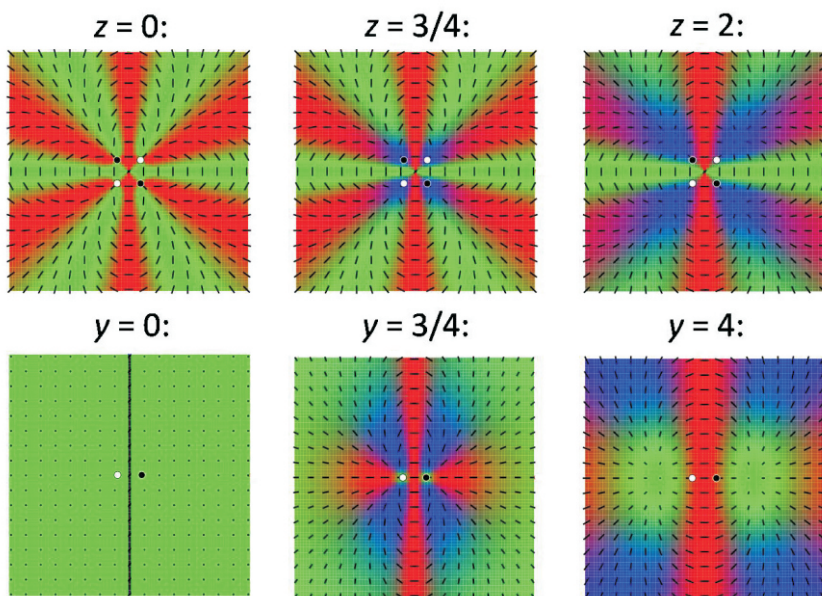


OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2012, letnik 59, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije.

© 2012 DMFA Slovenije – 1875

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

RAZPOREDITVE HIPERRAVNIN

MATJAŽ KONVALINKA

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 52C35

Razporeditev hiperravnin je končna množica hiperravnin (afinih podprostorov kodimenzije 1) v evklidskem prostoru \mathbb{R}^n . V tem preglednem članku definiramo osnovni algebrski strukturi, povezani z razporeditvami: delno urejeno množico presekov in karakteristični polinom. Videli bomo, kako uporabiti karakteristični polinom za izračun števila območij, na katera razporeditev razkosa prostor, in pokazali nekaj metod za iskanje karakterističnega polinoma.

HYPERPLANE ARRANGEMENTS

A hyperplane arrangement is a finite set of hyperplanes (affine subspaces of codimension 1) in the Euclidean space \mathbb{R}^n . In this survey we define two basic structures: the intersection poset and the characteristic polynomial. We see how to use the characteristic polynomial to compute the number of regions created by the hyperplanes, and show some methods for finding the characteristic polynomial.

Osnovne definicije in primeri

Iz srednješolske matematike vsi poznamo premico v ravnini in ravnino v prostoru. Vemo, da ima vsaka premica enačbo oblike

$$ax + by = c,$$

kjer so a, b, c poljubna realna števila; pri tem ne sme veljati $a = b = 0$. Premica gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $c = 0$. Podobno ima ravnina v prostoru enačbo

$$ax + by + cz = d,$$

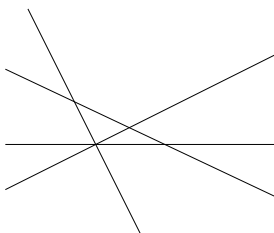
kjer so a, b, c, d poljubna realna števila, za katera ne velja $a = b = c = 0$. Ravnina gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $d = 0$.

Posplošitev premice v ravnini in ravnine v prostoru je *hiperravnina*: množica točk $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, za katere velja

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

kjer je $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in $b \in \mathbb{R}$. Hiperravnina je *afin podprostor* vektorskega prostora \mathbb{R}^n (premknjen linearni podprostor) dimenzije $n - 1$ in gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $b = 0$.

Zanimale nas bodo *končne razporeditve hiperravnin v \mathbb{R}^n* (angl. *hyperplane arrangements*), se pravi končne množice hiperravnin v \mathbb{R}^n . Naš glavni vir in izvrsten uvod v široko področje kombinatorike razporeditev je [3]. Tam lahko bralec najde tiste dokaze, ki so v našem pregledu izpuščeni. Za nekatere lastnosti razporeditev, ki jih tu ne bomo obravnavali, denimo maksimalno število incidenc, največja možna kombinatorna obsežnost itd., glej [1]. Za razporeditve hiperravnin bomo uporabljali pisane velike črke, torej \mathcal{A}, \mathcal{B} itd. V nadaljevanju bomo končnim razporeditvam hiperravnin rekli preprosto *razporeditve*. Na sliki 1 je primer razporeditve (premic) v \mathbb{R}^2 .



Slika 1. Primer razporeditve v \mathbb{R}^2 .

Na prvi pogled je očitno, da razporeditev razdeli prostor \mathbb{R}^n na več *območij*. Na primer, razporeditev na sliki 1 razdeli ravnino na 10 območij. Prav tako je očitno, da je število območij lahko občutljivo za majhne spremembe: če malo premaknemo eno od treh premic, ki se sekajo v isti točki, bo število območij naraslo na 11.

Strogo definiramo območje razporeditve \mathcal{A} kot povezano komponento prostora

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Ni težko videti, da je območij končno mnogo, da je vsako od njih odprta konveksna množica in zato homeomorfno notranjosti krogle. Število območij označimo z $r(\mathcal{A})$.

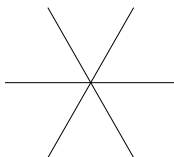
Primer 1. Denimo, da imamo razporeditev \mathcal{A}_m v ravnini, ki vsebuje m premic v splošni legi: to pomeni, da se vsaki dve premici sekata v natanko eni točki in da nobene tri premice nimajo skupne točke. Trdimo, da je $r(\mathcal{A}_m) = (m^2 + m + 2)/2$. To je očitno res, če je $m = 0$: imamo samo eno območje (celo ravnino). Predpostavimo, da trditev velja za $m - 1$, torej da ima razporeditev \mathcal{A}_{m-1} natanko $(m^2 - m + 2)/2$ območij. Dodamo novo premico; predstavljamo si, da potujemo po njej od enega konca do drugega. Vsakič, ko presekamo drugo premico, se ustvari novo območje; eno območje pa se ustvari še na koncu. Ker nova premica po predpostavki seka vsako od starih premic v drugi točki, smo dodali m območij, tako da je $r(\mathcal{A}_m) = r(\mathcal{A}_{m-1}) + m = (m^2 - m + 2)/2 + m = (m^2 + m + 2)/2$. \diamond

Primer 2. Oglejmo si *koordinatno razporeditev* \mathcal{K}_n , ki je definirana s koordinatnimi hiperravninami $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Območja za $n = 2$ ustrezajo kvadrantom, za $n = 3$ pa oktantom. Za splošen n je območij 2^n : da je točka $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{K}_n} H$, mora veljati $x_i \neq 0$ za vsak i ; lahko je videti, da je območje določeno z izborom $x_i > 0$ ali $x_i < 0$ za vsak i , možnosti je očitno 2^n . \diamond

Opazimo še, da ima družina vseh hiperravnin koordinatne razporeditve neprazen presek. Takim razporeditvam rečemo *centralne*; se pravi, razporeditev \mathcal{A} je centralna, če velja $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.

Primer 3. *Kitkasta razporeditev* (angl. *braid arrangement*) \mathcal{B}_n je definirana z $\binom{n}{2}$ hiperravninami $x_i - x_j = 0$ za $1 \leq i < j \leq n$. Območje je določeno s tem, da izberemo, ali velja $x_i < x_j$ ali $x_i > x_j$ za vsaka i, j , $i < j$. To pomeni, da je območje določeno s tem, da določimo, kateri od x_i -jev je najmanjši, kateri je drugi najmanjši itd., se pravi z neko permutacijo koordinat x_1, x_2, \dots, x_n . Zatorej velja $r(\mathcal{B}_n) = n!$. Na primer, razporeditev \mathcal{B}_3 , prikazana na sliki 2, razdeli prostor na šest območij, določenih z $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1 < x_3 < x_2$, $x_2 < x_1 < x_3$, $x_2 < x_3 < x_1$, $x_3 < x_1 < x_2$ in $x_3 < x_2 < x_1$.

Opazimo, da je tudi kitkasta razporeditev centralna: presek je premica $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. \diamond



Slika 2. Kitkasta razporeditev \mathcal{B}_3 , presekana z ravnino $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Kitkasta razporeditev ima kar nekaj zanimivih „deformacij“, na primer naslednje tri.

Primer 4. Denimo, da imamo dan graf $G = (V, E)$, kjer je množica vozlišč $V = \{1, \dots, n\}$. Definirajmo *grafično razporeditev* \mathcal{A}_G s hiperravninami $x_i - x_j = 0$ za $ij \in E$. Kitkasta razporeditev ustreza polnemu grafu K_n . Enostavno se da dokazati, da je število območij enako številu *acikličnih usmeritev* grafa G , se pravi številu takih izbir usmeritev vseh povezav grafa, za katere dobljeni usmerjeni graf nima ciklov.

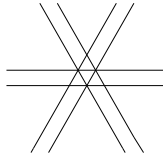
Shijevo razporeditev \mathcal{S}_n definirajo hiperravnine $x_i - x_j = 0, 1$ za $i < j$. *Catalanovo razporeditev* \mathcal{C}_n definirajo hiperravnine $x_i - x_j = -1, 0, 1$ za $i < j$. Kasneje bomo videli, da je $r(\mathcal{S}_n) = (n + 1)^{n-1}$ in $r(\mathcal{C}_n) = (2n)!/(n +$

$1)! = (n + 2)(n + 3) \cdots (2n)$. Obe števili sta zanimivi s kombinatoričnega stališča: število $(n + 1)^{n-1}$ je (med drugim) enako številu označenih dreves na $n + 1$ točkah (se pravi številu povezanih grafov na $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ z n povezavami), drugo pa je enako $n!C_n$, kjer je $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ *Catalanovo število*. Catalanova števila so izjemno pomembna v enumerativni kombinatoriki, štejejo na primer:

- triangulacije $(n + 2)$ -kotnika;
- pravilne postavitve n oklepajev in n zaklepajev;
- poti od $(0, 0)$ do $(2n, 0)$ z dovoljenima korakoma $(1, 1)$ in $(1, -1)$, ki se ne spustijo pod os x .

Slika 3 prikazuje razporeditev \mathcal{S}_3 .

◇



Slika 3. Shijeva razporeditev \mathcal{S}_3 , presekana z ravnino $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Delno urejena množica presekov, Möbiusova funkcija in karakteristični polinom

Izkaže se, da lahko veliko pomembnih lastnosti razporeditve razberemo iz presekov hiperravnin. V tem razdelku bomo definirali dva ključna objekta: delno urejeno množico presekov in njen karakteristični polinom. V zadnjem razdelku bomo potem spoznali različne načine računanja karakterističnega polinoma. Veliko rezultatov bomo navedli brez dokaza ali pa bomo dokaz samo skicirali.

Spomnimo se, da je množica P z dvomestno relacijo \leq *delno urejena*, če velja:

1. refleksivnost: za vsak $x \in P$ je $x \leq x$;
2. antisimetričnost: če velja $x \leq y$ in $y \leq x$, je $x = y$;
3. tranzitivnost: če velja $x \leq y$ in $y \leq z$, je tudi $x \leq z$.

Če je $x \leq y$ in $x \neq y$, pišemo $x < y$. Če velja $x < y$, ne obstaja pa z , za katerega bi veljalo $x < z < y$, pravimo, da y *pokriva* x . Delno urejena

množica P je *stopničasta*, če obstaja funkcija $\text{rang}: P \rightarrow \mathbb{N}$, za katero velja $\text{rang}(y) = \text{rang}(x) + 1$, kadar y pokriva x .

Spomnimo se, da (končne) delno urejene množice pogosto predstavimo s Hassejevim diagramom: grafom, katerega točke so elementi množice P , povezani pa so tisti pari (x, y) , za katere y pokriva x . Hassejev diagram običajno narišemo tako, da je x pod y , če je $x < y$. Če je delno urejena množica stopničasta, vse elemente z istim rangom narišemo na isti višini.

Definicija 1. Naj bo \mathcal{A} razporeditev hiperravnin v \mathbb{R}^n . Označimo z $L(\mathcal{A})$ množico vseh *nepraznih* presekov hiperravnin iz \mathcal{A} , vključno s prostorom \mathbb{R}^n (ki je presek prazne družine hiperravnin). V $L(\mathcal{A})$ uvedemo dvomestno relacijo \leq *obratne vsebovanosti*: definirajmo, da je $x \leq y$, če je $x \supseteq y$. To je relacija delne urejenosti, množici $L(\mathcal{A})$ z relacijo \leq pravimo *delno urejena množica presekov* (angl. *intersection poset*).

Primer 5. Oglejmo si delno urejeno množico presekov za kitkasto razporeditev \mathcal{B}_3 . Prazni presek \mathbb{R}^3 je manjši od vseh preostalih (to se pravi: vsebuje vse preostale preseke kot podmnožice). Takoj nad \mathbb{R}^3 v Hassejevem diagramu pridejo preseki enoelementnih družin hiperravnin, se pravi hiperravnine same. Ker se vse tri hiperravnine sekajo v premici $x_1 = x_2 = x_3$, je v $L(\mathcal{B}_3)$ samo še en element, ki je večji od vseh preostalih (se pravi: je vsebovan v vseh preostalih presekih). Glej sliko 4, levo. Vzemimo še dve vzporedni premici v \mathbb{R}^2 . Imamo najmanjši element in dva elementa (premici), ki ga pokrivata. Ker se premici ne sekata, drugih elementov ni. Glej sliko 4, desno. \diamond



Slika 4. Hassejev diagram delno urejene množice presekov za kitkasto razporeditev \mathcal{B}_3 in razporeditev dveh vzporednih premic.

Takoj opazimo, da velja naslednje: $L(\mathcal{A})$ ima vedno minimalni element (torej element $\hat{0}$, za katerega velja $\hat{0} \leq x$ za vse $x \in L(\mathcal{A})$); to je \mathbb{R}^n , presek prazne družine hiperravnin. Elementi, ki pokrivajo $\hat{0}$, so kar hiperravnine same. Velja še, da ima $L(\mathcal{A})$ maksimalni element (torej element $\hat{1}$, za katerega velja $x \leq \hat{1}$ za vse $x \in L(\mathcal{A})$) natanko tedaj, kadar je \mathcal{A} centralna razporeditev: maksimalni element je v tem primeru kar $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$. Delno urejena množica presekov je stopničasta: preveriti se da, da je primerna funkcija

$$\text{rang}(x) = n - \dim x,$$

kjer je x običajna (afina) dimenzija elementa x (ki je presek hiperravnin in zato premaknjen vektorski podprostor). Na primer, za kitkasto razporeditev \mathcal{B}_3 imamo ves prostor \mathbb{R}^3 z rangom $3 - 3 = 0$, tri ravnine z rangom $3 - 2 = 1$ in premico $x_1 = x_2 = x_3$ z rangom $3 - 1 = 2$. Rang se res poveča za 1, ko se premaknemo navzgor po Hassejevem diagramu.

V teoriji delno urejenih množic ima pomembno mesto *Möbiusova funkcija*. Tu bomo predstavili njeno nekoliko poenostavljeno različico. Predpostavimo, da je P končna delno urejena množica z minimalnim elementom $\hat{0}$. Potem definiramo Möbiusovo funkcijo $\mu_P: P \rightarrow \mathbb{Z}$ takole: definiramo $\mu_P(\hat{0}) = 1$, za $x > \hat{0}$ pa potem vzamemo

$$\mu_P(x) = - \sum_{y < x} \mu_P(y).$$

Definicijo lahko zapišemo še drugače: velja

$$\sum_{y \leq x} \mu_P(y) = \begin{cases} 1 & : x = \hat{0} \\ 0 & : x \neq \hat{0} \end{cases}.$$

Kadar je jasno, o kateri delno urejeni množici govorimo, pišemo namesto μ_P samo μ .

Primer 6. Vzemimo naravno število n in definirajmo D_n kot množico vseh deliteljev števila n , urejeno z relacijo $|$ (deli). Lahko je preveriti, da je $(D_n, |)$ delno urejena množica. Preveriti se da, da je

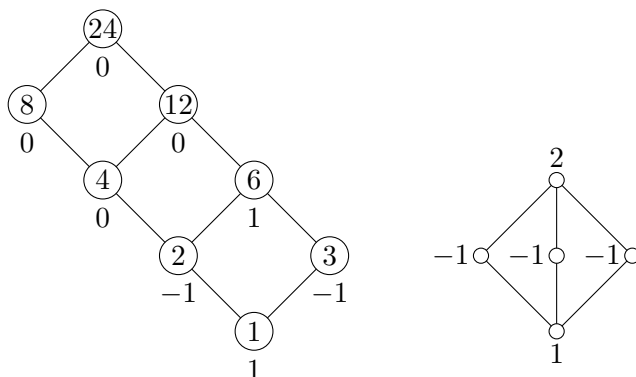
$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & : d \text{ je deljiv s kvadratom nekega praštevila,} \\ (-1)^k & : d = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ kjer so } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ različna praštevila} \end{cases}$$

Möbiusova funkcija v D_n . Tej funkciji pravimo tudi *klasična Möbiusova funkcija*, ki je pomembna v teoriji števil, glej [2]. Hassejev diagram D_{24} , skupaj z vrednostmi $\mu(d)$, je na sliki 5, levo. Slika 5, desno, prikazuje Möbiusovo funkcijo za $L(\mathcal{B}_3)$. \diamond

Izkaže se, da lahko večino pomembnih lastnosti delno urejene množice presekov in s tem razporeditve hiperravnin preberemo iz polinoma, ki izhaja neposredno iz Möbiusove funkcije delno urejene množice presekov.

Definicija 2. Naj bo \mathcal{A} razporeditev. Vemo, da je njena delno urejena množica presekov $L(\mathcal{A})$ končna in ima minimalen element, zato imamo na voljo Möbiusovo funkcijo μ . Definiramo *karakteristični polinom delno urejene množice presekov* s formulo

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{\dim x}.$$



Slika 5. Hassejev diagram in vrednosti Möbiusove funkcije za D_{24} in za $L(\mathcal{B}_3)$.

Primer 7. Za kitkasto razporeditev \mathcal{B}_3 imamo (glej sliko 5, desno)

$$\chi_{\mathcal{B}_3}(t) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2).$$

V naslednjem razdelku bomo dokazali, da velja splošna formula

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1). \quad \diamond$$

Element $\hat{0} = \mathbb{R}^n \in L(\mathcal{A})$ ima dimenzijo n . Za vsako hiperravnino imamo en element x dimenzije $n-1$, ki pokriva $\hat{0}$ in ima zato $\mu(x) = -1$. To pomeni, da velja

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n - |\mathcal{A}|t^{n-1} + \dots$$

Tu $|\mathcal{A}|$ označuje moč množice \mathcal{A} , se pravi število hiperravnin v razporeditvi \mathcal{A} .

Pomembnost karakterističnega polinoma najlepše predstavi naslednji izrek, ki ga bomo navedli brez dokaza.

Izrek 1 (Zaslavsky, 1975). Za poljubno razporeditev \mathcal{A} v \mathbb{R}^n velja $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$.

Na primer, za kitkasto razporeditev \mathcal{B}_n po izreku Zaslavskega in prejšnjem primeru dobimo

$$r(\mathcal{B}_n) = (-1)^n (-1)(-1-1)(-1-2) \cdots (-1-n+1) = n!,$$

kar se ujema z našim direktnim izračunom.

„Naivna“ metoda za izračun karakterističnega polinoma je, da na roko izračunamo vse neprazne preseke hiperravnin, narišemo Hassejev diagram delno urejene množice, z rekurzivno zvezo izračunamo vrednost Möbiusove

funkcije za vse njene elemente in zapišemo karakteristični polinom. Za razporeditve z veliko elementi in za neskončne družine razporeditev (npr. za kitkasto razporeditev, Catalanovo razporeditev) ta metoda običajno ni smiselna. V zadnjem razdelku bomo predstavili nekaj neočitnih metod za izračun karakterističnega polinoma.

Računanje karakterističnega polinoma

Whitneyjev izrek

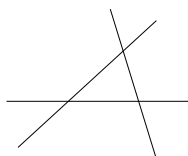
Spomnimo, da je razporeditev \mathcal{A} centralna, če je $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$. Za centralno razporeditev \mathcal{A} lahko definiramo $\dim \mathcal{A} = \dim \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$.

Če je razporeditev \mathcal{A} centralna, je centralna tudi vsaka njena podrazporeditev $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ (vključno s prazno podrazporeditvijo), saj je

$$\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \supseteq \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Če razporeditev ni centralna, so nekatere podrazporeditve centralne, nekatere pa ne. Označimo s $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ množico vseh centralnih podrazporeditev razporeditve \mathcal{A} .

Primer 8. Razporeditev premic \mathcal{A} v ravnini na sliki 6 ni centralna, saj se premice ne sekajo v isti točki. So pa centralne vse njene podrazporeditve, ki ne vsebujejo vseh treh premic. Tako ima $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ sedem elementov. \diamond



Slika 6. Necentralna razporeditev s sedmimi centralnimi podrazporeditvami.

Izrek 2 (Whitneyjev izrek, 1932). Za razporeditev \mathcal{A} v \mathbb{R}^n velja

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{C}(\mathcal{A})} (-1)^{|\mathcal{B}|} t^{\dim \mathcal{B}}.$$

Izreka ne bomo dokazovali. Omenimo samo, da dokaz uporabi pomembno dejstvo, da je delno urejena množica presekov *polmreža za stik* (angl. *meet-semilattice*), torej da imata vsaka dva elementa stik (največjo skupno spodnjo mejo), ter da je *mreža* (angl. *lattice*), torej da imata vsaka

dva elementa spoj (najmanjšo skupno zgornjo mejo), natanko tedaj, ko je razporeditev centralna. V mreži pa imamo za računanje Möbiusove funkcije posebno formulo, ki se pri razporeditvah poenostavi v Whitneyjev izrek.

Primer 9. Izračunajmo karakteristični polinom koordinatne razporeditve. Ker je koordinatna razporeditev centralna, je centralna tudi vsaka njena podrazporeditev. Za vsako podmnožico I množice $\{1, 2, \dots, n\}$ je presek ravnin $x_i = 0$, $i \in I$, podprostor dimenzije $n - |I|$. Po Whitneyjevem izreku je torej

$$\chi_{\mathcal{K}_n}(t) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} t^{n-|I|} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{n-k} = (t-1)^n.$$

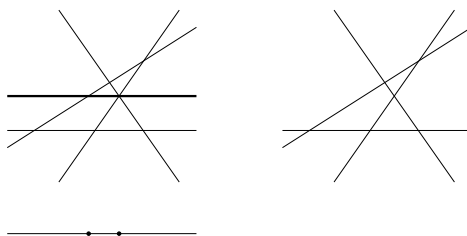
Tu smo uporabili dve dejstvi: prvič, da je število podmnožic moči k množice z n elementi enako binomskemu koeficientu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, in drugič, da velja binomski izrek $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Velja tudi $r(\mathcal{K}_n) = (-1)^n (-1-1)^n = 2^n$, kar smo že izračunali neposredno iz definicije. \diamond

Rekurzivna zveza

Dana je razporeditev \mathcal{A} . Izberimo poljubno hiperravnino $H_0 \in \mathcal{A}$. Označimo z \mathcal{A}' podrazporeditev $\mathcal{A} \setminus \{H_0\}$, se pravi razporeditev \mathcal{A} , ki ji odstranimo hiperravnino H_0 . Označimo z \mathcal{A}'' razporeditev, ki jo dobimo, če vse hiperravnine v \mathcal{A}' , ki imajo neprazen presek s H_0 , presekamo s H_0 . Natančneje,

$$\mathcal{A}'' = \{x \cap H_0 : x \in \mathcal{A}, x \neq H_0, x \cap H_0 \neq \emptyset\}.$$

Primer 10. Na sliki 7, levo zgoraj, je prikazana razporeditev \mathcal{A} premic v ravnini; premica H_0 je odebeljena. Desno zgoraj je razporeditev \mathcal{A}' , se pravi \mathcal{A} brez H_0 . Spodaj je prikazana razporeditev \mathcal{A}'' (v \mathbb{R}) presekov s H_0 . \diamond



Slika 7. Razporeditve \mathcal{A} , \mathcal{A}' in \mathcal{A}'' .

Opazimo, da sta \mathcal{A}' in \mathcal{A}'' „manjši“ razporeditvi kot \mathcal{A} ; obe imata manjše število elementov, \mathcal{A}'' pa je poleg tega tudi razporeditev v manjši dimenziji.

Izrek 3. Naj bodo $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ kot zgoraj. Potem velja

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Izrek je dokaj enostavna posledica Whitneyjevega izreka (ima pa tudi druge neodvisne dokaze).

Primer 11. Naj bo $G = (V, E)$ graf (brez zank). Barvanje grafa G s t barvami je izbira ene od t barv za vsako vozlišče, tako da povezani vozlišči nista pobarvani z isto barvo. Se pravi, barvanje je preslikava $c: V \rightarrow \{1, \dots, t\}$, za katero velja $ij \in E \Rightarrow c(i) \neq c(j)$. Definirajmo $P_G(t)$ kot število barvanj grafa G s t barvanji. Izkaže se, da je $P_G(t)$ polinom stopnje $|V|$, imenujemo ga *kromatični polinom grafa G* . Na primer, če je $G = K_n$ (poln graf na n vozliščih), imamo za prvo vozlišče na voljo t barv, za drugo samo še $t - 1$ barv itd. Torej je $P_{K_n}(t) = t(t - 1) \cdots (t - n + 1)$.

Kromatični polinom ustreza preprosti rekurzivni zvezi. Izberimo poljubno povezavo $e = ij$ grafa G in označimo z G' graf G brez povezave e , z G'' pa graf, kjer vozlišči i in j identificiramo, se pravi, ju nadomestimo z novim vozliščem, ki je povezano z vsemi vozlišči grafa $G \setminus \{i, j\}$, ki so v grafu G povezana z i ali j . Izberimo poljubno barvanje c grafa G' . Če sta vozlišči i in j pobarvani z različnima barvama, je c tudi barvanje grafa G . Če pa sta pobarvani z istima barvama, potem ju identificiramo in dobimo barvanje c'' grafa G'' . Dokazali smo

$$P_G(t) = P_{G'}(t) - P_{G''}(t).$$

Ta formula nas spominja na rekurzivno formulo za karakteristični polinom razporeditve. Dokažimo, da je za grafično razporeditev \mathcal{A}_G karakteristični polinom kar kromatični polinom grafa G , torej da velja $\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = P_G(t)$. Trditvev očitno velja za prazni graf na n vozliščih, saj sta oba polinoma enaka t^n . Predpostavimo, da trditvev velja za vse grafe z manj kot m povezavami, in naj bo $|E(G)| = m$. Izberimo povezavo $e = ij$ grafa G in označimo hiperravnino $x_i = x_j$ s H_0 . Če odstranimo H_0 , očitno dobimo razporeditev, ki pripada grafu G' ; se pravi, velja $(\mathcal{A}_G)' = \mathcal{A}_{G'}$. Po indukciji je $\chi_{(\mathcal{A}_G)'}(t) = P_{G'}(t)$. Če pa vsako hiperravnino presekamo s hiperravnino $x_i = x_j$, je učinek isti, kot če bi identificirali vozlišči i in j v grafu G ; se pravi, velja $(\mathcal{A}_G)'' = \mathcal{A}_{G''}$. Po indukciji je $\chi_{(\mathcal{A}_G)''}(t) = P_{G''}(t)$. Torej je

$$\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = \chi_{(\mathcal{A}_G)'}(t) - \chi_{(\mathcal{A}_G)''}(t) = P_{G'}(t) - P_{G''}(t) = P_G(t).$$

V posebnem je za kitkasto razporeditev

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = P_{K_n}(t) = t(t - 1) \cdots (t - n + 1). \quad \diamond$$

Metoda končnih obsegov

V tem podrazdelku bomo predstavili morda najbolj presenetljivo metodo za računanje karakterističnega polinoma, ki jo je v tej obliki zapisal Athanasiadis. Spomnimo se najprej, da obstaja končni obseg velikosti q natanko tedaj, ko je $q = p^k$ potenca praštevila. Vsi obsegi iste moči so izomorfní; označimo s \mathbb{F}_q (do izomorfizma določeni) obseg moči q . Karakteristika obsega \mathbb{F}_q je p : to pomeni, da v \mathbb{F}_q velja $p = 0$. Za $q = p$ je $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$, obseg ostankov pri deljenju s p .

Predpostavimo, da so vse hiperravnine podane nad obsegom racionalnih števil. Če vse enačbe pomnožimo s skupnim večkratnikom imenovalcev, dobimo enačbe s celimi koeficienti. Če vse koeficiente vzamemo po praštevilskem modulu p , dobimo enačbo nad končnim obsegom \mathbb{F}_q za $q = p^k$ za vsak k . Označimo dobljeno razporeditev nad obsegom \mathbb{F}_q z \mathcal{A}_q .

Lahko se zgodi, da je nova razporeditev bistveno drugačna od prvotne. Na primer, če začnemo s premicama $x = 0$ in $x = 2y$, ima $L(\mathcal{A})$ štiri elemente: \mathbb{R}^2 , obe premici in njun presek (izhodišče). Če pa vzamemo vse koeficiente modulo 2, dobimo samo eno premico $x = 0$, zato ima $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{2^k})$ samo dva elementa.

Ni pa težko dokazati, da velja $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_{p^k})$ (se pravi, \mathcal{A} in \mathcal{A}_{p^k} imata – do izomorfizma – isto delno urejeno množico presekov) za vse razen za končno mnogo praštevil p . Glavna prednost nove razporeditve je, da so vse hiperravnine zdaj *končne* množice (kot podmnožice končne množice \mathbb{F}_q^n), zato lahko računamo z njihovimi močmi. Naslednji izrek je tako dokaj preprost (uporabi samo neko osnovno lastnost Möbiusove funkcije, ki je v tem pregledu nismo omenili). Spomnimo, da H^C pomeni komplement množice H .

Izrek 4 (Athanasiadis, 1996). *Naj bo \mathcal{A} razporeditev v \mathbb{Q}^n in naj velja $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ za q , ki je potenca praštevila. Potem je*

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = q^n - \left| \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \right| = \left| \bigcap_{H \in \mathcal{A}_q} H^C \right|.$$

Primer 12. Oglejmo si, kako preprosto je z metodo končnih obsegov izračunati karakteristični polinom grafične razporeditve. Pišimo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$. Naj bo p dovolj velik, da je $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ za $q = p^k$. Če je H v \mathcal{A} podana z $x_i = x_j$, je H^C v \mathcal{A}_q množica točk $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n$, za katere velja $\alpha_i \neq \alpha_j$. Potem je

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(q) &= \left| \bigcap_{H \in \mathcal{A}_q} H^C \right| \\ &= \left| \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n : \alpha_i \neq \alpha_j \text{ za vsako povezavo } ij \in E(G)\} \right|. \end{aligned}$$

Zadnji izraz pa je po definiciji enak $P_G(q)$. Torej sta $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ in $P_G(t)$ polinoma, ki imata enako vrednost za neskončno mnogo vrednosti t , kar pomeni, da sta enaka. \diamond

Primer 13. Oglejmo si Shijevo razporeditev \mathcal{S}_n , ki je podana z $x_i - x_j = 0, 1$ za $i < j$. Za dovolj veliko praštevilo p velja

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(p) = |\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n : i < j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \text{ in } \alpha_i \neq \alpha_j + 1\}|.$$

Denimo, da imamo tako n -terico $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Narišimo $0, 1, \dots, p-1$ kot točke na krožnici, ki naraščajo v smeri urinega kazalca. Označimo točko α_1 z 1, točko α_2 z 2 itd. Ker je $\alpha_i \neq \alpha_j$ za $i \neq j$, ima vsaka točka največ eno oznako. Ker iz $\alpha_i = \alpha_j + 1$ sledi $i > j$, so zaporedne (v smeri urinega kazalca) oznake naraščajoče. Glej sliko 8 za $p = 11$, $n = 6$ in $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = (6, 1, 2, 7, 9, 3)$. Naj bo B_1 množica zaporednih oznak, ki se začnejo z 1; v našem primeru je to $\{1, 4\}$. Preskočimo eno točko in vzemimo za B_2 (lahko prazno) množico zaporednih oznak, ki se začnejo v naslednji točki; nadaljujemo. V našem primeru dobimo $B_1 = \{1, 4\}$, $B_2 = \{5\}$, $B_3 = \emptyset$, $B_4 = \{2, 3, 6\}$, $B_5 = \emptyset$. Ker vsaki množici B_i pripada natanko ena neoznačena točka, smo dobili $p-n$ disjunktnih množic $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$. Konstrukcija se da tudi obrniti: za dane disjunktno množice $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$, in izbrani $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p$ naredimo naslednje. Označimo točko α_1 z 1, naslednje točke označimo s preostalimi elementi B_1 . Preskočimo eno točko, označimo točke z elementi B_2 ; nadaljujemo. Za α_i potem vzamemo točko, katere oznaka je i .

Torej je $\chi_{\mathcal{S}_n}(p)$ enak številu izbir α_1 in disjunktnih množic $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$. Ker lahko α_1 izberemo na p načinov in ker imamo za $2, \dots, n$ na voljo $p-n$ množic B_i , kamor jih lahko damo, je možnosti $p(p-n)^{n-1}$. Torej je

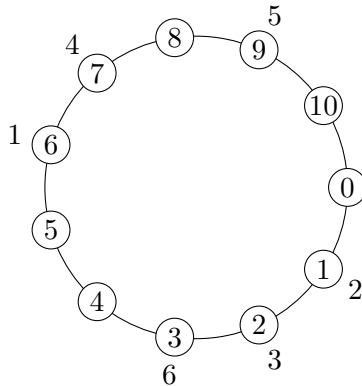
$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t-n)^{n-1}.$$

Iz tega takoj sledi, da je $r(\mathcal{S}_n) = (-1)^n \chi_{\mathcal{S}_n}(-1) = (n+1)^{n-1}$. \diamond

Primer 14. Izračun za Catalanovo razporeditev \mathcal{C}_n , podano z $x_i - x_j = 0, 1, -1$ za $i < j$, je zelo podoben. Za dovolj velik p velja

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(p) = |\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n : i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \text{ in } \alpha_i \neq \alpha_j \pm 1\}|.$$

Torej imamo enak preštevalni problem kot v prejšnjem primeru, le da zdaj dve sosednji točki ne smeta biti označeni. To pomeni, da bodo množice B_1, \dots, B_{p-n} , definirane kot zgoraj, imele največ en element. Za α_1 imamo



Slika 8. Računanje karakterističnega polinoma Shijeve razporeditve z metodo končnih obsegov.

spet p izbir, potem imamo $p - n - 1$ izbir, v katero od množic B_2, \dots, B_{p-n} damo element 2, $p - n - 2$ izbir, kam damo element 3, itd. Dobimo torej

$$\chi_{C_n}(t) = t(t - n - 1)(t - n - 2) \cdots (t - 2n + 1)$$

in $r(C_n) = n!C_n$. ◇

LITERATURA

- [1] M. Juvan, *Kombinatorne lastnosti razporeditev*, magistrsko delo, 105 strani, Ljubljana, 1993
- [2] E. Weisstein, *Möbius function*, MathWorld, dostopno na <http://mathworld.wolfram.com/MoebiusFunction.html>
- [3] R. Stanley, *An introduction to hyperplane arrangements*, Geometric combinatorics, 389–496, IAS/Park City Math. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN 64. OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE – VABILO K SODELOVANJU

Spoštovani člani DMFA Slovenije, učitelji, raziskovalci in vsi ljubitelji matematike, fizike in astronomije. Vljudno vas vabimo k sodelovanju na našem vsakoletnem srečanju, ki bo tokrat potekalo **v Rimskih Toplicah 19. in 20. oktobra 2012**. Tam bomo predstavili sedanjo dejavnost društva, k pripravi predavanj povabili nekaj uglednih slovenskih matematikov in fizikov, prisluhnili različnim strokovnim prispevkom naših članov in pripravili

nekaj razprav, delavnic in drugih aktivnosti. Vzporedno bo potekala tudi konferenca fizikov v osnovnih raziskavah. Vodilni temi strokovnega dela srečanja za učitelje bosta **Algoritmi pri pouku matematike** in **Preprosti fizikalni poskusi**, zaželeni pa so tudi prispevki o drugih aktualnih strokovnih temah s področja matematike, fizike ali astronomije. Za predavanja bodo na voljo konferenčni prostori (internet, projekcijsko platno, projektor), dobrodošli pa so tudi plakati, delavnice ali druge oblike predstavitev (po predhodnem dogovoru).

Prijava prispevkov za strokovno srečanje

Svoj prispevek prijavite tako, da izpolnite spletni obrazec na spletni strani <http://www.dmfa.si/ObcniZbor.html>. Rok za prijavo prispevkov je **15. september 2012**. Dokončen izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora. Kontaktni osebi sta dr. Boštjan Kuzman, bostjan.kuzman@pef.uni-lj.si (matematika), in mag. Nada Razpet, nada.razpet@pef.uni-lj.si (fizika).

Registracija za udeležbo

Predvidena kotizacija za udeležbo je 70 EUR (49 EUR za člane DMFA Slovenije); vanjo so vračunani bilten s povzetki, odmori s kavo in potrdilo o udeležbi na 16-urnem strokovnem srečanju. Registrirate se preko Infoserverta DMFA. Rok za prijavo je **30. september 2012**. Morebitne hotelske storitve si udeleženci rezervirajo sami; natančnejše informacije o možnostih hotelske namestitve bomo objavili pozneje na spletnih straneh.

Predlogi za društvena priznanja

Vabimo vas, da pisne predloge za letošnja društvena priznanja pošljete do **15. septembra 2012** na naslov *DMFA Slovenije, Komisija za društvena priznanja, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana*. Predlog mora ustrezati *Pravilniku o podeljevanju društvenih priznanj*, ki je objavljen na spletni strani <http://www.dmfa.si/Pravilniki>, njegova utemeljitev pa vsebovati dovolj podatkov, da bo komisiji omogočena vsestranska presoja in tehtna odločitev.

*Predsednik DMFA Slovenije
prof. dr. Sandi Klavžar*

<http://www.obzornik.si/>

SISTEM ENOT NA POTI DO SPREMEMB

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 06.20.fa, 06.30.Dr

Kopičijo se razlogi za večje spremembe v Mednarodnem sistemu enot SI. Odbori, v katerih o spremembah razpravljajo, priporočajo, naj bo javnost o predlogih čim bolj obveščena.

THE SYSTEM OF UNITS ON THE WAY TO CHANGES

Arguments for substantial changes of the International System of Units SI accumulate. Committees, within which the possible changes are discussed, recommend that the public should be maximally informed of the proposals.

Resolucija

Lanskega oktobra je bilo na sedežu Mednarodnega urada za uteži in mere BIPM v Sèvresu blizu Pariza 24. zasedanje Generalne konference za uteži in mere CGPM. Na njem so sprejeli Resolucijo 1 *O mogoči prihodnji spremembi Mednarodnega sistema enot SI* [1]. Nekateri razglašajo predloge za „največje spremembe sistema enot po francoski revoluciji“. Mednarodni odbor za uteži in mere CIPM, Posvetovalni odbor za enote CCU in sam BIPM priporočajo, da naj bosta o novih zamislih čim bolj obveščeni „znanstvena in uporabniška skupnost, da bi lahko ob pravem času upoštevali odzive in poglede“ na podlagi široke razprave.

Za bralce Obzornika povzemimo glavne misli iz premišljeno sestavljene resolucije, ki jo je na spletu vredno prebrati. Za uspešen zgled velja dogovor o metru iz leta 1983, ki je meter opredelil prek določene vrednosti za hitrost svetlobe v praznem prostoru. Največjo skrb povzroča dogovor o kilogramu, ki še edini sloni na izdelku človeških rok. Kaže, da se masa prakilograma, uradno Mednarodnega prototipskega kilograma IPK, ki ga v Sèvresu hranijo v kleti pod tremi povezniki in uporabijo „neposredno po čiščenju in umivanju na predpisan način“, s časom spreminja (slika 1). Tudi kilogram bi kazalo povezati s katero od „invariant narave – z osnovno fizikalno konstanto ali lastnostjo atomov“. Dogovor o kilogramu vpliva tudi na dogovore o amperu, molu in kandeli.

Že na 21. zasedanju Generalne konference leta 1999 so priporočili državnim metrološkim laboratorijem, „naj nadaljujejo prizadevanje, da bi poskusi, ki povezujejo enoto za maso z osnovnimi ali atomskimi konstantami,

postali natančnejši in bi bilo v prihodnosti mogoče spremeniti dogovor o kilogramu“. Odtlej so po vmesnih korakih prišli do osnutkov za predloge o novih dogovorih, ki jih razčlenjuje Resolucija.

- Enota za maso je kilogram, katerega velikost je povezana z določeno vrednostjo Planckove konstante $h = 6,626\ 06X \cdot 10^{-34}$ Js.
- Enota za tok je amper, katerega velikost je povezana z določeno vrednostjo osnovnega naboja $e_0 = 1,602\ 17X \cdot 10^{-19}$ As.
- Enota za temperaturo je kelvin, katerega velikost je povezana z določeno vrednostjo Boltzmannove konstante $k = 1,380\ 6X \cdot 10^{-23}$ J/K.
- Enota za množino snovi je mol, katerega velikost je povezana z določeno vrednostjo Avogadrove konstante $N_A = 6,022\ 14X \cdot 10^{23}$ /mol.

Pri tem X na zadnjem mestu zaznamuje „mesto ali dve, ki ju bodo dodali najnovejši podatki CODATA“.¹ Tako se v dogovoru o kelvinu ne bi bilo več treba sklicevati na lastnosti vode.

Dogovori za preostale tri enote ostanejo v bistvu nespremenjeni.

Enota za čas je sekunda, katere velikost je določena kot 9 192 631 770 nihajnih časov elektromagnetnega valovanja pri prehodu med stanjema, na kateri je razcepljeno osnovno stanje atoma cezija 133 v mirovanju pri temperaturi 0 K. Enota za svetilnost v dani smeri je kandela, katere velikost je povezana z določeno vrednostjo razmerja med fiziološko in fizikalno enoto za svetilnost 683 lm/W za enobarvno sevanje s frekvenco $540 \cdot 10^{12}$ s⁻¹.

Če bi bili ti dogovori sprejeti, nekateri podatki ne bi bili več natančni. Kilogram bi bil po novem določen enako natančno kot Planckova konstanta. Magnetna konstanta (indukcijska konstanta) μ_0 bi bila določena enako natančno kot konstanta fine strukture $\alpha = e_0^2/(4\pi\epsilon_0 c\hbar)$ s $\hbar = h/(2\pi)$.

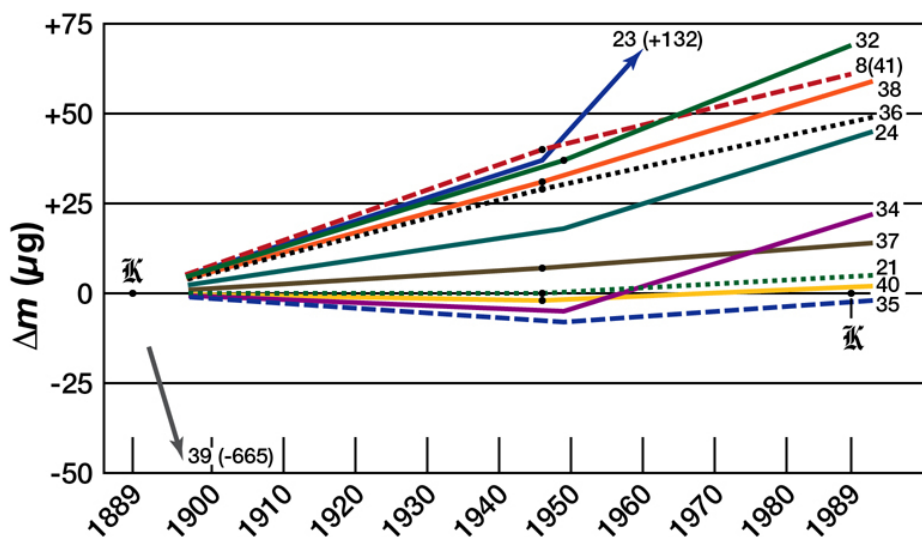
Molska masa ogljika ¹²C bi bila določena enako natančno kot produkt $N_A h$.

¹Delovna skupina za osnovne konstante CODATA od leta 1973 objavlja preglednice *priporočenih vrednosti osnovnih fizikalnih konstant*, v zadnjem času v *Reviews of Modern Physics*. Zadnja preglednica je izšla leta 2008 in je zajela merjenja do leta 2006. Konec marca 2012 so P. J. Mohr, B. N. Taylor in D. N. Newell poslali v tisk dolg članek *CODATA recommended values of the fundamental physical constants 2010*. Podatke zanj so zbirali od začetka leta 2007 do konca leta 2010. Za zdaj ga je mogoče prebrati na spletnem naslovu arXiv:1203.5425v1. Članek vsebuje za navedene konstante naslednje vrednosti: Planckova konstanta $6,62606957(20) \cdot 10^{-34}$ Js, osnovni naboj $1,602176565(35) \cdot 10^{-19}$ As, Boltzmannova konstanta $1,3806488(13) \cdot 10^{-23}$ J/K, Avogadrova konstanta $6,02214129(27) \cdot 10^{23}$ /mol. Navada je, da pri osnovnih konstantah v oklepaju navedejo negotovost na zadnjih dveh mestih.

Kilogram proti kilogramu

Za dogovor o kilogramu tekmujeta *elektronski kilogram* in *Avogadrov kilogram*. Kot kaže, Resolucija stavi na prvega, ki je določen preko Planckove konstante. Uresničili bi ga z *vatsko tehtnico*. Večje tehtnice te vrste delujejo v ameriškem Državnem inštitutu za standarde in tehnologijo NIST, v angleškem Državnem fizikalnem laboratoriju NPL, v švicarskem Zveznem uradu za metrologijo in akreditacijo METAS, v Mednarodnem uradu za uteži in mere BIPM in v francoskem Državnem laboratoriju za metrologijo in standarde LNE. Zamisel izhaja iz Ampèrove tehtnice, na kateri je nekdanj temeljil dogovor o amperu. Na raven vodnik s tokom I in dolžino l deluje pravokotno magnetno polje z gostoto B s silo $F = IlB$. V resnici tehtnice nista sestavljala vzporedna ravna vodnika, ampak tuljavi s skupno geometrijsko osjo. Težavno je bilo natančno ugotoviti velikost tuljav in njuno razdaljo.

Težavo je obšel Bryan P. Kibble s predlogom leta 1975. V prvem koraku s tokom v danem magnetnem polju uravnovesijo težo kilogramske uteži



Slika 1. Skupaj s prakilogramom so izdelali več enakih prototipov. Mase nekaterih od teh so ob treh priložnostih primerjali z maso prakilograma. Ta je po dogovoru natanko en kilogram in se ne spreminja (K–K). Po spremembah mase drugih etalonov, ki so zaznamovani z zaporednimi številkami, pa je mogoče sklepati, da se tudi masa prakilograma spreminja. Mase vseh prototipov ob izdelavi leta 1889 so vzeli za enake.

Vir: <http://en.wikipedia.org/wiki/Kilogram>.

$mg = IlB$. V drugem koraku se vodnik po tem magnetnem polju premika s hitrostjo v in izmerijo inducirano napetost $U = lvB$. Iz obeh enačb sledi zveza $m = UI/(gv)$. Produkt UI ima enoto watt, kar je tehtnici dalo ime. Tok in napetost izmerijo prek kvantnega Hallovega pojava s von Klitzingovo konstanto $R_K = h/e_0^2$ in prek Josephsonovega pojava z Josephsonovo konstanto $K_J = 2e_0/h$. Obe konstanti dasta Planckovo konstanto $h = 4/(K_J^2 R_K)$.

Za zdaj je najnatančnejša tehtnica v NIST [2]. Naprava je v dvanadstropni stavbi iz lesa brez kovinskih delov, da se izognejo elektromagnetnim motnjam. Tehtnica je tako občutljiva, da je treba upoštevati vpliv plimovanja. Uporabljajo superprevodni magnet. Tuljava se giblje v vakuumu, da se izognejo zračnemu uporu. Izmerili so Planckovo konstanto $h = 6,62606901(34) \cdot 10^{-34}$ Js z relativno negotovostjo $5 \cdot 10^{-8}$ [2].

Na drugi strani pri *Avogadrovem načrtu* sodeluje osem velikih metroloških laboratorijev in še druge ustanove z vsega sveta [3]. Izbrali so silicij, ki ga je mogoče dobiti zelo čistega. Naravni silicij sestavljajo trije izotopi 28 (92,2 %), 29 (4,7 %) in 30 (3,1 %). Zaradi težave z izotopsko sestavo so se odločili za obogatitev. V prečiščenem silicijevem hidridu so povečali delež najlažjega izotopa na 99,985 %. Iz njega so pridobili trden silicij in vzgojili velik monokristal. Iz kristala so izrezali dve krogli z maso po 1 kg in premerom 9,37 cm. Krogli so podrobno premerili in preverili njuno izotopsko sestavo in kristalno zgradbo. Pri merjenju so tako dobili dve vrsti podatkov, ki so jih lahko primerjali med seboj. Z rentgensko svetlobo so ugotovili razdaljo med sosednjima atomoma v kristalu. S tem so izračunali število silicijevih atomov v kroglih. Kristalizacija je delovala kot „ojačevalnik z majhnimi motnjami“ tako, da so se izognili neposrednemu štetju atomov. Nazadnje so dobili za Avogadrovo konstanto $N_A = 6,022\ 140\ 78(18) \cdot 10^{23}$ /mol, ki ji ustreza relativna negotovost $3,0 \cdot 10^{-8}$. Pri merjenjih z vatsko tehtnico naj bi na NIST dosegli že relativno negotovost $3,6 \cdot 10^{-8}$. Po dogovoru Generalna konferenca ne namerava predlagati dokončnih sprememb, preden relativne negotovosti ne bodo zmanjšali pod $2 \cdot 10^{-8}$.

Po pričakovanju sta se oblikovali dve skupini. Tisti, ki stavijo na električna merjenja, se zavzemajo za „elektronski“ dogovor, tisti, ki mislijo na število atomov, pa za „Avogadrovega“ [4]. CIPM je priporočil: „Ker je pomembno, da o osnovah našega sistema enot poučujemo v šolah in na univerzah, je zaželeno, da so definicije osnovnih enot razumljive za študente vseh strok, kolikor to dopušča sodobno naravoslovje.“ Nekateri zagotavljajo, da je „elektronski“ dogovor zapleten in številni šolarji ne poznajo Planckove konstante. Zato predlagajo dogovor: kilogram je $844466889^3 \cdot 1000$ atomov ogljika 12, ki niso vezani in mirujejo v osnovnem stanju [5]. Tak dogovor s celim številom atomov naj bi šolarji lažje razumeli. Zagotovo bo razprava še

vroča. Že zdaj v strokovnih revijah številni članki zagovarjajo eno ali drugo možnost. Generalna konferenca se ponavadi sestaja na štiri leta, naslednji sestanek pa načrtujejo že leta 2014. Tedaj lahko pričakujemo prve sklepe.

LITERATURA

- [1] Resolution 1 of the 24th of the CGPM (2001)
<http://www1.bipm.org/en/CGPM/db/24/1/>.
- [2] R. L. Steiner, E. R. Williams, D. B. Newell, R. Liu, *Towards an electronic kilogram: an improved measurement of the Planck constant and electronic mass*, *Metrologia* **42** (2005), 431–441.
- [3] B. Andreas in drugi, *An accurate determination of the Avogadro constant by counting the atoms in a ^{28}Si crystal*, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 030801.
- [4] R. P. Crease, *Metrology in the balance*, *Physics World* **24** (2011), 39–45 (3).
- [5] T. P. Hill, J. Miller, A. C. Cesullo, *Towards a better definition of the kilogram*, *Metrologia* **48** (2011), 83–86.

VESTI

STROKOVNA EKSKURZIJA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira v soboto, 22. septembra 2012, strokovno ekskurzijo na Avstrijsko Koroško. Ta bo vključevala tudi nekaj kulturnega programa. Avtobusni prevoz bo sponzoriralo DMFA.

Če želite prejemati nadaljnja obvestila, prosim, da to sporočite čim prej na naslov: Mitja.Rosina@ijs.si. Obenem se lahko tudi preliminarno (neobvezujoče) prijavite; prijave bodo možne tudi pozneje.

Okvirni program:

- *hiša eksperimentov* (fizika na igrišču) v Kočuhi pri Borovlju
- *Planetarij* v Celovcu,
- *Goršetova galerija* v Svečah,
- *Kraigherjeva galerija* v Bistrici v Rožu,
- (morda tudi Minimundus in živalski vrt plazilcev v Celovcu).

Prisrčno vabljeni!

Mitja Rosina

<http://www.obzornik.si/>

VIZUALIZACIJA VEKTORSKIH POLJ V FIZIKI Z UPORABO BARVNIH KOMBINACIJ

MILAN AMBROŽIČ IN MARKO GOSAK

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

PACS: 41.20 Gz, 41.20 Cv, 47.10 A-, 61.30 Cz

Razumevanje številnih fizikalnih pojavov je pogojeno z njihovo dobro predstavljenostjo v treh dimenzijah. Mednje spadajo deformacija trdnih teles, pretakanje tekočin, električni in magnetni pojavi, orientacija molekul v anizotropni mehki snovi itd. Številne od teh pojavov nazorno opisujemo z različnimi vektorskimi polji, na primer polji sil, ki se razprostirajo v tridimenzionalnem prostoru. Za vizualizacijo vektorskih polj je uveljavljenih veliko načinov, kot so prikaz usmerjenih daljic (puščic), silnic ali ekvipotencialnih ploskev, in vsak izmed njih uporablja bodisi prikaz v tridimenzionalni perspektivi bodisi izris karakterističnih presečnih ravnin. V tem prispevku predstavljamo zanimiv in do neke mere izviren način vizualizacije smeri vektorskih polj, in sicer z uporabo RGB (R = red = rdeča, G = green = zelena, B = blue = modra) barvnega sistema. Te tri barve priredimo osem kartezičnega koordinatnega sistema: rdečo za smer x , zeleno za smer y in modro za smer z . Z ustreznim mešanjem posameznih barv lahko tako v vsaki točki ponazorimo usmerjenost vektorja. Kot zgled pokažemo različne strukture električnih in magnetnih polj, hitrostno polje zračnih tokov okoli središča tornada ter nekatere nematične tekočokristalne strukture. Izkaže se, da uporaba takšnega barvnega ozadja, na katero so dodane še kratke daljice, poda nazorno informacijo o strukturi in lastnostih fizikalnega sistema.

VISUALIZATION OF VECTOR FIELDS IN PHYSICS WITH THE USE OF COLOUR COMPOSITIONS

A good imagination in three dimensions is crucial for a proper understanding of various physical phenomena. Examples include deformation of solids, fluid dynamics, electric and magnetic phenomena, orientational order in soft matter systems etc. Many of these phenomena are well described by various vector fields (e.g., force fields) in three-dimensional space. In order to effectively visualize vector fields, various methods have been established, such as drawing of field lines, arrows or equipotential lines. In all those cases the vector fields are presented either in three-dimensional perspective or in cross-section planes. Nevertheless, here we provide a novel way for the visualization of the directions of the vector fields with the RGB color system. The three axes of Cartesian coordinate system are assigned with three colors (R = red for x -axis, G = green for y -axis and B = blue for z -axis). The direction of a vector in each point can then be characterized with a proportional mixing of these colors. As a representative example we show various setups of electric and magnetic fields, the tornado's velocity field and some nematic liquid crystal structures. It turns out that using this technique, the structure and characteristics of a physical system can be visualized clearly, particularly when sticks are added to the colored background.

Uvod

Meteorologija, dinamika tekočin in elektromagnetizem je le nekaj področij, pri katerih se srečujemo z vektorskimi polji. Naše razumevanje posameznih pojavov pa je pogojeno z njihovo dobro predstavljivostjo, in to še zlasti, ko se polje razprostira v treh dimenzijah. Ključnega pomena pri tem je dobra vizualizacija, ki so ji strokovnjaki najrazličnejših panog v preteklosti namenili že veliko pozornosti [1]. Tradicionalne metode predstavitve vektorskih polj so prikaz usmerjenih daljic (puščic), silnic in ekvipotencialnih ploskev, ki lahko pri ponazoritvah bolj zapletenih struktur v treh dimenzijah postanejo neučinkovite. Za boljšo 3D predstavljivost so bile razvite tudi naprednejše metode, ki vključujejo uporabo tekstur, prosojnosti ali obarvanosti puščic. Na primer, za oris strukture paličastih tekočih kristalov v relativno enostavnih geometrijah radi posamezne podolgovate molekule ponazorijo s pobarvanimi elipsoidi, kjer barve ustrezajo določeni lokalni usmerjenosti molekul [2]. Takšen prikaz je lahko pomanjkljiv v zelo kompleksnih geometrijah, ki vsebujejo domene in defekte [3], saj bi potrebovali res ogromno elipsoidov za ustrezno simulacijo strukture, s tem pa se preglednost izgubi.

V tem prispevku predstavimo do neke mere inovativen in relativno preprost način vizualizacije vektorskih polj. Naši prikazi temeljijo na izrisu dvodimenzionalnih presečnih ravnin, na katerih opazujemo projekcije vektorskih polj na izbrano ravnino. Popolnejšo sliko o smereh polja v treh dimenzijah dobimo potem z izrisom snopov vzporednih ravnin v različnih smereh. Pri prikazu smeri na dani ravnini uporabimo barvne kombinacije, vendar pri tem ne obarvamo posameznih daljic ali puščic, temveč celotno ravnino, pri čemer barva posamezne točke ponazarja lokalno smer vektorskega polja. Za podkrepitev slike obarvano ozadje dopolnimo še s paličicami. Prikazali bomo nekaj primerov vektorskih polj (samo smeri in ne velikosti): električno polje dipola in kvadrupola, magnetno polje okoli tuljave, hitrostno polje vetra v okolici tornada ter dve tekočokristalni strukturi, kjer barve ponazarjajo usmerjenost molekul tekočega kristala. Pripravili smo tudi prikaz in animacije za številne druge sisteme, kot so električno polje okoli dveh ali štirih enakih nabojev in okoli naelektrene zanke, električnega oktopola, magnetno polje okoli vodnika in zanke, po katerih teče električni tok, ter različnih tekočokristalnih struktur. Vsi primeri so v obliki Power-Point predstavitev objavljeni na spletu in prosto dostopni na spletni strani: <http://kompetence.uni-mb.si/gradiva.html>.

Prikaz smeri vektorjev z barvami

Za izris barvnega ozadja uporabimo znani RGB sistem za mešanje barv, ki je neposredno povezan tako z osnovnimi mehanizmi zaznavanja barv v našem

očesu kakor tudi z delovanjem barvnih monitorjev in televizorjev [4–6]. V očesu imamo tri vrste čutnih celic za barve (čepnice), ki so vsaka zase najbolj občutljive za rdečo, zeleno in modro svetlobo. Te tri barve so opredeljene kot osnovne ali primarne barve, vse druge pa lahko dobimo z ustreznim seštevalnim mešanjem teh treh barvnih svetlob. Zastopanost posamezne osnovne barve je največkrat določena s celo-številčno vrednostjo med 0 in 255. V praksi to pomeni, da je v RGB zapisu rdeča barva definirana kot (255,0,0), zelena kot (0,255,0) in modra kot (0,0,255). Preostale spektralne barve dobimo z različno zastopanostjo posameznih barv. Na primer: zapis (255,255,0) pomeni rumeno barvo, medtem ko zapis (180,180,0) ponazarja odtenek rjave barve. Več o tovrstnem mešanju barv v navezavi z delovanjem barvnih monitorjev lahko zainteresiran bralec najde v [5, 6].

Naša osnovna ideja pri ponazoritvi smeri vektorjev z RGB barvnim principom je, da tri osnovne barve priredimo osem kartezičnega koordinatnega sistema: rdečo za smer x , zeleno za smer y in modro za smer z . Naj ima enotski vektor \mathbf{n} (dobimo ga z normiranjem nekega fizikalnega vektorja, npr. $\mathbf{n} = \mathbf{E}/E$ za električno polje) komponente $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Tedaj lahko deleže RGB barv pri obarvanju točke, kjer se ta vektor nahaja, določimo takole: $R = n_x^2$, $G = n_y^2$, $B = n_z^2$, tako da velja $R + G + B = 1$. Potem lahko uporabimo kak računalniški program, kot je Mathematica, ki omogoča poljubno mešanje RGB barv za grafične objekte. Namesto tega bi lahko delež barv podali v skali celih števil od 0 do 255, vendar pa uporabljena skala ne vpliva na končno sliko. Vsi prikazi so seveda dvodimenzionalni (2D), kar pomeni, da opazujemo na eni sliki le smeri 3D vektorskih polj na izbrani ravnini. Če je to na primer ravnina xy , pomeni to dvoje: 1) gledamo lokalno 3D polje v točkah te ravnine, 2) s paličicami vidimo samo pravokotno projekcijo polja na to ravnino, torej ne vidimo komponente n_z . Da dobimo 3D vtis, vzamemo snop vzporednih ravnin v določeni smeri, potem pa še snop vzporednih ravnin v neki drugi smeri. Paličice, ki jih dodamo na barvno ozadje, nimajo puščice na ustreznem koncu, zato je potrebno nekaj previdnosti, saj lahko isti prikaz ponazori dve geometriji z nasprotno usmerjenimi vektorji, na primer: pri električnih poljih odvisno od izbranih predznakov nabojev.

Električno polje električnega dipola

Električni dipol ponazorimo s parom nasprotno enakih točkastih nabojev $\pm e$, njuno medsebojno razdaljo d pa normiramo na $d = 1$. Zaradi praktičnih razlogov naboja postavimo na os z , v točki $(0, 0, \pm 1/2)$. Električno polje v poljubni točki prostora preprosto izračunamo kot vektorsko vsoto posameznih polj zaradi obeh nabojev, pri čemer pazimo na predznaka nabojev. Ponazoritev smeri električnega polja je prikazana v zgornji vrstici

slike na strani XI (notranja stran ovitka). Koordinata z na levi sliki nam pove, za koliko je opazovana ravnina oddaljena od simetrijske ravnine xy med nabojema. Podobno pomeni koordinata y na desni sliki oddaljenost opazovane ravnine od ravnine xz , v kateri ležita oba naboja.

Električno polje kvadrupola

Dva pozitivna in dva negativna naboja (dva antiparalelna dipola drug ob drugem) imenujemo električni kvadrupol. Vse štiri naboje postavimo v xy ravnino, v točke $(\pm 1/2, \pm 1/2, 0)$. Podobno kot pri izračunu električnega polja okoli dipola tudi tukaj smer polja v poljubni točki določimo kot superpozicijo prispevkov vseh štirih nabojev. Oblika električnega polja je prikazana v drugi vrstici slike na strani XI. Boljšo tridimenzionalno predstavo električnega polja kvadrupola lahko bralec pridobi ob pogledu na sliko na naslovni strani revije, kjer so prikazane po tri vzporedne ravnine v dveh smereh.

Magnetno polje ravne tuljave

Tuljavo oblikuje N enakih spiralnih zavojev žice na valju z dolžino l in polmerom R_{tul} . Če po žici teče električni tok, se okoli tuljave vzpostavi magnetno polje, ki ga v dani točki izračunamo numerično z integriranjem vektorskih prispevkov po vseh krožnih zankah, kot veleva Biot-Savartov zakon [7]. Predpostavili smo, da ne naredimo velike napake v izračunu polja, če spiralne zavoje nadomestimo z vzporednimi krožnicami. V našem primeru smo za geometrijsko os tuljave izbrali os z , središče pa ima v izhodišču. Tuljava ima polmer $R_{\text{tul}} = 1$ in je sestavljena iz $N = 15$ ovojev, pri čemer je razdalja med sosednjima ovojem $\delta z = 0.2$, tako da sega tuljava od $z = -1.4$ do $z = 1.4$. Iz tretje vrstice na sliki na strani XI je razvidno, da je polje znotraj tuljave zelo homogeno in usmerjeno vzdolž simetrijske osi, medtem ko je v bližini krajišč in v zunanosti nehomogeno.

Hitrostno polje vetra v tornadu

Vsako leto urbana območja v različnih predelih sveta prizadenejo močni nevihtni vetrovi v obliki lijakastih zračnih vrtnicev. Tak silovito vrteči se stolp zraka, ki se spusti iz nevihtnega oblaka in se dotika tal, imenujemo tornado. Njegov značilni premer je nekaj deset metrov, hitrosti vetrov v njem pa lahko dosega tudi več sto kilometrov na uro. Omeniti je treba, da vidni del vrtečega se stolpca zraka zajema le približno devetino celotnega območja vrtenja tornada, vendar hitrost vetra z oddaljenostjo od središča slabi [8]. Uničujoča narava tega sicer impresivnega pojava kakor tudi nepoznavanje

vseh mehanizmov, ki vodijo do njegovega nastanka, sta spodbudila številne raziskave na tem področju. Na področju mehanike tekočin so bili izdelani številni matematični modeli, od katerih si raziskovalci obetajo poglobljen vpogled v nastanek in delovanje tornadov. Tukaj predstavimo preprost statični model, imenovan Burgers-Rottov vrtinec [9], ki opisuje hitrostno polje vetrov v tornadu in predstavlja eksaktno rešitev Navier-Stokesove enačbe. Kljub svoji relativni preprostosti dokaj realno opiše razmere v tornadu. V izvirnem in našem prirejenem brezdimenzijskem zapisu ima naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} v'_r &= -\alpha r' \rightarrow v_r = -kr, \\ v'_\varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi r'} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha r'^2}{2\gamma}}\right) \rightarrow v_\varphi = \frac{1 - e^{-r^2}}{r}, \\ v'_z &= 2\alpha z' \rightarrow v_z = 2kz, \end{aligned} \quad (1)$$

pri čemer so v_r , v_φ in v_z komponente hitrosti v cilindričnem koordinatnem sistemu. Tako se radialna komponenta v_r nanaša na komponento hitrosti v radialni smeri (vlek navznoter), azimutalna komponenta v_φ ima smer tangente na krožnico, komponenta v_z pa ponazarja hitrost v navpični smeri. V izvirni obliki so komponente hitrosti ter radij r in koordinata z seveda zapisani v pravih dimenzijah. Kot je razvidno iz enačb (1), smo renormalizirali radij takole: $\alpha r'^2/2\gamma \rightarrow r^2$, in skladno s tem tudi koordinato z . Hitrostno komponento v_φ smo renormalizirali takole: $2\pi v'_\varphi/\Gamma \rightarrow v_\varphi$, in skladno s tem tudi drugi dve komponenti. Parameter k je zdaj edini prosti parameter, za vrednost katerega smo izbrali $k = 0.002$. To vrednost smo dobili iz značilnih podatkov za dimenzije in hitrosti tornada iz literature (če k prej izrazimo z dimenzijskimi parametri α , Γ in γ). Račun pokaže, da je največja vrednost azimutalne komponente hitrosti tornada dosežena pri brezdimenzijskem $R_{\text{tor}} = 1.12$, kar lahko razumemo kot premer jedra tornada. Pred barvno ponazoritvijo smeri vetra moramo seveda zapis enačb (1) pretvoriti iz cilindričnih v kartezične koordinate. V četrti vrstici slike na strani XI je prikazana usmerjenost vetrov do razdalje $r = 25 \approx 22R_{\text{tor}}$. Območje notranjosti tornada je ponazorjeno z belo krožnico (ravnina xy) oziroma z belima črtama (ravnina xz). Vidimo, da se v okolici tornada vetrovi vrtinčijo in da z višino narašča komponenta vetra v smeri koordinate z (proti nevihtnim oblakom), radialna komponenta hitrosti pa na velikih višinah postaja vse bolj zanemarljiva.

Polje nematskega direktorja v tekočih kristalih

Tekoči kristali so snovi, ki po eni strani kažejo lastnosti tekočin, po drugi pa je zanje značilna mikroskopska urejenost in optična anizotropija, s katerima

se srečujemo pri trdnih kristalih. Molekule, ki jih sestavljajo, so podolgovate (obstajajo tudi tekoči kristali s ploščatimi molekulami, a teh ne bomo obravnavali). Zaradi velike občutljivosti in odzivnosti na zunanje motnje kakor tudi zaradi zanimivih optičnih lastnosti so tekoči kristali dandanes osnova za delovanje številnih modernih tehnoloških naprav [10]. Optične lastnosti namreč niso odvisne samo od vrste tekočega kristala, ampak tudi od njegove strukture, to je notranje razporeditve leg in smeri molekul. Na primer: pri nematskih tekočih kristalih (NTK), ki jih največ uporabljamo, je najpomembnejša razporeditev smeri podolgovatih molekul. Njihovo usmeritev opišemo z lokalnim direktorjem \vec{n} , ki ponazarja lokalno usmerjenost molekul tekočega kristala v volumenskem elementu. Omejili se bomo na raziskave struktur v omejeni geometriji, na primer med tankimi stenami ali steklenimi kapilarami, kjer prihaja do interakcij med NTK in površino, kar lahko vodi tudi do defektov. Nastale strukture so lahko precej zapletene, zaradi česar je še posebej pomembno, da jih znamo dobro in nazorno prikazati. Na tem mestu bomo prikazali dve različni strukturi NTK, ki je ujet v cilindrično poro [11], in sicer valjno pobeglo radialno strukturo ter valjno radialno zvito strukturo.

Valjna pobegla radialna struktura NTK nastane pri določenih pogojih v cilindrični pori [11]. Le-ta mora biti dovolj ozka, stene pa morajo molekulam ob njih vsiljevati smer, ki je pravokotna na rob. Simetrijsko os valja postavimo na os z , tako da je usmeritev molekul neodvisna od koordinate z . V spodnji vrstici slike na strani XI (prvi in tretji prikaz) je prikazano, kako so v notranjosti molekule poravnane vzporedno s simetrijsko osjo valja, medtem ko so z oddaljevanjem od te osi vedno bolj zasukane in so na robu pravokotne tako na površino kot na simetrijsko os.

Tudi pri valjni radialni zviti strukturi imamo molekule NTK ujete v tanki cevi, katere simetrijska os leži na osi z , tako da je usmerjenost molekul neodvisna od te koordinate. Čeprav so tudi v tem primeru z oddaljevanjem od simetrijske osi molekule vedno bolj zasukane, pa je s slike na strani XI (spodnja vrstica, drugi in četrti prikaz) razvidno, da je sukanje drugačno kot pri valjni pobegli radialni strukturi. Tukaj se molekule sukajo okrog ustreznih radialnih osi (od tod ime strukturi), tako da so ob površju valja vzporedne s površino in ne pravokotne kot pri prejšnjem primeru. Takšno strukturo najlažje dobimo, če uporabimo vijačni NTK, ki ima sam po sebi težnjo po sukanju molekul v določeno smer.

Možnosti nadgradnje prikazov

Poudariti moramo še eno stvar o prikazu smeri polj s paličicami. Opazujmo spet projekcijo lokalnega polja v ravnini xy , kot smo omenili v uvodu. Spomnimo se, da gre pri našem prikazu za enotske vektorje, na primer $\mathbf{n} = \mathbf{E}/E$.

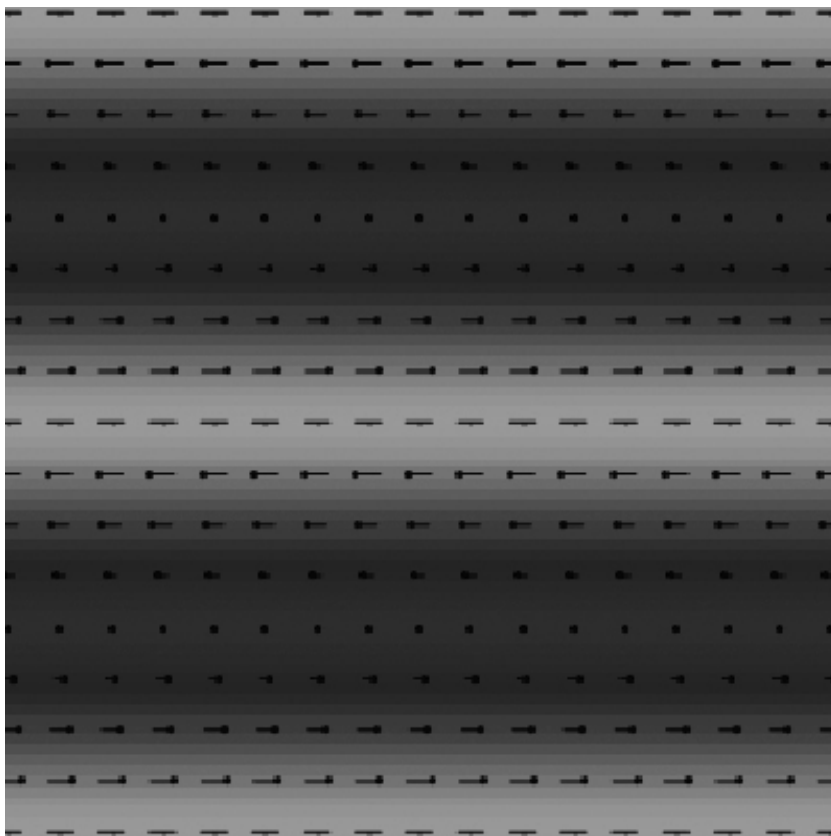
Čeprav v tej projekciji ne „vidimo“ smeri z , pa vseeno lahko sklepamo o komponenti n_z iz *dolžin paličic*. Krajše paličice v ravnini xy pomenijo večjo komponento n_z ; če se paličica na nekem mestu izrodi v pičico, pomeni to $\mathbf{n} = (0, 0, \pm 1)$, na to nas opozori tudi čista modra barva ozadja. Če bi hoteli poleg smeri vektorjev v prostoru prikazati tudi njihove velikosti, bi si morali pomagati drugače, ne z dolžino paličic (morda z njihovo debelino, česar še nismo poskusili).

Še vedno pa obstaja neka nedoločenost glede smeri polja, najsi ga prikazemo s paličicami (pa naj imajo te usmerjevalno puščico na enem koncu ali ne) ali z RGB ozadjem ali kombinirano. Za razlago problema vzemimo preprosto primer v projekciji v ravnini xy , ko lokalno polje nima komponente n_y , torej je paličica vzporedna z osjo x . Recimo, da iz njene dolžine sklepamo, da sta komponenti n_x in n_z enako veliki, torej nam iz normalizacije vektorja ostanejo le štiri možnosti: $\mathbf{n} = (\pm 1/2^{1/2}, 0, \pm 1/2^{1/2})$. Za popolnejšo informacijo vzemimo še, da je paličica usmerjena s puščico na desni strani, kar pomeni, da je komponenta n_x zagotovo pozitivna. Še vedno pa ne moremo poznati predznaka komponente n_z . Ne vemo, ali štrli desni (opuščičeni) konec paličke nad ravnino xy ali pod njo. Gre za dve različni smeri lokalnega vektorja, to pa je precej slabše, kot če bi nam bilo neznan samo to, ali kaže vektor v eno smer ali vzporedno nasprotno smer. V nekaterih simetričnih strukturah nas delno pomanjkanje informacije o smeri polja ne moti, posebno če se nam smer popolnoma razkrije v drugih projekcijskih ravninah, na primer ravnini xz . Pri opisanem gradivu se zato s tem problemom nismo ukvarjali. Lahko pa uporabimo razne preproste trike: npr. na tisti strani paličice, ki gleda nad dano projekcijsko ravnino, dodamo na konec majhno bunkico (pozor: to ni isto, kot če paličici dodamo vektorsko puščico!). Za zgled si oglejmo sliko helične tekočerkristalne strukture desnosučnega vijajnega NTK v projekciji xy (slika 1). Sučna os je os y : smer vektorjev se spreminja samo v tej smeri, ni pa odvisna od koordinat x in z . To pomeni, da je v vsaki ravnini, pravokotni na os y , polje homogeno. V katero smer se molekule vrtijo pri sprehajanju v smeri y , je glede na pomen bunkic bralcu takoj jasno in ne potrebuje še projekcije na ravnino xz .

Testiranje v šoli in sklep

Opisana vizualizacija je lahko zanimiva poživitev pouka fizike v srednjih in visokih šolah, uporabili pa bi jo lahko tudi na drugih področjih, kjer bi želeli na relativno preprost način prikazati zapletene tridimenzionalne strukture: v inženirstvu, osnovni in aplikativni znanosti (predvsem na njenih naravoslovnih in tehničnih področjih, pa tudi v zvezi z nekaterimi športnimi dejavnostmi), pri popularizaciji znanosti, itd.

Da bi preverili uporabnost in učinkovitost zamišljenega RGB prikaza



Slika 1. Ponazoritev smeri molekul vijačnega NTK z dodatno uporabo „bunkic“ na paličicah (ravnina xy). Zaradi črno-belega izpisa so smeri ponazorjene s sivinami namesto z barvami: svetlo-siva predstavlja usmerjenost vzdolž osi x , temno-siva vzdolž osi z (pravokotno na ravnino papirja), y komponenta pa na prikazu ni prisotna.

smeri vektorskih polj, smo pripravili tudi ustrezno gradivo z nekaterimi od naštetih fizikalnih sistemov za izvedbo v eni šolski uri in ga testirali pri dijakih (en oddelek maturitetnega četrtega letnika) in študentih fizike. Pri dijakih smo gradivo testirali v okviru projekta *Razvoj naravoslovnih kompetenc* [11–13]. Delež pravilnih odgovorov na različna vprašanja o tekočerkristalnih strukturah se je gibal med 30 % in 80 %, študentje pa so bili pri testiranju nekoliko uspešnejši od dijakov v četrtem letniku. Velike so bile tudi razlike v uspešnosti odgovarjanja med posameznimi osebami, kar priča o tem, da so nekateri zelo dobro in hitro ujeli idejo prikaza smeri vektorskih polj z barvnimi kombinacijami, drugim pa v sicer relativno kratkem času to ni uspelo. V neformalnih pogovorih, ki smo jih izvajali po testiranju, so nam

študentje zaupali, da se jim način prikaza z RGB barvnim principom zdi dober, vendar se mora človek nanj navaditi. Bolj oprijemljivih sklepov nam rezultati ne morejo podati, saj je bil vzorec testiranih oseb dokaj skromen, rezultati pa so lahko odvisni tudi od tega, ali je predavatelj dijakom oziroma študentom dajal kake sugestije med predvajanjem PowerPoint prosojnic. Če povzamemo, dijaki in študentje so bili sposobni dokaj hitro usvojiti spretnost vizualizacije prostorskih smeri z barvami. Omenimo še, da je takšen način obarvanja presečnih ravnin še posebej koristen tam, kjer paličke ali puščice same po sebi ne zadostujejo za enoličen prikaz smeri vektorskega polja, kar se dogaja v bolj zapletenih sistemih [11].

LITERATURA

- [1] F. H. Post, J. J. van Wijk, *Visual representation of vector fields: Recent developments and research directions*, Scientific Visualization: Advances and challenges, Academic Press, 1994, Waltham, ZDA.
- [2] A. Sazonovas, S. Orlandi, M. Ricci, C. Zannoni in E. Gorecka, *A computer simulation study of the ordered phases of some mesogenic fullerene derivatives*, Chem. Phys. Lett., 2006, 430, str. 297.
- [3] P. G. De Gennes in J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Oxford University Press, 1993, Oxford.
- [4] C. G. Mueller, *Svetloba in vid*, Mladinska knjiga, 1970, Ljubljana.
- [5] V. Grubelnik in M. Marhl, *Kako delujejo barvni monitorji?* Fizika v šoli 12, 2006, str. 10.
- [6] Dodatek k članku [5]: *Kako delujejo barvni monitorji?*; dostopno na: http://www.grubelnik.com/zaznavanje_barv/
- [7] J. Strnad, *Fizika, 2. del*, DMFA – založništvo, 1995, Ljubljana.
- [8] M. Demšar, *Tornado*, 2004, pridobljeno iz svetovnega spleta na: <http://www.kvarkadabra.net/article.php/2004042718192588>
- [9] P. Markowski in Y. Richardson, *Mesoscale Meteorology in Midlatitudes*, John Wiley & Sons Ltd., 2010, Chicester, UK.
- [10] M. Vilfan in I. Muševič, *Tekoči kristali*, DMFA – založništvo, 2002, Ljubljana.
- [11] M. Milfelner, M. Ambrožič, M. Krašna, M. Cvetko, A. Zidanšek in R. Repnik, *Visualization of nematic director field with the RGB color system*, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 2012, 553, str. 50.
- [12] *Razvoj naravoslovnih kompetenc*; pridobljeno 28. 12. 2011 z: <http://kompetence.uni-mb.si/>
- [13] V. Grubelnik (ur.), *Opredelitev naravoslovnih kompetenc (znanstvena monografija projekta RNK)*, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2010, Maribor.

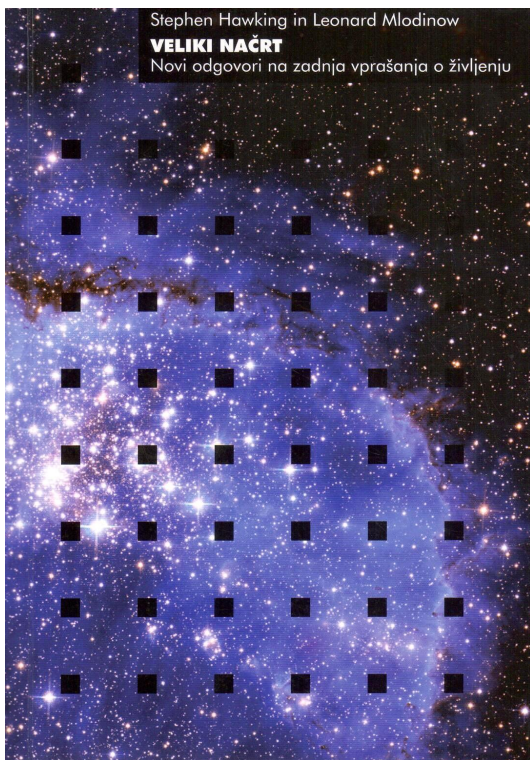
Stephen Hawking in Leonard Mlodinow: Veliki načrt, Novi odgovori na zadnja vprašanja o življenju, DMFA – založništvo, Ljubljana 2011, 164 str.

Naslov, ki veliko obeta ...

Avtorja, ki ju ni treba posebej predstavljati ... No, drugega mogoče. Mlodinow je teoretik, matematični fizik, ki je (bil) dejaven na polju kvantne mehanike, zdaj pa je njegov interes raztresen na široko, najbolj pa po popularni in poljudni znanosti, dela pa na Caltechu.

Naj se zdaj vrnem h knjigi. Njen podnaslov je „Novi odgovori na zadnja vprašanja o življenju“. Avtorja že uvodoma ugotovita, da je filozofija mrtva in da le še znanost lahko odgovori na večna vprašanja človeštva, kot so „Zakaj je nekaj, ne nič?“, „Zakaj obstajamo?“ ter „Zakaj ta niz zakonov in ne drug?“

Kot rečeno, knjiga veliko obeta. Vprašanje je, ali to tudi ponudi. Sam mislim, da ne. Je pa vsekakor vredna branja. Če drugega ne, ponuja zanimive iskricke, zglede in mogoče bo poznavalcu tematike dala misliti, kakšen je nivo, na katerem je treba komunicirati s splošno populacijo. Avtorja dokazujeta, da za svet, kot ga dojemamo, Bog ni potreben. Ta debata je zelo razširjena na Zahodu, pri nas pa bo mogoče nerazumljena in se nam bo morda zdela celo nepotrebna. V delu zaznamo namig, da Velika enotna teorija (GUT) ne drži, avtorja sta bolj naklonjena teoriji M in zgodovini mnogoterih vesolij. Po mojem mnenju nekoliko pristransko, saj avtorja sama priznavata, da je naš opis narave bolj ali manj le model tega, kar

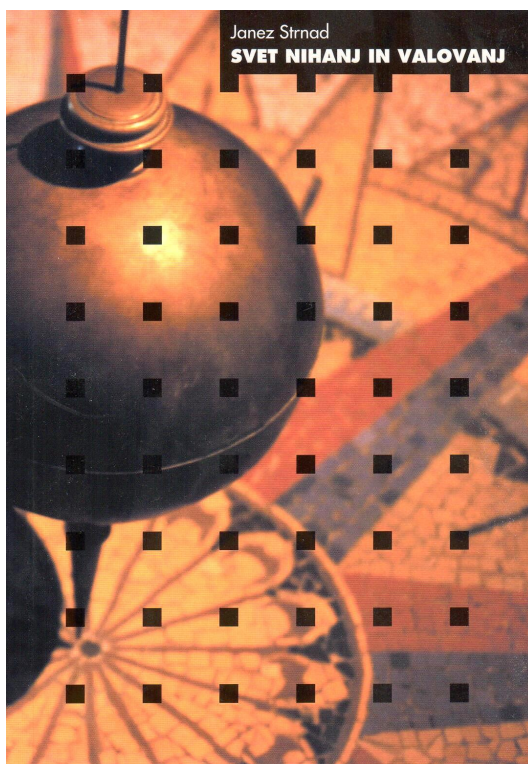


dojemamo, in velikega uspeha standardnega modela pri opisu rezultatov poskusov ne bi smela enačiti z modeli, za katere si težko predstavljamo, kako bi jih s poskusi pravzaprav podprli. Pohvalil bi zgodovinski pregled znanja o vesolju, ki je verjetno ravno dovolj obsežen in zanimiv za nekoga, ki bo o tem prvič bral. Delo je bilo v tujini prodajna uspešnica, za kar sta bila verjetno dovolj že zvezdniška avtorja in provokativen naslov, doživelo pa je mešane odzive. Kritičnih celo več kot pozitivnih. Knjigo je prevedel Janez Strnad, v okviru Knjižnice Sigma pa jo je izdalo DMFA – založništvo. Obsega 164 strani (ravno prav za na plažo) in jo dobite po članski ceni 14,95 EUR.

Aleš Mohorič

Janez Strnad: Svet nihanj in valovanj, DMFA – založništvo, Ljubljana 2010, 200 str.

Knjiga „Svet nihanj in valovanj“ avtorja Janeza Strnada, izdana pri založbi DMFA – založništvo, opisuje pojav nihanja in valovanja čez vse veje fizike. Nihanja in valovanja so zelo pomembna pri raziskovanju v fiziki in v vsakdanjem življenju ter segajo v veliko vej fizike. Zavest o vezeh med vejami fizike prispeva k razumevanju zakonov fizike in zaupanju vanje. Razlaga z opisom enega pojava se razlikuje od običajnega poučevanja, pri katerem postopno pridejo na vrsto vse veje fizike. Ta postopek je nekoliko nenavaden, a zanimiv in inovativen ter poživi pogled na fiziko. Tak način sicer ne more nadomestiti poučevanja, a je smiseln za tiste, ki bi radi poglobili svoje znanje.



Knjiga je razdeljena na dve poglavji – svetova: Svet nihanj in Svet valovanj. Razdelitev je smiselna, čeprav je v nekaterih primerih težko ločiti med pojavoma, a avtor se tem zagatam uspešno izogne in rdeča nit pripovedi lepo teče skozi celotno delo. Svet nihanj je razdeljen na podpoglavja Prema nihanja, kjer so sistematično in pregledno razloženi pojmi, ki kasneje služijo razlagi drugih pojavov, Sučna nihanja ter Električna nihanja. Svet valovanj je razdeljen na podpoglavja Valovanja v mehaniki, Elektromagnetno valovanje ter Gravitacijsko valovanje.

Poglavja so odlično grafično podprta, spremljajo jih zanimivi zgledi iz zgodovine in zgledi uporabni za učitelje in pouk fizike v srednjih ter visokih šolah. Razlago avtor zgradi sistematično, kar v obširni in razdrobljeni literaturi pogrešamo, in besedilo lahko služi kot referenca učiteljem oz. razlagalcem pojavov pri nihanju in valovanju. Nekatere razlage so po matematični strani zahtevnejše, vendar je besedilo sestavljeno tako, da se ta mesta lahko brez škode preskoči. Navedeno je precej virov, ki opozarjajo tako na preprostejšo kot tudi na podrobnejšo obravnavo. Avtor pozornost posveča pojavom in razlagam, ki povzročajo dijakom in študentom v prvih letnikih težave. To velja na primer za spektre, ki jih srečajo že v srednji šoli. Prav odstavek o njih je eden od matematično najzahtevnejših. Poleg tega je v besedilo vključena snov, ki se ji pri poučevanju v srednji šoli in v prvih letnikih na univerzi navadno izognejo, na primer potresno in gravitacijsko valovanje.

Izdaja besedila v okviru Knjižnice Sigma je prikladna za učence, dijake ali študente, ki se posebej zanimajo za fiziko, veliko zanimivega pa bodo v delu našli tudi učitelji fizike in bralci, ki želijo okrepiti splošno znanje.

Naročite jo lahko pri DMFA – založništvo po članski ceni 15,99 EUR.

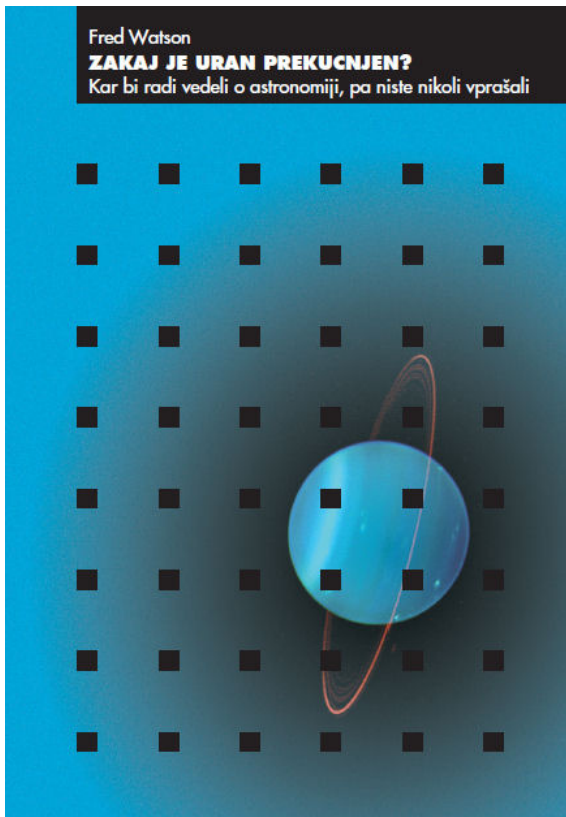
Aleš Mohorič

<http://www.obzornik.si/>

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Fred Watson: Zakaj je Uran prekucnjen? Kar bi radi vedeli o astronomiji, pa niste nikoli vprašali, DMFA – založništvo, Ljubljana 2010, 250 str.

Avtor poljudne knjige o astronomiji, ki se je rodil leta 1944 na Škotskem, dokončal študij matematike in fizike v Edinburghu in tam leta 1987 tudi doktoriral, še največ pove o sebi sam v prvem poglavju. Kot mlad astronom Kraljevega observatorija v Edinburghu je leta 1978 odpotoval v Avstralijo ves navdušen, da bo lahko uporabljal velikanški novi Anglo-avstralski teleskop v Coonabarabranu, ki je bil takrat eden največjih teleskopov na svetu. Žal mu je prvič zagodlo slabo vreme, vendar ni odnehal in se je odpravil tja spet naslednje leto. A že pri prvem obisku v



Avstraliji je spoznal tri astronome, ki so, kakor pravi sam, „prekipevali od idej in navdušenja. Med obiskom sem srečal vse tri in zanetili so ogenj v meni ... Tisto, kar je pri teh možeh naredilo največji vtis name, pa je bila lahkotnost, s katero so svoje zanimanje in navdušenje posredovali komurkoli, pa naj je bil to profesor astronomije ali taksist. Vsi trije so znali čudovito razlagati stvari, kar je bila posledica temeljitega znanja in ljubezni do stroke, pa tudi zdravorazumske presoje, kaj bi zanimalo druge. Predvsem so imeli radi ljudi. Vsi trije so bili rojeni posredovalci znanosti in napravili so name globok vtis. Zahrepenel sem po tem, da bi jim bil podoben.“

Želja, da bi posredoval svoje znanje iz astronomije vsem ljudem, ki bi jih to zanimalo, se mu je uresničila. Že aprila 1982 so ga povabili, da

Zakaj je Uran prekucnjen?

v intervjuju na škotskem radiu komentira znamenito odkritje kvazarja, a zjutraj so njegovo prvo oddajo na angleškem radiu izpodrinile novice o vojni za Falklandske otoke. Uspelo mu je šele deset let pozneje, ko ga je kot odgovornega astronoma avstralskega astronomskega observatorija avstralski radio povabil, da sodeluje v tedenski seriji zgodnjih jutranjih telefonskih pogovorov o astronomiji.

„Moji načečkani zapisi vprašanj poslušalcev v obdobju desetih let – skupaj z nekaj elektronskimi pismi – predstavljajo hrbtenico te knjige. Vsako od kakih 150 vprašanj, ki so tu obdelana, mi je poslala kaka živahna in razmišljujoča glava, in odgovoriti sem skušal podobno kot v radijski oddaji. Natisnjeno besedilo seveda omogoča večje podrobnosti. A nekaj posebnega so vprašanja sama, ker zadevajo tiste reči, ki bi jih ljudje res radi vedeli – in ne le tisto, kar znanstveniki mislijo, da bi ljudje radi vedeli.

Nemara bo knjiga bralca nekoliko presenetila. Tako je na primer v njej veliko več o Zemljini atmosferi, o človekovih junaških podvigih v vesolju in o vidnih pojavih na Luni, kot bi našel v standardni začetniški astronomski knjigi. Po drugi strani je le malo opisov posameznih planetov – brez dvoma zato, ker so ljudje o tem dovolj obveščeni iz drugih virov. Z leti se mi je nabrala tudi peščica vprašanj, ki bi bila primernejša za prvi letnik univerze kakor za lahkotno radijsko oddajo. Nisem se obotavljal vreči jih ven – potem ko sem poiskal odgovore in se prepričal, da sem po radiu pravilno odgovoril ...“

Res je, kar pravi avtor: knjiga nikakor ni zasnovana kot poljuden priročnik o astronomiji, ki ga napiše strokovnjak. Ta namreč besedilo že v osnovi postavi na teoretična izhodišča, medtem ko laiki samo postavljajo vprašanja, ki se jim porodijo ob pogledu na nebo. In prav njihova vprašanja, natanko taka, kot so mu jih zastavljali poslušalci, je avtor smiselno povezal v daljša vsebinsko zaokrožena poglavja.

Drugo poglavje Zvezdogledi: astronomija, teleskopi in observatoriji najprej v podpoglavju Opazovanje neba daje bralcu praktične nasvete, nanizane po vprašanjih poslušalcev. Takšna vprašanja so na primer: Kako najlažje določimo ozvezdja, vidna ob posameznem času? Kateri teleskop je najbolje kupiti ipd. V podpoglavju Astronomsko orodje odgovarja na vprašanja, kakor so: Zakaj teleskope raje postavljate na vrhovih gora kot v ravninskih puščavah? Ali je kaka možnost, da bi zgradili večji observatorij na

Antarktiki? Ali je mogoče zgraditi teleskope s tekočimi zrcali? V tretjem podpoglavju so npr. odgovori na vprašanja: Kako dobivajo imena astronomski objekti? Kako v vesolju merimo razdalje? pa tudi: Kako se lahko zaposlim v astronomiji? Kakšno je v astronomiji razmerje med ženskami in moškimi? in končno: Kaj počno astronomi ob oblačnih nočeh?

Tretje poglavje govori o Zemlji. Vprašanja v podpoglavju Merila časa: vrtenje Zemlje so npr.: Kako nastanejo slike krožnih sledi zvezd? Kako določamo čas s sončno uro? Ali je mogoče, da letalo leti skupaj z zoro? Podpoglavje Kroženje zemlje: Zemljina tirnica in štirje letni časi obravnava vprašanja: Zakaj se datumi enakonočij in Sončevih obratov spreminjajo iz leta v leto? Zakaj se smer Sončevega vzhoda ali zahoda med letom spreminja? in podpoglavje Dve Zemljini privlačni sili: gravitacija in magnetizem odgovarja na vprašanja: Kaj bi se zgodilo, če bi lahko spustil kamen v luknjo skozi Zemljo? Zakaj sta vsak dan po dve plimi? Ali se bo magnetno polje Zemlje obrnilo? Zakaj Zemlji pravimo „Zemlja“?

Četrto poglavje govori o svetlobi in atmosferi in obravnava vprašanja, kot so npr.: Zakaj je nebo modro? Ali je podnevi mogoče videti zvezde? Zakaj včasih iz letala vidimo krožno mavrico? Ali lahko vidimo mavrico v mesečini? Ali mavrice nastajajo v megli? Zakaj imata Sonce ali Luna včasih okrog sebe kolobar? Zakaj zvezde migotajo? Videl sem zvezdo, ki se je bliskala rdeče, zeleno in modro – kaj je bilo to?

V petem poglavju Vesoljski potniki so odgovori na vprašanja, kot so npr.: Kako sateliti ostajajo nad Zemljo? Kako raketni pogon lahko spremeni smer vesoljskega plovila, če ni zraka, skozi katerega bi ga potiskal? Kako vidimo satelite? Videl sem, kako se je bleščeč, zvezdi podoben objekt prikazal za nekaj sekund – kaj je bilo to? Na kateri minimalni razdalji od Zemlje bi videli celotno ploskev planeta? Ali bi lahko odlagali jedrske odpadke na Sonce? Kdo je lastnik vesoljskih odpadkov?

Šesto poglavje je namenjeno Luni. Nekaj vprašanj: Zakaj se smer Luninega vzhoda in zahoda na obzorju spreminja od noči do noči? Ali je Luna videti drugačna, če jo gledamo s severne ali južne poloble? Zakaj se Luna zdi tako velika, kadar je nizko na nebu? Zakaj se zdi, da osvetljeni del Luninega krajca kaže nekam nad Sonce? Ali se z Lune da videti kitajski zid? Kako dolg je dan na Luni? Kaj razumemo s pojmom „temna stran Meseca“? Zakaj se zdi, da je Luna na nebu enako velika kot Sonce?

Zakaj je Uran prekucnjen?

Sedmo poglavje govori o Osončju. Nekaj vprašanj: Kako Sonce gori brez kisika? Kdaj bo Sonce nehalo goreti? Kako je nastalo Osončje? Zakaj se vsi planeti vrtijo in se ne upočasnijo? Zakaj ležijo planeti bolj ali manj v isti ravnini? Ali ima to, če se planeti postavijo v vrsto, kake učinke? Ali imajo drugi planeti magnetna polja? Zakaj je Uran prekucnjen?

Osmo poglavje obravnava našo Galaksijo: Koliko zvezd lahko vidimo s prostim očesom? Ali lahko kakšne zvezde vidimo vse leto? Kaj so dvojne zvezde? Kakšna je povprečna razdalja med zvezdami? Iz česa so nevtronske zvezde? In kaj so pulzarji? Kje je najbližja črna luknja? Ali bi naše Osončje lahko imelo dvojčka?

Deveto poglavje je namenjeno vesolju: Ali je res, da je zvezd več kakor zrn peska na vseh peščenih obalah na Zemlji? Kako svetloba pri teh milijonih galaksij prodira skozi vesolje? Kako vemo, da obstaja temna snov? Kako merimo čas v preteklost?

Deseto poglavje se ukvarja s fizikalnimi osnovami kozmologije in z zgodovino vesolja: Ali lahko kaj potuje z večjo hitrostjo od svetlobne? Kaj pomeni $E = mc^2$? Ali gravitacija ukrivi prostor? Kaj je bilo pred velikim pokom? Kaj je zunaj vesolja? Kaj je temna energija? Ali obstajajo še druga vesolja? Od kod je prišla energija velikega poka? Zakaj bi se ukvarjali s kozmologijo – ali ni to samo ugibanje?

Zadnje, enajsto poglavje odgovarja na „zares zanimiva“ vprašanja, kakor pravi avtor: Zakaj naj bi vlade trošile denar za astronomijo in raziskovanje vesolja, ko pa je toliko drugih potreb? Kaj pa astrologija? Ali astronomi verjamejo v Boga?

Že iz vprašanj, ki so hkrati naslovi v besedilu, je mogoče razbrati, da razlage nikakor niso strokovno zapletene. Nikjer ne najdemo nobene enačbe, razen seveda „najslavnejše“ $E = mc^2$, ki pa je razložena s preprostimi besedami. V zvezi z naslovom knjige npr. izvemo, kaj sploh pomeni to, da je Uran prekucnjen, pa tudi, zakaj je prekucnjen – ker se je najbrž zaletel vanj kak protoplanet, podobno velik kot Zemlja. Kar zadeva astrologijo, jo avtor sprejema kot zabavo, s katero pa se je ukvarjal marsikateri astronom, npr. Tycho Brahe. Pove tudi, da vera, ki je človeštvo spodbudila k nekaterim najveličastnejšim umetniškim stvaritvam, nima nič opraviti z astronomijo, saj sam pozna med astronomi tako ateiste kot prepričane vernike.

Marsikateri odgovore poživljajo tudi anekdote. Avtor pripoveduje, kako

je na prvem potovanju v Avstralijo ponoči zagledal skozi okno lunin prvi krajec – D – torej naj bi se luna debelila in bila čez sedem dni polna, se pravi, da nočno nebo ne bo primerno za opazovanje! Pomislil je, da se je grozljivo zmotil in osmešil – in trajalo je celih deset minut, da je prepričal samega sebe, da D na južni polobli pomeni zadnji krajec.

Naj kot prevajalka še dodam, da prevajanje take poljudne knjige pri naša marsikatere dvome. V knjigi, ki je namenjena širokemu krogu bralcev, sicer še pišemo Sončev mrk, težko pa pišemo Sončev zahod, Sončeva svetloba itd. Slavisti imajo za to preprosto navodilo: če govorimo o strokovnih astronomskih pojmi, se Sonce in Luna pišeta z veliko začetnico, če gre za pogovorni jezik in vsakdanje pojme, ju pišemo z malo. Npr. jutri bo sijalo sonce, sončni zahod, danes je luna visoko na nebu, in po drugi strani: astronauti so šli na Luno, s satelitom opazujemo Sonce. To se sliši v redu, a v tej knjigi se strokovni in vsakdanji pojmi mešajo, npr. “sprememba smeri Luninega vzhoda in zahoda je v eni noči spektakularno večja kot pri Sončevem vzhodu in zahodu“ in „ob polni luni Luna vzhaja na nebu približno takrat, ko Sonce zahaja“. Sicer pa sem se po možnosti izogibala temu, da bi v istem stavku pisala Sonce ali Luno z veliko in malo začetnico.

Prav tako dela preglavice pridevnik „zemeljski“ oziroma „Zemljin“. Po premisleku sem marsikje obdržala „zemeljski“, npr. zemeljsko magnetno polje, zemeljsko površje itd. Sem pa pisala Zemljin, kjer sem presodila, da je nujno: Zemljina tirnica, Zemljina os itd. Mislim, da bi širokemu krogu bralcev, ki jim je knjiga namenjena, pretirana raba strokovnih izrazov zbudila odpor, to pa ne bi bilo v skladu z avtorjevimi željami.

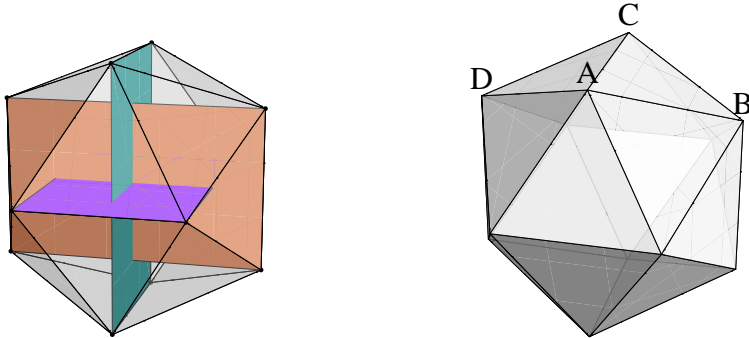
Mislim, da je to knjiga, ki bi jo namesto lahkotnih zgodb za oddih morali vzeti v roko povprečno razgledani bralci, še posebej če imajo priložnost opazovati nebo. Lahko jo berejo po vrsti, lahko pa tudi poiščejo vprašanje, ki jih trenutno zanima, saj so vsa vprašanja v obliki podnaslovov navedena v kazalu. Žal ima knjiga premalo reklame v dnevnem tisku, zato bi jo člani DMFA, ki zbirko Sigma poznamo, lahko dajali kot darilo prijateljem in znancem, ki se sicer ne marajo ukvarjati z matematiko in fiziko, jih pa zanimajo preprosta vprašanja o nebu in vesolju.

Knjigo je v okviru Knjižnice Sigma izdalo DMFA – založništvo. Obsega 250 strani in jo dobite po članski ceni 17,91 EUR.

Seta Oblak

Naloga 1. Koti med osmi rotacije

Dvajseterec lahko analitično konstruiramo tako, da vzamemo tri pravokotnike, ki imajo razmerje med stranicama zlato število. Te postavimo v koordinatne ravnine s središči v izhodišču. Oglišča pravokotnikov so oglišča dvajseterca.

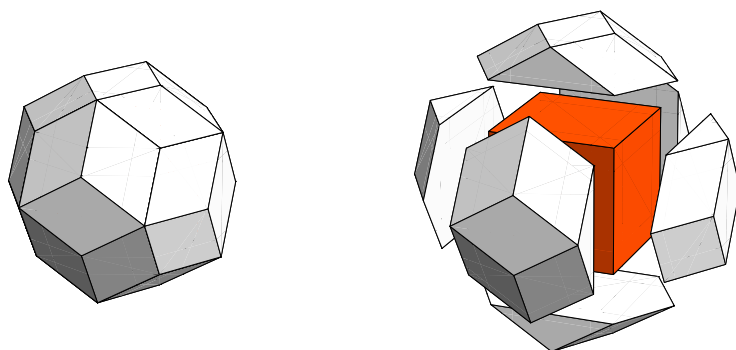


Vzemimo točke $A(1, 0, \tau)$, $B(0, \tau, 1)$, $C(-1, 0, \tau)$ in $D(0, -\tau, 1)$, kjer je τ zlato število. Izračunaj kot med osema peterne simetrije, to je na primer $\alpha = \angle AOB$, kjer je O izhodišče, kot β med osema trojne simetrije, to je kot med poltrakoma, ki gresta iz izhodišča skozi središči trikotnikov ABC in ACD , ter kot γ med osema peterne in trojne simetrije. Kote izrazi kot $\arctan(a)$, kjer je a poenostavljen izraz. Pri poenostavljanju izrazov upoštevaj lastnosti (potenc) zlatega števila (in na koncu še njegovo vrednost).

Naloga 2. Trideseterec

Trideseterec je polieder, katerega mejne ploskve so rombi, pri katerih je razmerje diagonal zlato število. To telo je leta 1611 odkril Johannes Kepler

(1571–1630). Izračunaj prostornino tega telesa kot funkcijo daljše diagonale mejne ploskve. Pomagaj si z dejstvom, da lahko trideseterec razdelimo na 6 polovic rombskega dvanajsterca 2. vrste (glej nalogo v Obzornik mat. fiz. 59 (2012) 1 oziroma rešitev spodaj) in kocko, katere rob je daljša diagonala romba.



Naloga 3. Mreža dveh poliedrov

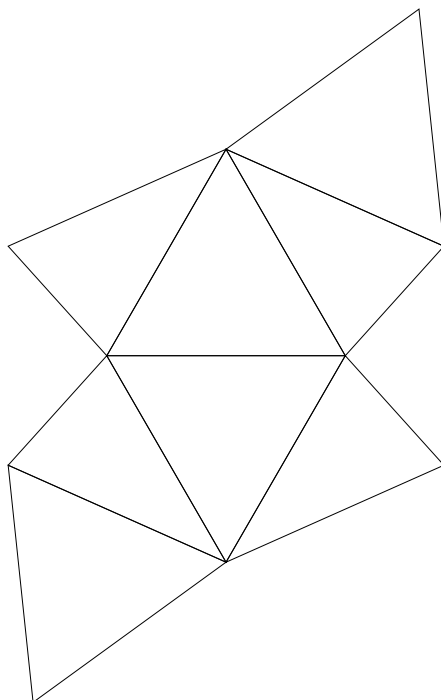
V peti številki Obzornika 58 (2011) smo objavili verzijo te naloge, vendar je takrat pomotoma izpadla slika mreže poliedra, zato nalogo objavljamo še enkrat.

Mreža poliedra sestoji iz štirih enakostraničnih trikotnikov in štirih enakokrakih trikotnikov z osnovnico dolžine 1 in krakoma dolžine $\sqrt{2}$. Izračunaj prostornino poliedra. (Opozorilo: naloga ima dve rešitvi.)

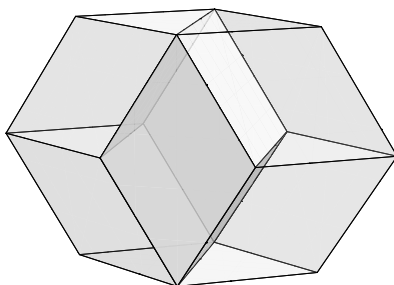
Dve rešitvi prve naloge iz 1. številke OMF, letnik 59 (2012)

Naloga sprašuje po prostornini rombskega dvanajsterca 2. vrste. Objavljamo dve rešitvi, ki temeljita na različnih razrezih telesa. Prvo je pripravil avtor naloge Izidor Hafner, drugo pa nam je poslal Franc Savnik.

1) Telo lahko razdelimo na štiri skladne poševne tristrane prizme, kjer je osnova polovica romba in višina polovica večje diagonale, ter eno pokončno

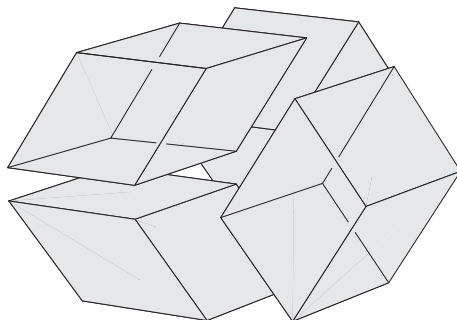


prizmo z rombsko osnovo, katere višina je manjša diagonalna. Naj bo d daljša diagonalna, potem je krajša diagonalna d/σ , če je $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2$. Skupna prostornina poševnih prizem je $d^3/(2\sigma)$, prostornina rombske prizme je $d^3/(2\sigma^2)$. Skupaj: $(d^3/(2\sigma))(1 + \sigma)/\sigma = d^3/2$, saj je $\sigma^2 = 1 + \sigma$.

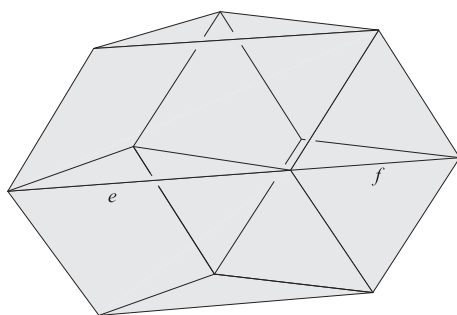


2) Mejne ploskve rombskega dvanajsterca 2. vrste so zlati rombi. Dolžino njihove daljše diagonale označimo z e , dolžino krajše s f . Potem je $f = \frac{e}{s}$,

Vprašanja in odgovori



Slika 1. Dvanajsterec razdelimo na štiri romboedre. Leva dva imata višino $\frac{e}{2}$, desna dva višino $\frac{f}{2}$.



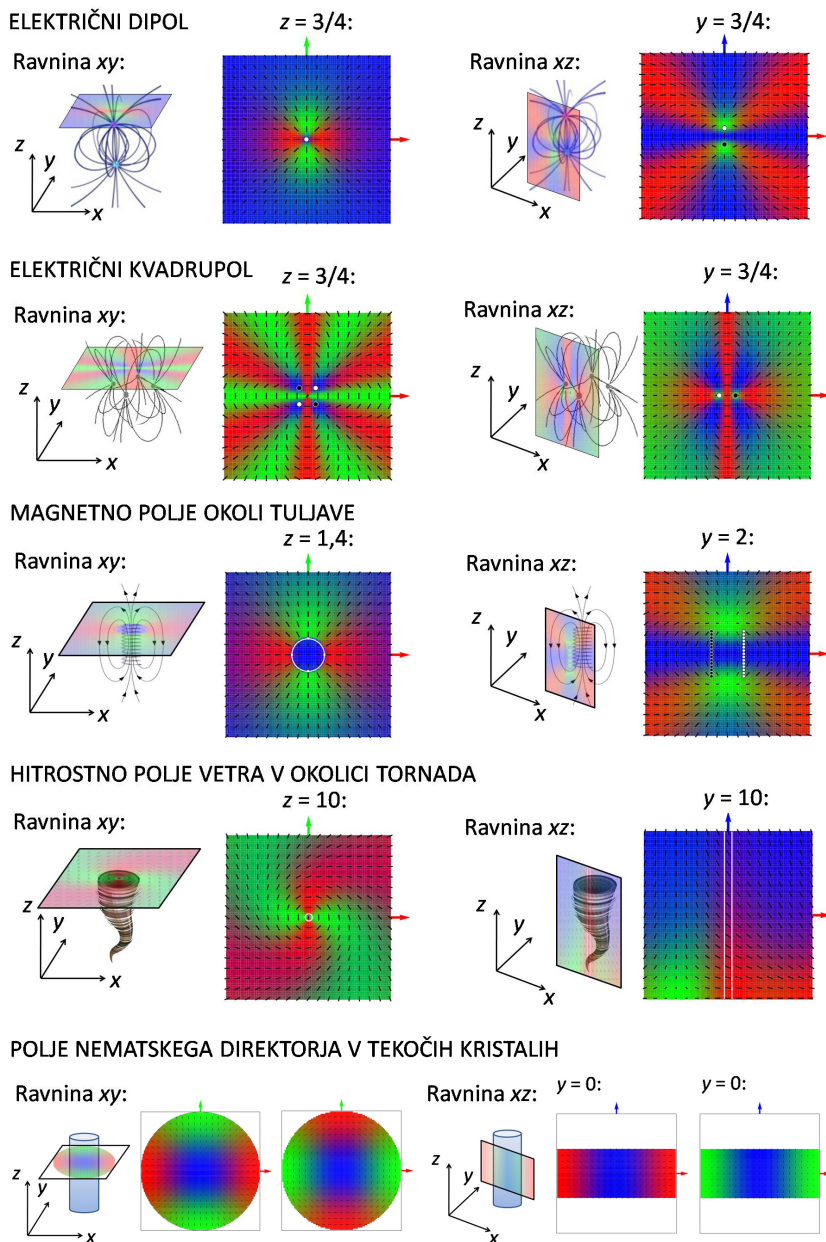
Slika 2. Dvanajsterec presekamo z ravnino, ki vsebuje daljši diagonali osnovnih ploskev. V njej leži tudi najdaljša telesna diagonala.

Dvanajsterec razdelimo na dva debela in dva tanka romboedra, kot kaže slika 1. Debeli ima ploščino osnovne ploskve $\frac{e^2}{2s}$ in višino $\frac{e}{2}$. Tanki romboeder ima enako osnovno ploskev in višino $\frac{f}{2}$. Dani dvanajsterec ima zato prostornino $\frac{e^3}{2}$.

Zanimiva je tudi izražava prostornine danega dvanajsterca z dolžino njegove najdaljše telesne diagonale. Označimo to dolžino z d in upoštevajmo (slika 2), da je $d = e + f$, pri čemer sta števili e in f v zlatem razmerju. Zato je $d : e = e : f = s$ in od tod $e = \frac{d}{s}$. Dani rombski dvanajsterec 2. vrste ima prostornino $\frac{1}{2} \left(\frac{d}{s}\right)^3$.

Uredništvo

Slika k članku na strani 100



Slika k članku na strani 100. Smer električnega polja okoli dipola in kvadrupola, smer magnetnega polja okoli tuljave, hitrostno polje vetra v okolici tornada ter smer nematskega direktorja tekočega kristala v cilindrični pori.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 2012

Letnik 59, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Razporeditve hiperravnin (Matjaž Konvalinka)	81–93
Sistem enot na poti do sprememb (Janez Strnad)	95–99
Šola	
Vizualizacija vektorskih polj v fiziki z uporabo barvnih kombinacij (Milan Ambrožič in Marko Gosak)	100–108
Slika k članku (Milan Ambrožič in Marko Gosak)	XI
Vesti	
Strokovno srečanje in 64. občni zbor DMFA Slovenije – vabilo k sodelovanju (Sandi Klavžar)	93–94
Strokovna ekskurzija (Mitja Rosina)	99
Nove knjige	
Stephen Hawking in Leonard Mlodinow: Veliki načrt, Novi odgovori na zadnja vprašanja o življenju (Aleš Mohorič)	109–110
Janez Strnad: Svet nihanj in valovanj (Aleš Mohorič)	110–111
Fred Watson: Zakaj je Uran prekucnjen? Kar bi radi vedeli o astronomiji, pa niste nikoli vprašali (Seta Oblak)	112–116
Vprašanja in odgovori	
Naloge in rešitev (Uredništvo)	117–120

CONTENTS

Articles	Pages
Hyperplane arrangements (Matjaž Konvalinka)	81–93
The system of units on the way to changes (Janez Strnad)	95–99
Visualization of vector fields in physics with the use of colour compositions (Milan Ambrožič and Marko Gosak)	100–108
School	100–1008, XI
News	93–94, 99
New books	109–116
Questions and Answers	117–120

Na naslovnici je RGB prikaz električnega polja kvadrupola za tri vzporedne ravnine v dveh smereh (glej članek na strani 100).