota osvetli raziskovani predmet.

Najnatančnejši vpogled v zgradbo nukleona in njegovih gradnikov omogočajo eksperimenti s sipanjem elektronov. Elektromagnetna interakcija, preko katere elektroni interagirajo s protoni — v žargonu ji pravimo kar elektromagnetna *sonda* — je precej šibkejša od močne interakcije, obenem pa je z uporabo kvantne elektrodinamike točno izračunljiva. To nam omogoča neposreden in zelo natančen vpogled v najmanjše podrobnosti strukture nukleona. Kako prodorna je elektromagnetna sonda, pa je odvisno od gibalne količine elektronov, s katerimi opazujemo nukleon, in jo lahko ocenimo z uporabo Heisenbergove neenakosti, ki povezuje prostorsko nedoločenost in gibalno količino:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{p} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{pc}.$$

Če želimo proučevati protone, ki imajo velikost približno enega femtometra, potrebujemo elektrone z gibalnimi količinami, večjimi od nekaj  $100 \text{ MeV}/c$ ,

kakršne dobimo v pospeševalnikih elektronov. Trenutno najzmogljivejši je pospeševalnik CEBAF ameriškega nacionalnega laboratorija Thomas Jefferson National Accelerator Facility (Jefferson Lab) v ZDA. Zagotavlja zvezen žarek polariziranih elektronov z energijami do 12 GeV. V njem polarizirane elektrone ustvarijo s posebnim izvorom delcev, kjer z lasersko svetlobo iz polprevodniške katode izbijajo elektrone z dobro določeno sučnostjo. Elektrone nato vodijo v glavni del pospeševalnika, kjer delci do petkrat preletijo linearni pospeševalni stopnji, v katerih vsakokrat pridobijo energijo 800 MeV. Pospešene delce nato skozi visokofrekvenčni delilnik usmerijo v tri eksperimentalne dvorane za uporabo v poskusih. Največja med njimi je dvorana A [6], opremljena z visokoločljivimi magnetnimi spektrometri. V kombinaciji z različnimi jedrskimi tarčami ti omogočajo precizijski študij različnih jedrskih reakcij in hadronskih struktur. Spektrometre sestavlja niz superprevodnih magnetov, ki jim sledi sestav za detekcijo in karakterizacijo delcev. Vse skupaj je nameščeno na premično, motorizirano ploščad, ki 1000 t težke in 25 m dolge spektrometre z natančnostjo, boljše od  $0,01^\circ$ , vrtijo okoli osišča, pri tem pa se njihovo gorišče ne premakne za več kot 1 mm od interakcijske točke, kjer elektronski žarek zadene tarčo.

Visokoenergijski elektron z energijo  $E$  ob interakciji z jedrom del svoje energije in gibalne količine preda jedru v obliki virtualnega fotona, kvanta elektromagnetne interakcije, sam pa se odkloni in zapusti tarčo z drugačno energijo,  $E'$ , in v drugi smeri,  $\theta_e$ , kjer ga zaznamo s spektrometrom. Porazdelitvi zaznanih delcev po kotu in energiji določata sipalni presek. Celotni sipalni presek  $\sigma$  ali diferencialni sipalni presek  $d\sigma$  sta količini, ki ju navadno merimo v jedrskih poskusih in sta povezani s številom zaznanih delcev na časovno enoto

$$\dot{N}(\theta_e, E, E') = \mathcal{L} \sigma(\theta, E, E') = \mathcal{L} \int_{\Delta\Omega} \left( \frac{d\sigma(\theta, E, E')}{d\Omega} \right) d\Omega.$$

Tu je  $\Delta\Omega$  kotna sprejemljivost spektrometra,  $\mathcal{L}$  pa svetilnost, določena s številsko gostoto toka vpadnih elektronov in s ploskovno gostoto ter masnim številom tarče.

Prvo informacijo, prvi vtis o zgradbi nukleona dobimo s študijem elastičnega sipanja elektronov na protonih. V teh procesih virtualni foton na nukleon prenese razmeroma majhno energijo, zato z njimi otipavamo njegovi porazdelitvi naboja in magnetizacije, določeni s prostorsko porazdelitvijo kvarkov v njem. To fizikalno vsebino parametriziramo z oblikovnima faktorjema  $G_E(Q^2)$  in  $G_M(Q^2)$ , ki ju je mogoče tolmačiti kot Fourierovi



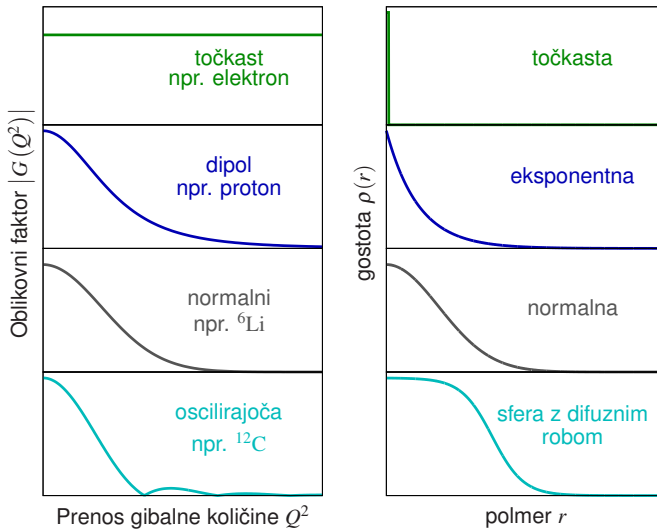
transformiranki porazdelitve naboja in magnetizacije [7]:

$$G_{E,M}(Q^2) \approx \int \rho_{E,M}(\vec{r}) e^{i\vec{r}\cdot\vec{q}/\hbar} d^3\vec{r}.$$

Oblikovna faktorja sta funkciji kvadrata četverca prenosa gibalne količine in ju določimo tako, da izmerjeni sipalni presek  $(d\sigma/d\Omega)_{ep}$  primerjamo z izračunanim presekom  $(d\sigma/d\Omega)_0$  za sipanje elektronov na točkastih brezspinskih delcih:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ep} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \frac{1}{1+\tau} \left[ G_E^2(Q^2) + G_M^2(Q^2)\tau \left(1 + 2(1+\tau) \tan^2 \frac{\theta_e}{2}\right) \right].$$

Pri tem je  $\tau = Q^2/(2M_p)^2$  in  $M_p$  je masa protona. Meritve so pokazale, da lahko oblikovna faktorja protona približno opišemo s tako imenovano dipolno funkcijo oblike  $G(Q^2) = 1/(1 + Q^2/\Lambda^2)^2$ , kjer je  $\Lambda$  prost parameter. Tej funkciji ustreza eksponentna porazdelitev naboja in magnetizacije, glej sliko 1. To je bil prvi dokaz, da proton (in kasneje tudi nevtron) ni preprost Diracov (točkast) delec, pač pa razsežen objekt s povprečnim nabojnim radijem 0,88 fm [8, 9].



**Slika 1.** Zveza med oblikovnim faktorjem  $G(Q^2)$  in krogelno simetrično porazdelitvijo naboja  $\rho(r)$ . Konstanten oblikovni faktor ustreza točkastemu naboju, kar velja, denimo, za elektron. Dipolni oblikovni faktor ustreza eksponentni porazdelitvi naboja, kar približno velja za proton. Oblikovni faktor z obliko Gaussove funkcije opisuje normalno porazdelitev naboja. Homogeno nabiti kroglji ustreza oscilirajoči oblikovni faktor.

Pri energijah elektronskega žarka nad 1 GeV dobi elektromagnetna sonda dovolj visoko ločljivost, da z njo vidimo v notranjost nukleona, še več, z razpoložljivimi pospeševalniki lahko energijo povečamo do te mere, da proton za virtualne fotone postane praktično prosojen, kar nam omogoči raziskovanje njegovih posameznih gradnikov, partonov. Presek za sipanje elektronov na kvarkih (gluoni so brez naboja in ne interagirajo elektromagnetno) lahko zapišemo podobno kot presek za elastično sipanje elektronov na protonih, vendar v njem namesto elastičnih oblikovnih faktorjev  $G_E$  in  $G_M$  nastopata strukturni funkciji  $F_1$  in  $F_2$ , odvisni od Bjorkenovega parametra  $x = Q^2/(2M(E - E'))$ , brezdimenzijskega razmerja, ki nam pove, kolikšen delež gibalne količine nukleona nosi obsevani parton. Obenem presek ni več odvisen le od prostorskega kota  $\Omega$ , temveč tudi od energije  $E'$ :

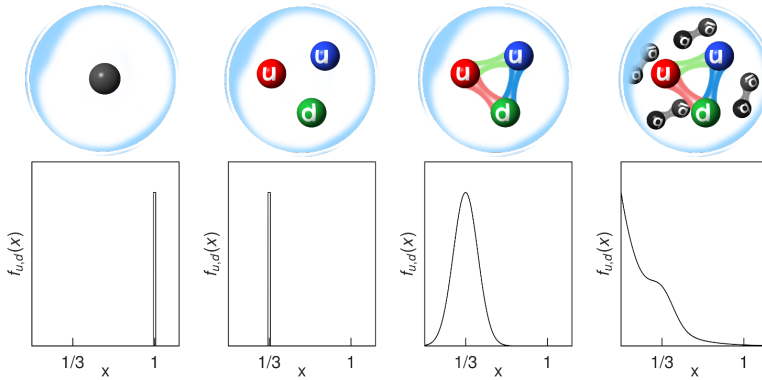
$$\left( \frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} \right)_{\text{ep}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ \frac{1}{E - E'} F_2(x) \cos^2 \frac{\theta_e}{2} + \frac{2}{M} F_1(x, Q^2) \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right].$$

Strukturni funkciji  $F_1$  in  $F_2$ , ki ju določimo z meritvijo tega preseka, razkrivata podrobnosti o zgradbi protona, predvsem porazdelitev gibalne količine nukleona po posameznih partonih, saj ju lahko zapišemo kot

$$F_1(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x), \quad F_2(x) = \frac{1}{2x} \sum_i e_i^2 x f_i(x).$$

Tu indeks  $i$  teče po vseh partonih z naboji  $e_i$ ,  $f_i(x)$  pa označujejo ustrezne longitudinalne partonske porazdelitve, glej sliko 2. Analiza tega enorazsežnega prereza nukleona po gibalni količini, povzeta na sliki 3, je razkrila, da proton tvorijo trije kvarki, med seboj povezani z gluoni. Poleg treh valenčnih kvarkov pa prostornino nukleona zapolnjujejo še kratkoživi pari kvark-antikvark, ki se v nukleonu nenehno rojevajo in ugašajo.

Opis zgradbe nukleona je mogoče nadgraditi z uporabo tako imenovanih posplošenih partonskih funkcij (PPF) [12]. Te vključujejo korelacije med lego kvarka v transversalni ravnini in njegovo gibalno količino v longitudinalni smeri, kar v posebnem koordinatnem sistemu omogoči izdelavo trirazsežne slike njegove zgradbe, torej nekakšno hadronsko tomografijo nukleona [13]. Ker so PPF zelo zapleteni matematični objekti, potrebujemo dolgo vrsto eksperimentov, da bi lahko natančno določili njihove lastnosti in pridobili informacije o trirazsežni podobi nukleona. Pri tem ne zadošča več meritev inkluzivnih sipalnih presekov, pri katerih zaznavamo le sipane elektrone, temveč moramo opazovati bolj zapletene procese. Eden od glavnih načinov za določanje PPF je opazovanje polariziranega globoko virtualnega Comptonovega sipanja (GVCS) in študij ustrezne kompleksne

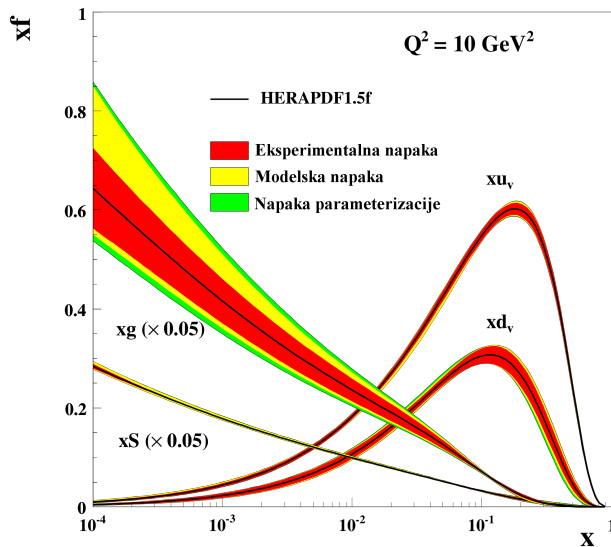


**Slika 2.** Oblike partonskih porazdelitev  $f_i(x)$  ob predpostavljani zgradbi nukleona. Če bi bil proton sestavljen le iz enega »kvarka«, bi v eksperimentu opazili le »funkcijo«  $\delta$  pri  $x = 1$ . V primeru, da bi bil proton zgrajen iz treh nepovezanih valenčnih kvarkov z enakimi masami, bi vsak od njih nosil tretjino gibalne količine in porazdelitev bi imela ostro konico pri  $x = 1/3$ . Če trije kvarki interagirajo z izmenjavo gluonov, preko katerih si lahko izmenjujejo gibalno količino, pričakujemo zvonasto obliko porazdelitve z vrhom pri  $x = 1/3$ . Če pa upoštevamo, da so poleg valenčnih kvarkov v nukleonih prisotni tudi kratkoživi pari kvark-antikvark z majhnimi deleži nukleonove gibalne količine, pa dobimo obliko funkcije, kot jo prikazuje skrajno desna slika, ki ustreza meritvam.

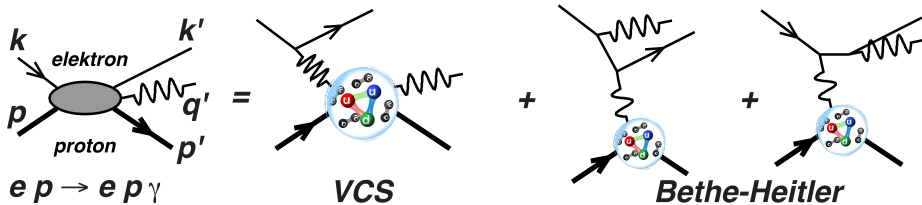
amplitude  $T_{\text{GVCS}}$ , ki je odvisna od štirih PPF protona. V ta namen na protonih sipamo visokoenergijske elektrone, ki elektromagnetno interagirajo s kvarki v protonu, v končnem stanju reakcije pa se iz protona rodi foton, ki ga v koincidenzi s sipanim elektronom zaznamo z detektorji. Pri tem moramo upoštevati, da enako končno stanje (elektron in foton) izmerimo tudi v konkurenčnih Bethe-Heitlerjevih procesih, kjer elektroni rodijo fotone in jih opišemo z amplitudo  $T_{\text{BH}}$ , glej sliko 4. Celotni presek za reakcijo  $ep \rightarrow ep\gamma$  torej zapišemo kot

$$\frac{d^4\sigma(h)}{dQ^2 dx dt d\Phi} = \frac{d^2\sigma_0}{dQ^2 dx} \left[ |T_{\text{BH}}|^2 + |T_{\text{GVCS}}|^2 + \mathcal{I}(T_{\text{BH}}, T_{\text{GVCS}}) \right], \quad (1)$$

kjer je  $\mathcal{I}(T_{\text{BH}}, T_{\text{GVCS}})$  interferenca med amplitudama za Bethe-Heitlerjev in comptonski proces. Pri tem je  $h$  sučnost vpadnega elektrona,  $\Phi$  pa kot med ravnino, ki jo določata vpadni in sipani elektron, ter ravnino, v kateri ležita virtualni in izsevani realni foton. Iz izraza za presek vidimo, da prispevek zavornega sevanja zastira pogled v reakcijo GVCS. Na srečo znamo prispevek tega procesa natančno izračunati [14], zato ga lahko s pomočjo računalniških simulacij odštejemo od izmerjenih spektrov. Po drugi strani pa vidimo, da ločena meritev člana  $|T_{\text{GVCS}}|^2$  sama na sebi ne omogoča rekonstrukcije trirazsežne slike nukleona, saj z njo dobimo informacijo o velikosti



Slika 3. Partonske porazdelitvene funkcije pri  $Q^2 = 10 (\text{GeV}/c)^2$  [10]. Prispevki gluonov in kratkoživih parov kvark-antikvark so zaradi preglednosti pomnoženi s faktorjem 0,05.

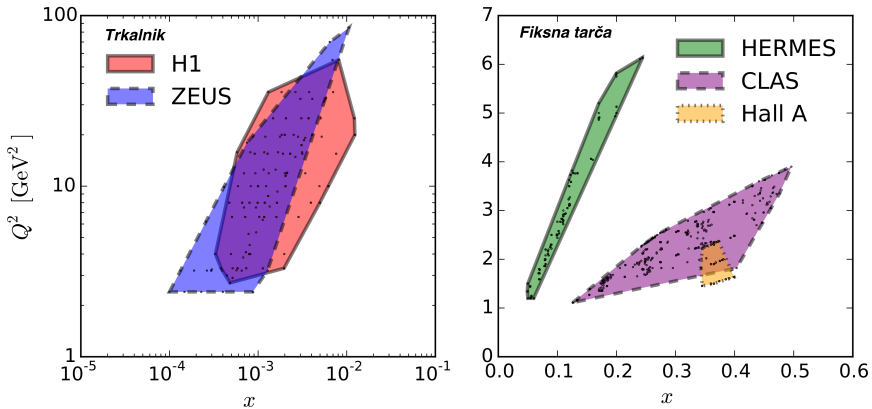


Slika 4. Shematski prikaz procesov, ki v prvem redu prispevajo k preseku za reakcijo  $ep \rightarrow ep\gamma$ . V primeru virtualnega comptonskega sipanja končni realni foton rodi končni tarčni proton. Pri Bethe-Heitlerjevih procesih pa ta ostane v osnovnem stanju in foton izseva bodisi vpadni bodisi sipani elektron [11].

amplitude, izgubimo pa informacijo o kompleksni fazi. V preseku (1) ta skrb odpade, saj v njem fazo lahko določimo iz interference med compton-skim sipanjem in zavornim sevanjem. S tem si zagotovimo neodvisen dostop tako do realnega kot tudi do imaginarnega dela  $T_{\text{GVCS}}$ , ki ju potrebujemo za izdelavo zelene »tomografske slike«.

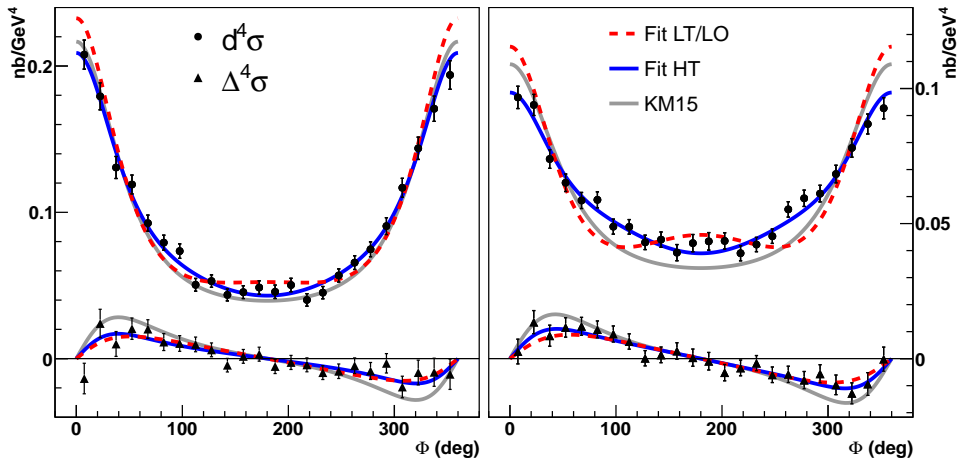
Za dovolj natančno določitev kompleksne amplitude za comptonsko sipanje in pripadajočih PPF potrebujemo visokoločljive meritve kotne porazdelitve delcev ob znanih lastnostih elektronskega žarka. V ta namen je bilo

v laboratoriju Jefferson Lab in nemškem centru DESY doslej narejenih že mnogo meritev na širokem kinematskem območju – glej sliko 5 – te pa se bodo nadaljevale tudi v prihodnje. V poskusu, ki smo ga leta 2012 opravili v okviru kolaboracije Hall A, pa smo ubrali drugačno pot [11]. Z uporabo magnetnih spektrometrov, ki omogočajo dva reda velikosti natančnejše meritve kot detektorji drugih skupin, smo na posebej izbranem kinematskem področju, kjer smo pričakovali le interakcijo elektronov s posameznimi kvarki, želeli preveriti natančnost trenutno razpoložljivega opisa PPF in amplitude za comptonsko sipanje, ki iz njih sledi. Meritev preseka smo opravili z žarkom polariziranih elektronov z energijami do 6 GeV v kombinaciji s kriogeno vodikovo tarčo. Sipane delce smo zaznali s spektrometri, fotone pa z elektromagnetnim kalorimetrom, energijsko občutljivim detektorjem, sestavljenim iz 200 kristalov svinčevega flourida.

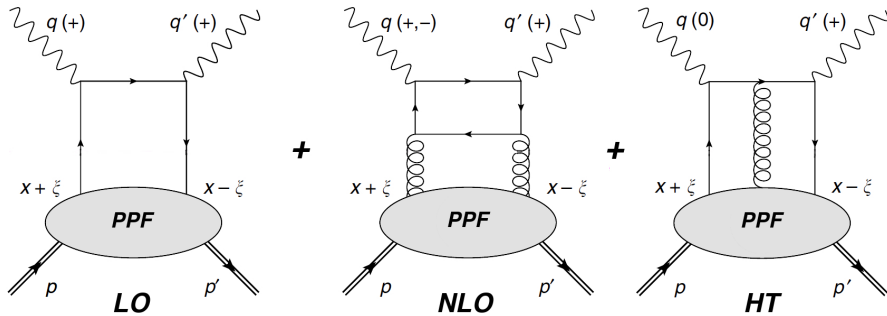


**Slika 5.** Globoko virtualno comptonsko sipanje je mogoče opazovati tako v trkalnikih (levo) kot tudi v eksperimentih s fiksno tarčo (desno). Grafa prikazujeta območja v ravni  $(x, Q^2)$ , ki so jih raziskali v različnih eksperimentih in ki jih je mogoče uporabiti za določitev posplošenih partonskih funkcij [15].

Analiza izmerjenih podatkov je pokazala nepričakovano veliko občutljivost meritev na vlogo gluonov v nukleonu. Rezultati na sliki 6 kažejo, da je na izbranem kinematskem območju izmerjene sipalne preseke mogoče razložiti z obstoječo teorijo, a le v primeru, da v opisu poleg osnovnega perturbativnega diagrama, kjer foton interagira z enim kvarkom, upoštevamo tudi procese višjega reda, pri katerih sodelujejo gluoni; glej sliko 7. Z našim eksperimentom smo tako v okviru dosežene negotovosti potrdili trenutni teoretski opis partonske dinamike ter vzpostavili novo oporno točko



**Slika 6.** Izmerjeni sipalni preseki v odvisnosti od kota  $\Phi$  med reakcijsko in sipalno ravnino pri energiji elektronov 4,455 GeV (levo) in 5,55 GeV (desno). Ločeno sta prikazana od sučnosti vpadnih elektronov neodvisni del sipalnega preseka,  $\Delta^4\sigma$ , in od sučnosti odvisni del,  $d^4\sigma$ . Primerjava z izračuni jasno kaže, da teoretični opis z upoštevanimi popravki višjega reda (HT+NLO) precej boljše opiše podatke od tistega, ki vključuje le vodilne diagrame (LO) [11].



**Slika 7.** Primeri Feynmanovih diagramov, ki nastopajo v GVCS. V prvem redu perturbativne kvantne kromodinamike (QCD) virtualni foton s četvercem gibane količine  $q$  interagira s posameznim kvarkom znotraj protona  $p$ , ta pa po reakciji izseva realni foton z gibalno količino  $q'$ . V limiti  $Q^2 = -q^2 \gg m_p^2$  te procese obravnavamo kot kombinacijo perturbativnega računa interakcije partona s fotonom (zgornja polovica slike) ter neperturbativne strukture nukleona, ki jo opišemo s posplošenimi partonskimi funkcijami. Meritve v okviru kolaboracije Hall A so pokazale, da za zadovoljiv opis meritev ne smemo upoštevati zgolj vodilnega člena (LO), temveč tudi člene višjih redov (NLO in HT), ki opisujejo interakcije med kvarki in gluoni. V teh procesih  $x$  in  $-2\xi$  pomenita deleža longitudinalne gibalne količine, ki ju nosita partona, udeležena v interakciji. Sučnosti fotonov, ki prispevajo k posameznim amplitudam, so označene v oklepajih ob njih [11].

za natančno razumevanje vloge gluonov v protonu. Obenem smo pokazali, da smo s sodobnimi poskusi dandanes zmožni izmeriti sipalne preseke tako natančno, da za zadovoljiv teoretični opis comptonskega sipanja ne zadošča več zgolj osnovni reakcijski mehanizem, temveč moramo upoštevati tudi popravke višjega reda, ki vključujejo razmeroma slabo raziskane korelacije med kvarki in gluoni. Doseženi uspeh je spodbudil nadaljnje meritve v sklopu raziskovalnega programa, ki ga na nedavno dograjenem pospeševalniku CEBAF začenja laboratorij Jefferson Lab. Program, posvečen študiju tako imenovane ekskluzivne elektroprodukcije fotonov, bo omogočil še podrobnejši vpogled v zgradbo nukleona skozi študij posplošenih partonskih funkcij in še natančnejšo opredelitev vloge gluonov v njem.

### LITERATURA

- [1] R. Pohl et al., *The size of the proton*, Nature, 466:213, 2010.
- [2] J. Ashman et al., *A Measurement of the Spin Asymmetry and Determination of the Structure Function  $g(1)$  in Deep Inelastic Muon-Proton Scattering*, Phys. Lett., B206:364, 1988.
- [3] J. Ashman et al., *An Investigation of the Spin Structure of the Proton in Deep Inelastic Scattering of Polarized Muons on Polarized Protons*, Nucl. Phys., B328:1, 1989.
- [4] C. Alexandrou, M. Constantinou, K. Hadjiyiannakou, K. Jansen, C. Kallidonis, G. Koutsou, A. Vaquero Avilés-Casco in C. Wiese., *Nucleon Spin and Momentum Decomposition Using Lattice QCD Simulations*, Phys. Rev. Lett., 119:142002, 2017.
- [5] N. Brambilla et al., *QCD and Strongly Coupled Gauge Theories: Challenges and Perspectives*, Eur. Phys. J., C74:2981, 2014.
- [6] J. Alcorn et al., *Basic Instrumentation for Hall A at Jefferson Lab*, Nucl. Instrum. Meth., A522:294, 2004.
- [7] M. Vanderhaeghen in T. Walcher, *Long Range Structure of the Nucleon*, Nucl. Phys. News, 21:14, 2011.
- [8] J. C. Bernauer et al., *Electric and magnetic form factors of the proton*, Phys. Rev. C, 90:015206, 2014.
- [9] P. J. Mohr, D. B. Newell in B. N. Taylor, *Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2014\**, Rev. Mod. Phys., 88:035009, 2016.
- [10] R. Placakyte, *Parton Distribution Functions*, arXiv:1111.5452, 2011.
- [11] M. Defurne et al, *A glimpse of gluons through deeply virtual compton scattering on the proton*, Nature Commun., 8:1408, 2017.
- [12] M. Guidal, H. Moutarde in M. Vanderhaeghen, *Generalized Parton Distributions in the valence region from Deeply Virtual Compton Scattering*, Rept. Prog. Phys., 76:066202, 2013.
- [13] R. Dupre, M. Guidal in M. Vanderhaeghen, *Tomographic image of the proton*, Phys. Rev., D95:011501, 2017.
- [14] M. Vanderhaeghen, J. M. Friedrich, D. Lhuillier, D. Marchand, L. Van Hoorebeke in J. Van de Wiele, *Qed radiative corrections to virtual compton scattering*, Phys. Rev. C, 62:025501, 2000.
- [15] K. Kumericki, S. Liuti in H. Moutarde, *GPD phenomenology and DVCS fitting*, Eur. Phys. J., A52:157, 2016.

### 11. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah

V petek, 23. novembra bo v hotelu Vita v Dobrni potekala že 11. nacionalna konferenca fizikov v osnovnih raziskavah, ki jo vsaki dve leti organizira Fakulteta za matematiko in fiziko ob pomoči Instituta »Jožef Stefan« in pod pokroviteljstvom Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Srečanja potekajo od leta 1998 in na njih so predstavljeni najodmevnejši in najpomembnejši dosežki slovenske fizike zadnjih dveh let in hkrati raziskovalno delo uspešnih raziskovalcev mlajše generacije. Vsakega srečanja se udeleži skoraj 100 udeležencev iz vseh slovenskih fakultet in inštitutov, ki se ukvarjajo z osnovnimi raziskavami v fiziki.

Na letošnjem srečanju bomo slišali 15 predavanj, od tega sedem vabljenih, in si ogledali 45 plakatov, kjer bodo avtorji predstavili rezultate svojih raziskav, hkrati pa se bodo lahko študentje višjih letnikov fizike, ki se tudi udeležijo tega srečanja, seznanili z različnimi področji raziskovalnega dela v fiziki in možnimi mentorji njihovih diplomskih in magistrskih nalog. Letošnji vabljeni predavatelji bodo prof. Denis Arčon, ki bo predstavil odkritje kvantne spinske tekočine, prof. Boštjan Golob bo predstavil iskanje procesov onkraj Standardnega modela z detektorjem Belle na Japonskem, prof. Borut Bajc bo predstavil koncept asimptotske varnosti v kvantni teoriji polja, dr. Tanja Petrushevska bo predavala o raziskovanju supernov, doc. Primož Rebernik Ribič bo predstavil nastanek femtosekundnih optičnih vrtincev v območju ekstremne ultravijolične svetlobe, doc. Lev Vidmar bo predstavil teoretične raziskave termalizacije izoliranih kvantnih sistemov in dr. Martin Klanjšek eksperimentalno potrditev obstoja anyonov. Slovenski fiziki se lahko v zadnjih letih pohvalijo z vrsto objav v najuglednejših znanstvenih revijah kot so Science, Nature, Nature Physics, Physical Review Letters in drugih, tako da je enodnevno srečanje kar prekratko za celovito predstavitev vseh dosežkov. Tudi na letošnjem srečanju si lahko tako obetamo zanimive predavitve in plodovite debate. Vsi podatki o srečanju so na <http://konfor.fmf.uni-lj.si/>.

*Miha Škarabot*



## Matematični adventni koledar

Vse ljubitelje matematičnih nalog med 3. in 21. decembrom 2018 vabimo k reševanju nalog v Matematičnem adventnem koledarju na naslovu

<http://advent.famnit.upr.si/>

Za reševanje vsake naloge bo na voljo en dan (od polnoči do polnoči).

Osnovnošolci (8. in 9. razred) in dijaki lahko sodelujejo v nagradnem delu tekmovanja, ki bo potekalo v treh kategorijah: 8. in 9. razred, 1. in 2. letnik ter 3. in 4. letnik. V vsaki tekmovalni kategoriji bodo podeljene tri enakovredne nagrade: USB ključek in majica. Vse učitelje zato naprošamo, da svoje učence opozorijo na možnost sodelovanja in jim posredujejo spletni naslov koledarja.

Za pokušino še naloga z lanskega koledarja v kategoriji 3. in 4. letnik.

Zaporedje  $a_0, a_1, \dots$  zadošča zvezam:

$$a_0 = 2, \quad a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = \frac{4a_n - 16}{a_n + 4}.$$

Določite  $a_{2017}$ .

*Jasna Prezelj*

## Matematične novice

### Igor Klep je prejel Nagrado za raziskave Novozelandskega matematičnega društva

Igor Klep, profesor na Univerzi v Aucklandu, je dobil to *Nagrado za raziskovalno delo (Research Award)* za leto 2017. Utemeljitev pravi, da je zaslužen za »globoke in fundamentalne dosežke v realni algebraični geometriji in njeni uporabi na raznih področjih, med drugim v teoriji operatorjev, optimizaciji, konveksnosti in von Neumannovih algebrah ... « To nagrado podeljujejo za matematične raziskave, objavljene v revijah ali knjigah v zadnjih petih letih. Kandidati morajo biti člani Novozelandskega matematičnega društva in biti v obdobju raziskav vsaj tri leta rezidenti v Novi Zelandiji.

Poročilo o nagradi Klepu je bilo objavljeno tudi v marčni številki revije *Notices of the American Mathematical Society*.

Igor Klep je doktoriral leta 2006 na FMF v Ljubljani. Njegov mentor je bil Jaka Cimprič. Klep je bil skupaj s Cimpričem mentor pri doktoratu Aljaža Zalarja leta 2017 na naši univerzi. Že leta 2013 je bil skupaj z Janezom Povhom mentor pri doktoratu Kristijana Cafute, prav tako na UL. Sam je bil letos v Aucklandu mentor pri doktoratu Juriju Volčiču.

*Peter Legiša*

## NOVE KNJIGE

---

**Marta Zabret, MaRtematične prigode, DMFA–založništvo, Ljubljana 2017, 145 str.**

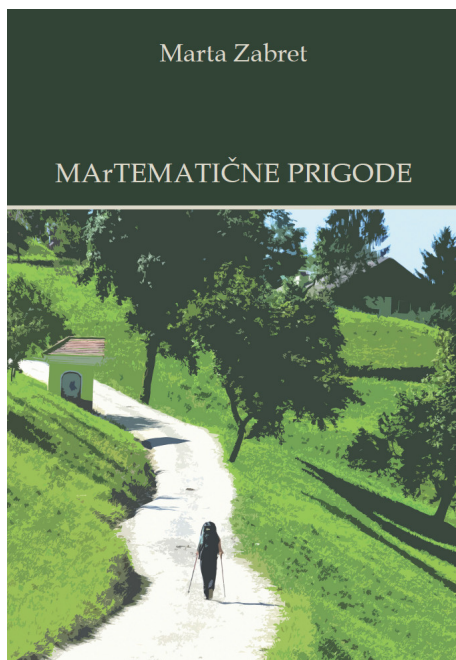
Knjiga je unikaten izdelek. Gre za zbirko kratkih zgodb, v katerih je strnjeno zelo veliko število avtoričinih življenjskih izkušenj. Del snovi sloni na pripovedih, ki jih je avtorica več kot desetletje objavljala v prilogi časopisa Dnevnik. Vendar je tudi to napisala na novo.

Ko sem prvič dobil v roke del te knjige, je bil med njimi, na prvem mestu eden od (maloštevilnih) bolj čustvenih zapisov, morda tisti z naslovom ... *DO LJUBEZNI* (ki je zdaj umeščen na konec). Take stvari mi je zmeraj nekako nerodno prebirati, tako da sem sprva stvar odložil. Pozneje sem dobil celotno besedilo. Ko sem ga začel pregledovati, mi je bila stvar bolj in bolj všeč in sem vse prebral v zelo kratkem času. Po manj kot pol leta knjigo berem še enkrat in ugotavljam, da je v njej zbrano toliko zanimivih zgodb in izkušenj, da bi si jih zelo težko zapomnil ob prvem branju. Tako sem užival tudi ob ponovnem srečanju.

Rdeča nit knjige sta matematika in šola. Izvemo za avtoričino pot do matematične izobrazbe, za dileme v poučevanju. Eno od poglavij nosi naslov *BLIŠČ IN BEDA TEHNOLOGIJE*. V boju s permisivnimi predpisi in dobičkarstvom (razdelek *Državna šola, zlata jama*) je Marta Zabret pokazala veliko civilnega poguma in, kot lahko preberete, dosegla marsikaj.

Predvsem pa so zanimive zgodbe njenih dijakinj in dijakov. Avtorica je zaradi zaščite zasebnosti seveda spremenila imena in morda še kaj drugega.

Besedila so izpiljena in večinoma napisana strnjeno; včasih prav minimalistično, brez odvečnih besed. Jezik je lep, bogat in izražanje pogosto



prav mojstrsko, tako da razumemo, zakaj je avtorica nihala med študijem matematike in slovenščine. Očitno se s pisanjem ukvarja že dolgo in je na tem področju dosegla, lahko rečemo, profesionalni nivo. Pisateljčin stil bi bilo težko posnemati: včasih je pripoved bolj čustvena, drugič ironična in sarkastična, tudi samokritična; najdemo tudi posrečen (in rahlo robot) gorenjski humor.

Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so tako kratke, da so pravzaprav utrinki. Originalni so že naslovi. *Zakva bom pa jest to rabu?!* je vprašanje, ki smo ga v tej ali podobni obliki srečali mnogi, ki smo poučevali na smereh, pri katerih matematika ni ravno v ospredju. *Pomoč ali potuha* govori o inštrukcijah; skoraj vsakega matematika so doletele prošnje za tovrstne usluge (ki jih prosilci včasih pozabijo plačati). Z (ne ravno simpatičnimi) posebnostmi slovenskega narodnega značaja se ukvarja razdelek *Boš že videla*.

Mnogi, ki učijo v osnovni ali srednji šoli (pa ne samo matematiko), bodo z zanimanjem prebrali razdelek *INTERNO, EKSTERNO, INFERNO*. Težko bi našli bolj strnjen, dobro premišljen in humoren prikaz problemov z internim in eksternim ocenjevanjem. Manj navdušeni nad tem razdelkom bodo »helikopterski« starši in poklicni prodajalci »naprednih« in učenkam/dijakom »prijaznih« rešitev, ki se na koncu navadno izkažejo kot škodljive za skoraj vse v šoli, razen morda za nekaj najbolj brezobzirnih in razvajenih posameznikov. Podrobno statistično analizo razkoraka med internimi in eksternimi ocenami je na zadnjem občnem zboru DMFA v Vipavi predstavil Darjo Felda. Martina opažanja se seveda ujemajo s temi podatki.

Knjiga ima tudi čisto matematične vsebine, denimo v obliki problemov: *Naloga Ena, večno zelena ...*

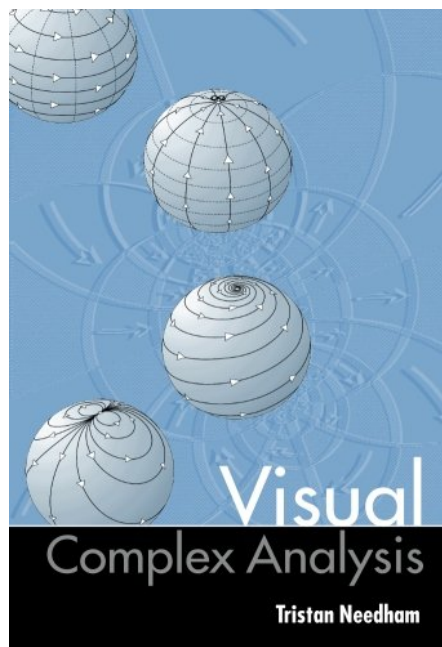
Naslovnico je lepo oblikovala Neža Vavpetič, matematično navdihnjene izvirne in posrečene ilustracije ter vinjete sta prispevali Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Knjiga je nadvse dobrodošla novost in veseli me, da je njena avtorica prav iz naših, matematičnih krogov.

*Peter Legiša*

**Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Oxford University Press Inc., New York, 1998, 592 strani.**

Na staro kitajsko modrost, da ena slika odtehta tisoč strani besedila, matematiki (v svojem stremljenju k logični strogosti) dostikrat pozabljamo.<sup>1</sup> Pretirano abstraktna razlaga brez uporabe slik lahko vodi v nerazumljivost in posledično učni neuspeh.<sup>2</sup> Po drugi strani pa nekateri moderni učbeniki kompleksne analize uporabljajo t. i. *fazne portrete*, ki reprezentirajo funkcije kompleksne spremenljivke kot barvne slike na njihovih domenah.<sup>3</sup> Morda je prav Needhamova knjiga iz leta 1998 (s številnimi črno-belimi slikami) utrla pot nazornejšemu podajanju snovi na področju kompleksne analize in je zato po svoje še vedno aktualna. *Tako kot*



*glasbe ni mogoče resnično razumeti in doživeti le z analiziranjem, ne pa tudi s poslušanjem, tako tudi matematike ni smiselno poskušati učiti ali razumeti brez pomoči slik.* Prav ta misel je avtorja motivirala, da je napisal knjigo, v kateri so temeljni pojmi in izreki kompleksne analize predstavljeni na preprost in nazoren način. Idejo za pisanje takšne knjige o »geometriji kompleksne ravnine« (Uvod, str. ix) je dobil ob študiju Newtonove *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* iz leta 1687. Kot pravi sam, ga je fascinirala Newtonova elegantna geometrijska metoda.<sup>4</sup> Domislil se je, da bi podobno, na geometriji osnovano metodo, lahko uporabil pri razlagi

<sup>1</sup>Nekateri avtorji so tezo o nepotrebnosti slik zagovarjali celo v geometriji! Tako je npr. francoski matematik Jean Dieudonné (v knjigi *Algebre linéaire et géométrie élémentaire* iz leta 1964) elementarno geometrijo aksiomatsko zgradil na pojmi vektorskega prostora.

<sup>2</sup>To misel potrjujejo tudi spoznanja moderne psihologije in pedagogike o tem, kako novo snov usvajamo hitreje in bolje, če so v učenje smiselno vključeni različni senzorni kanali, ki nagovarjajo različne vrste človekovih inteligenc.

<sup>3</sup>Glej npr. E. Wegert, *Visual Complex Functions*, 2012.

<sup>4</sup>Newtonova prvotna verzija infinitezimalnega računa iz leta 1665 je temeljila na uporabi neskončnih vrst. Leibnizev »simbolični račun« je nastal okrog 1675. Newton, ki ni bil najbolj zadovoljen z nobeno od teh prvih dveh različic, je svojo »geometrijsko različico« infinitezimalnega računa razvil okrog leta 1680.

osnovnih pojmov in rezultatov kompleksne analize.

Knjiga je pregledno razdeljena na 12 poglavij, vsako od njih se deli še na manjše enote in se konča z vajami.

V 1. poglavju *Geometrija in kompleksna aritmetika* so predstavljeni ključni mejniki iz zgodovine kompleksnih števil. Ena izmed takih je bila npr. Bombellijeva »drzna misel«, da se iz rešitve  $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ , ki jo po Cardanovih formulah dobimo iz kubične enačbe  $x^3 = 15x + 4$ , mora nekako dobiti realno rešitev  $x = 4$ . Predsodki v zvezi s kompleksnimi števili so se postopoma umikali spoznanju o njihovi uporabnosti. Avtor se precej potrudi, da bralcu pojasni zgodovinski in matematični kontekst z različnimi pomembnimi odkritji o kompleksnih številih. Za Eulerjevo formulo  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  predstavi dva argumenta, ki potrjujeta njeno veljavnost na intuitivni, pred-logični ravni: kinematični argument s po enotski krožnici gibajočim se delcem, ter argument s potenčnimi vrstami (str. 10–14). Sledijo primeri uporabe kompleksnih števil v *trigonometriji* za izpeljevanje različnih formul, kot je npr.  $2^4 \cos^4 \phi = 2 \cos 4\phi + 8 \cos 2\phi + 6$ , *geometriji* (npr. za prikaz rotacij ter za lažje dokazovanje trditev, kot je npr. ta, da sta daljši, ki povezujeta središči po dveh kvadratov nad nasprotnima stranicama poljubnega četverokotnika v ravnini, pravokotni in enako dolgi), *infinitesimalnem računu*, *algebri*, ter pri operacijah z vektorji. Kompleksna števila se naravno pojavijo tudi pri skrbnem premisleku o *geometriji evklidske ravnine*, konkretno lahko pravilo za množenje kompleksnih števil dobimo kot posledico vedenja kompozitumov raztegov in rotacij.

V 2. poglavju avtor za vizualizacijo kompleksnih funkcij  $w = f(z)$  predstavi  $z$  in njeno sliko  $w$  kot točki v kompleksni ravnini, in tako lahko  $f$  interpretira kot transformacijo ravnine<sup>5</sup>. Tako je npr. preslikava  $z \mapsto w = z^n$ , kjer je  $n$  naravno število, po prepisu v polarno obliko  $z = re^{i\varphi}$  in  $w = r^n e^{i\varphi^n}$  prikazana kot razteg in razvitje »pahljače« okrog izhodišča. Ta vizualizacija pa omogoča elegantno razrešitev paradoksa v zvezi z rešitvami kubičnih enačb: čeprav se zdi, da bi po Cardanovih formulah morali imeti devet rešitev, se izkaže, da se Cardanova rešitev prevede na Vietovo. Prav tako

---

<sup>5</sup>Omeni pa tudi druge možnosti vizualizacije kompleksnih funkcij, npr. z *vektorskim poljem*, kjer je kompleksno število  $f(z)$  upodobljeno z vektorjem izhajajočim iz  $z$ , pa tudi z *Riemannovimi ploskvami*. Določeno predstavo o funkciji da tudi njena *modularna ploskev*, kjer je nad točko  $z$  v trirazsežnem prostoru upodobljena njena absolutna vrednost  $|f(z)|$ . V knjigi ni omenjeno *domensko barvanje* (opisano npr. na spletni strani [http://users.mai.liu.se/hanlu09/complex/domain\\_coloring.html](http://users.mai.liu.se/hanlu09/complex/domain_coloring.html)), preprosta tehnika, ki točki  $z$  priredi barvo njene slike  $w = f(z)$ .

posrečeno je razloženo, zakaj lahko potenčne vrste na robu konvergenčnega kroga v okolici nekaterih točk »eksplodirajo« oziroma »podivjajo«. Poučna je tudi pot, po kateri lahko z elementarnimi sredstvi (uporaba težišč in mnogokotnikov) postopoma pridemo do Gaussovega izreka o povprečni vrednosti: *Če je kompleksna funkcija  $f(z)$  izrazljiva s potenčno vrsto, in če krog  $C$  (z radijem  $R$  in središčem  $k$ ) leži znotraj konvergenčnega kroga te potenčne vrste, potem je  $\langle f(z) \rangle_C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(k + Re^{i\varphi}) d\varphi = f(k)$ .*

V 3. poglavju, posvečenem Möbiusovi transformaciji in inverziji, avtor pojasni zvezo Möbiusovih transformacij  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  z neevklidskimi geometrijami, Lorentzovo transformacijo 4-dimenzionalnega prostora-časa in Einsteinovo teorijo relativnosti, pa tudi z dvorazmerjem  $[z, q, r, s] = \frac{(z-q)(r-s)}{(z-s)(r-q)}$ . Rerezentira jih z  $2 \times 2$  matrikami in pokaže, da imajo vse neidentične Möbiusove transformacije največ dve negibni točki. Po Kleinovi ideji klasificira Möbiusove transformacije v štiri razrede: eliptične, hiperbolične, loksodromske in parabolične. Vsakega od teh razredov tudi nazorno vizualizira (s slikami, ki kažejo, kako oziroma kam se z Möbiusovimi transformacijami preslikujejo posamezni krivočrtni štirikotniki iz različnih tlakovanj kompleksne ravnine, prirejenih različnim Möbiusovim transformacijam).

Resnično čudovita uporabnost kompleksne inverzije, ki  $z = re^{i\varphi}$  preslika v  $1/(re^{i\varphi}) = (1/r)e^{-i\varphi}$ , preslikuje krožnice in premice v krožnice in premice in ohranja kote, je prikazana na treh primerih. Najprej je uporabljena za dokaz trditve, da središča neskončnega zaporedja dotikajočih se krogov med dvema od znotraj dotikajočima se krožnicama ležijo na krožnici. Nato je uporabljena za dokaz trditve, da zrcalne slike poljubne točke v notranjosti četverkotnika s pravokotnima diagonalama prek njegovih stranic ležijo na krožnici. Nazadnje je kompleksna inverzija uporabljena še za dokaz Ptolemejevega izreka, ki pravi, da je v tetivnem četverkotniku vsota produktov nasprotnih stranic enaka produktu diagonal.

V 4. poglavju, posvečenem odvajanju kompleksnih funkcij, Needham za opisovanje (in nazorno vizualno ponazoritev) lokalnega delovanja kompleksnih funkcij  $z \mapsto f(z)$ , ki vsako kompleksno število, predstavljeno kot vektor iz določene točke  $z$ , enako raztegne (ali skrči) in enako zavrti, vpelje pojem »vrtinca« (angl. amplitwist). Nato pokaže, da so vse takšne »lokalno vrtinčne« preslikave *konformne* (tj. ohranjajo kote med krivuljami in njihovo orientacijo); in da se *analitične* ali *holomorfne* funkcije v točkah, kjer je odvod različen od nič, lokalno obnašajo kot takšni vrtinci.

V 5. poglavju so z uporabo »infinitezimalne geometrije« na novo izpeljani

Cauchy-Riemannovi pogoji za analitičnost funkcij v polarnih koordinatah namesto kartezičnih. V razdelku o nebesni mehaniki je obravnavan problem, kdaj se delec v centralnem polju sil (tj. v polju, kjer je velikost sile odvisna le od oddaljenosti  $r$  od danega središča) giblje po elipsi. Da dobimo eliptično tirnico le v dveh primerih (če sila linearno *narašča* z razdaljo:  $F(r) = cr$ , ali če *pada* s kvadratom razdalje:  $F(r) = c/r^2$ ), se je zdelo Newtonu zelo presenetljivo (»very remarkable«); kot je opazil Nobelov nagrajenec S. Chandrasekhar, »si Newton nikjer drugje v Principih ni dovolil podobnega izraza presenečenja.«

V 6. poglavju, ki obravnava neevklidsko geometrijo, Needham poudari analogijo s kompleksnimi števili. Ta so bila po začetnem odporu dokončno sprejeta kot matematično neproblematična šele po njihovi konkretni predstavitvi v kompleksni ravnini. Presenetljivo podobno usodo so doživele neevklidske geometrije Gaussa, Bolyaia in Lobačevskega. Uveljavile so se šele po Beltramijevem odkritju, da se da hiperbolično geometrijo konkretno reprezentirati na t. i. Beltramijevi psevdosferi (sklenjeni ploskvi, sestavljeni iz dveh neskončno dolgih lijakov, zlepljenih vzdolž njunega širšega roba, tako da ta ploskev nima roba).

Sedmo poglavje obravnava preprost, a izjemno pomemben koncept ovojnega števila (»winding number«), ki pove, kolikokrat sklenjena krivulja zaokroži okrog dane točke, in njegovo uporabo v topologiji.

Osmo poglavje obravnava kompleksno integracijo in Cauchyjev izrek: Če analitična funkcija nima nobenih singularnosti znotraj dane sklenjene krivulje, potem je njen integral po tej krivulji ničeln. Kot intuitivno razlago veljavnosti tega izreka nam avtor ponudi trditev, da če sklenjeno krivuljo lahko deformiramo in skrčimo v točko, ne da bi prečkali kakšno singularnost, potem je integral analitične funkcije po njej enak nič.

Deveto poglavje je namenjeno uporabi Cauchyjeve formule, ki pove, da če je kompleksna funkcija  $f(z)$  analitična na enostavni sklenjeni krivulji  $L$  in znotraj nje, in če je  $a$  točka znotraj  $L$ , potem je  $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$ . Iz Cauchyjeve formule izpelje tri osnovne lastnosti analitičnih funkcij: da so neskončnokrat odvedljive, da se v okolici regularnih točk izražajo s Taylorjevo vrsto, v okolici singularnih točk pa z Laurentovo vrsto.

V 10. poglavju so kompleksne funkcije upodobljene kot vektorska polja, ta reprezentacija pa je uporabna tudi v fiziki in topologiji. To poglavje, v katerem je podan tudi Hopfov dokaz Poincaré-Hopfovega izreka<sup>6</sup>, lahko po

<sup>6</sup>Ena od posledic tega izreka je, da na sferi  $S^2$  ne more obstajati gladko vektorsko

avtorjevih besedah bralcu služi kot motivacija za nadaljnji študij Riemannovih ploskev.<sup>7</sup>

Enajsto poglavje obravnava vektorska polja in kompleksno integracijo.

Dvanajsto poglavje govori o tokovih in harmoničnih funkcijah. Tokovi, ki v svojem teku od izvorov do ponorov naletijo na različne ovire, so predstavljeni z nazornimi slikami, ki pomagajo k razumevanju njihove strukture.

Da bi bila vsebina knjige kar se da privlačna za bralca, jo je avtor po lastnih besedah ubesedil in oblikoval tako, kot bi ideje razlagal v živo kakšnemu prijatelju. Bralcu pomaga aktivno sodelovati pri razvijanju idej in napredovanju v razumevanju na ta način, da mu v posebni obliki že med samim tekstom (ne le na koncih poglavij) ponuja vaje, v katerih mora sam izdelati podrobnosti v zaporedju jasno določenih opornih točk na poti do rešitve. Te vaje pripomorejo tudi k poglobljanju razumevanja teorije (tako npr. vaja 6 na str. 468 nazorno vizualizira razliko med eliptičnimi, paraboličnimi in hiperboličnimi tipi vektorskih polj v okolici dane točke).

Med didaktičnimi poudarki knjige je treba omeniti tudi avtorjevo spodbujanje bralca, da pri svojem matematičnem raziskovanju uporablja računalnik, podobno kot fizik uporablja svoj laboratorij oziroma eksperimente – »za preverjanje obstoječih idej o tem, kako je konstruiran svet, ali kot sredstvo za odkrivanje novih pojavov, ki potem zahtevajo nove ideje za njihovo razlago.« Da se ta misel danes matematikom zdi že skoraj sama po sebi umevna, so v veliki meri pripomogle tudi knjige, kot je Needhamova *Visual Complex Analysis*, ki bralcu ne predaja le določenega znanja, temveč spodbuja in krepi tako bralčevo aktivno sodelovanje pri izgradnji razumevanja konkretne matematične vsebine kot tudi njegove splošne matematične sposobnosti in veščine.

Čeprav je vsebina knjige zahtevna, ali pa morda prav zato, je bila avtorjeva odločitev, da bralca pritegne in motivira z intuitivnimi argumenti ter sugestivnimi slikami, posrečena. Morda je kljub temu dobra ideja ob njej vzporedno študirati še kakšen drug standarden učbenik kompleksne analize in si tako dodatno razjasniti morebitna težja mesta.

*Jurij Kovič*

---

polje brez negibnih točk, kar se da formulirati tudi tako, da se sfere ne da počesati brez vrtincev.

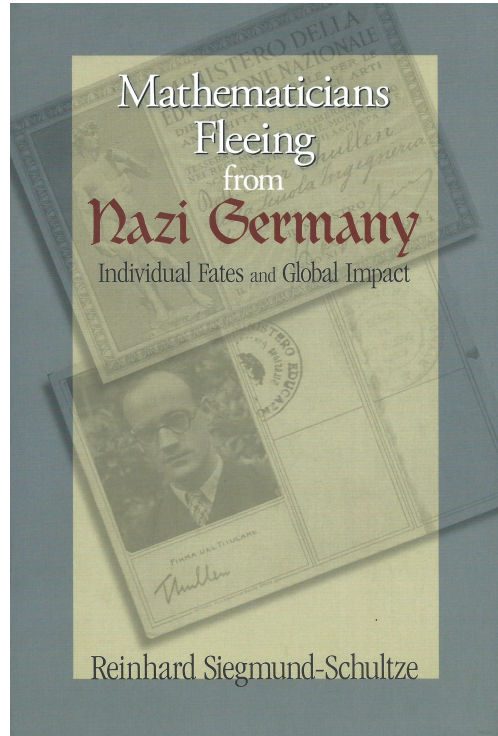
<sup>7</sup>Posebej naj bi npr. to poglavje bralcu omogočalo lažje branje Kleinove knjige *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Two Integrals* iz leta 1881, ki sledi Riemannovi originalni predstavitvi multifunkcij s tokovi na ploskvah v prostoru.



**Reinhard Siegmund-Schultze, *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany, Individual Fates and Global Impact*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009, 502 strani.**

Konec januarja 1933 so v Nemčiji prišli na oblast nacisti pod vodstvom Adolfa Hitlerja. Takoj so začeli izvajati svoj peklenski načrt, ki je vključeval tudi *dokončno rešitev židovskega vprašanja*. Že 7. aprila 1933 so sprejeli *Zakon o strokovni javni službi*, ki je bil uperjen predvsem proti Židom in političnim nasprotnikom nacistov v javnih službah. Po tem zakonu so bili ljudje židovskega izvora (dovolj je bilo, da je bil eden od njihovih starih staršev Žid) iz javnih služb odpuščeni ali prisilno upokojeni. Težave so imeli tudi tisti iz nemško-židovskih zakonov. Zakon

je med drugimi prizadel tudi učitelje, visokošolske profesorje in pravnike. Sprva so bili izjeme le tisti, ki so se izkazali v prvi svetovni vojni na nemški strani oziroma na strani nemških zaveznikov. S kasnejšo novo odredbo pa so bili odpuščeni do konca leta 1935 vsi javni uslužbenci židovskega rodu. Iz leta v leto se je sistematično preganjanje Židov v Nemčiji samo še stopnjevalo ter se preneslo tudi na anektirane in v drugi svetovni vojni okupirane dežele. Na nemških univerzah se je po letu 1933 dogajalo marsikaj, na primer bojkot predavanj židovskih profesorjev in sovraštvo do židovskih študentov. Težave so nastopile pri dokončanju študija, objavah, habilitacijah itd. Še tako bleščeča znanstvena dela židovskih avtorjev so bila nenadoma razvrednotena.



V takih razmerah je bilo prizadetim profesorjem in znanstvenikom najbolje zapustiti državo, kar ni bilo prav enostavno. To v evropski zgodovini ni bilo prvič. Zaradi oktobrske revolucije so mnogi zapustili Rusijo oziroma Sovjetsko zvezo, po *pohodu na Rim* leta 1922 pa Italijo. V vsakem primeru je šlo za velik *beg možganov*, od katerega so imele največ koristi države, ki so sprejele ubežnike.

Avtor knjige, ki jo predstavljamo, obravnava predvsem izseljevanje matematikov iz Evrope med nacistično vladavino. Knjiga je temeljito dokumentirano delo, ki se ukvarja s tovrstno problematiko, verjetno celo eno prvih. Uporablja tudi nekatere arhivske vire, ki jih prej še nihče ni proučeval. Pravzaprav je delo precej razširjen prevod nemške izdaje iz leta 1998. Opisuje odhod 145 matematikov iz nacistične Nemčije, njihove razloge za odhod, njihove gmotne in druge probleme v zvezi z odhodom, sprejem izseljencev v razne države, pridobivanje novega državljanstva in poudarja njihove prispevke k razvoju matematike v svetovnem merilu. Priliv številnih odličnih matematikov v druge države je imel za posledico temeljito preoblikovanje matematičnih znanosti, zlasti v ZDA, ki so se na ta račun povzpele na vodilno mesto v matematičnih raziskavah. Veliko emigrantov je nadaljevalo s svojim znanstvenim delom na prestižnih ameriških univerzah in inštitutih, kot sta na primer Harvard in Princeton. Posledično je angleščina postopoma postala prevladujoči jezik v znanostih.

Navedimo nekaj bolj znanih imen izseljencev, ki smo jih srečali pri študiju matematike: Emil Artin (1898–1962), Felix Bernstein (1878–1956), Richard Courant (1888–1972), Max Dehn (1878–1952), Adolf Fraenkel (1891–1965), Kurt Gödel (1906–1978), Richard von Mises (1883–1953), Otto Neugebauer (1899–1990), Johann von Neumann (1903–1957), Emmy Noether (1882–1935), Georg Pólya (1887–1985), Hans Rademacher (1892–1969), Issai Schur (1875–1941), Olga Taussky-Todd (1906–1995), Otto Toeplitz (1881–1940), Hermann Weyl (1885–1955), Max Zorn (1906–1993). Nekateri od prvih izseljencev so izdatno pomagali mnogim, da so jim lahko sledili, na primer Richard Courant in Hermann Weyl.

Avtor podrobno raziskuje prefinjene mehanizme za izgon matematikov z univerz in iz Nemčije, opisuje, kako so se vključevali v družbo v državah, ki so jih sprejele, in usode matematikov, ki se jim ni uspelo izseliti. Od teh je navedenih 14 matematikov, ki so bili umorjeni ali prisiljeni narediti samomor. Med temi so bili na primer znani matematiki Otto Blumenthal (1876–1944), Friedrich Hartogs (1874–1943), Felix Hausdorff (1868–1942), Georg Pick (1859–1942) in Alfred Tauber (1866–1942). Sledi še seznam 72 matematikov, ki so bili tako ali drugače preganjani, predvsem iz političnih razlogov. Med njimi so zelo znani Erich Kamke (1890–1961), Edmund Landau (1877–1938) in Ernst Zermelo (1871–1953). Pri tem se je treba zavedati, da objavljeni sezname morda niso popolni.

Do leta 1933 je bila matematika v Göttingenu v velikem razcvetu, tako da lahko govorimo kar o *göttingenski matematiki*. Tam so delovali priznani matematiki, na primer Felix Klein (1849–1925) in David Hilbert (1862–1943). Mnogi so se zadrževali v Göttingenu na izpopolnjevanju le za krajši čas, med temi je bil v akademskem letu 1900/1 tudi naš Josip Plemelj (1873–1967), mnogi pa so tam doktorirali. Po letu 1933 je zaradi odhoda židovskih matematikov göttingenska matematika praktično zamrla. Ko je leta 1934 Hilberta na nekem banketu nemški prosvetni minister vprašal, kako je kaj z matematičnim inštitutom v Göttingenu, potem ko so odšli židovski profesorji in njihovi prijatelji, je Hilbert odvrnil: »Inštitut? Tega sploh ni več.«

Reinhard Siegmund-Schultze, rojen leta 1953 v Cantorjevem mestu Halle, avtor predstavljene knjige, je profesor zgodovine matematike na univerzi v Agderju na Norveškem. Napisal je že več knjig, ki obravnavajo matematike in njihove usode v nacistični Nemčiji. Od leta 2000 je član *Mednarodne akademije zgodovine znanosti* v Parizu, od leta 2016 pa sourednik revije *Historia Mathematica*.

*Marko Razpet*

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2018

Letnik 65, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

---

## VSEBINA

Članki	Strani
O polovičnem odvodu funkcije (Nik Stopar) .....	41–59
Vloga gluonov v globoko neelastičnem virtualnem comptonkem sipanju (Miha Mihovilovič in Simon Širca) .....	60–69
<b>Vesti</b>	
11. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah (Miha Škarabot) .....	70
Matematični adventni koledar (Jasna Prezelj) .....	71
Matematične novice (Peter Legiša) .....	71
<b>Knjige</b>	
Marta Zabret, Matematične prigode (Peter Legiša) .....	72–73
Tristan Needham, Visual Complex Analysis (Jurij Kovič) .....	74–78
Reinhard Siegmund-Schultze, Mathematicians Fleeing from Nazi Germany (Marko Razpet) .....	79–VII

---

## CONTENTS

Articles	Pages
On the half derivative of a function (Nik Stopar) .....	41–59
Glimpse of gluons through deeply virtual Compton scattering (Miha Mihovilovič and Simon Širca) .....	60–69
<b>News</b> .....	70–71
<b>New books</b> .....	72–VII

---

**Na naslovnici:** Shematski prikaz globoko virtualnega comptonskega sipanja. Visokoenergijski elektron iz pospeševalnika elektromagnetno interagira s protonom v vodikovi tarči in si pri tem z njim izmenja virtualni foton. V reakciji nastane realni foton, ki ga skupaj z izhodnim elektronom zaznamo v detektorjih. Kotna in energijska porazdelitev zaznanih delcev nosi informacijo o zgradbi nukleona in vlogo gluonov v njej (glej članek na straneh 59–68). Vir: Miha Mihovilovič, Shutterstock.