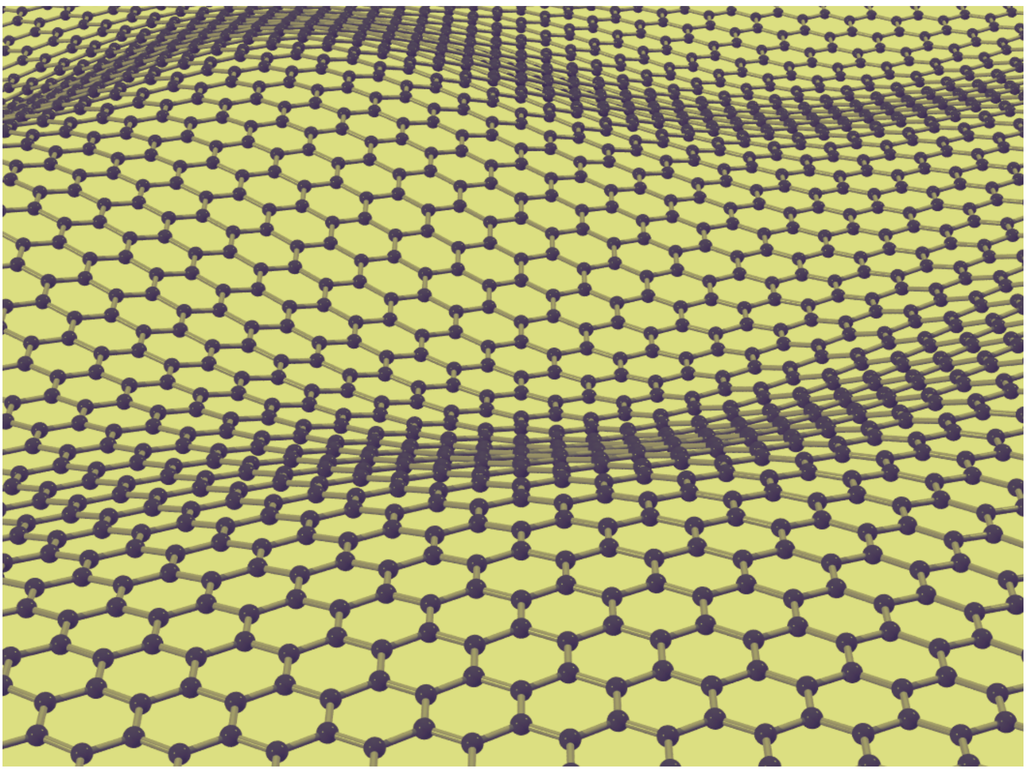
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2011
Letnik 58
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 58 • ŠT. 3 • STR. 93–132 • MAJ 2011

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2011, letnik 58, številka 3, strani 93–132

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KOTALJENJE KROŽNICE PO REGULARNI KRIVULJI

PRIMOŽ MORAVEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 53A04

V članku izpeljemo parametrično enačbo krivulje, po kateri se giblje izbrana točka na krožnici, ki se brez zdrsavanja kotali po regularni krivulji. Obravnavamo tudi kotaljenje po prostorskih krivuljah.

ROLLING OF A CIRCLE OVER A REGULAR CURVE

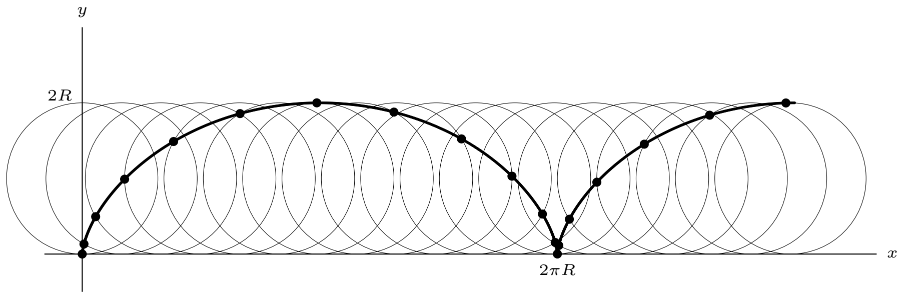
In this paper we find a parametric equation of a curve which is the locus of points generated by a fixed point of a circle as it rolls over a regular curve without slipping. We also consider the rolling of a circle over a space curve.

1. Uvod

Če krožnico zakotalimo po vodoravni podlagi, pri čemer gibanje poteka brez zdrsavanja, krivuljo, ki jo opiše izbrana točka na krožnici, imenujemo *cikloida*. Ime je postavil Galileo Galilei leta 1599, ko je to krivuljo preučeval v zvezi z gibanjem planetov. Cikloida je že v sedemnajstem stoletju imela pomembno vlogo v geometriji. Pravili so ji celo „Helena geometrov“, saj je povzročala pogoste spore med matematiki tistega časa. Več o zgodovinskem ozadju te krivulje in nekaterih posplošitev lahko bralec najde v Proctorjevi knjigi [4].

Cikloida ima pomembno vlogo tudi v fiziki. To je namreč krivulja, ki je rešitev problema *brahistohrone*. Ta variacijski problem sprašuje po enačbi krivulje, ki gre skozi dani točki T_1 in T_2, po kateri se mora gibati točkasto telo pod vplivom sile teže, da bo v brezzračnem prostoru prišla najhitreje od T_1 do T_2. Problem in njegova rešitev sta obravnavana tudi v Vidavovi knjigi [6]. Poleg tega je Christiaan Huygens v sedemnajstem stoletju uporabil lastnosti cikloid pri konstrukciji natančnih ur, ki so se uporabljale v navigaciji. Geometrijske in fizikalne lastnosti cikloid ter nekaterih posplošitev je podrobno opisal Lockwood [2].

Postavimo celotno dogajanje v ravninski kartezični koordinatni sistem, pri tem pa zaradi enostavnosti predpostavimo, da se krožnica polmera R kotali po abscisni osi. Če na začetku krožnico postavimo tako, da se abscisne



Slika 1. Kotaljenje krožnice po abscisni osi.

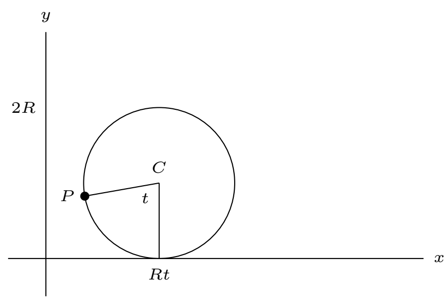
osi dotika v izhodišču koordinatnega sistema, označimo točko $O(0,0)$ na tej krožnici in spremljamo njeno gibanje, ko se krožnica kotali v pozitivni smeri osi x, dobimo krivuljo, kot kaže slika 1.

Razmeroma enostavno je izpeljati parametrično enačbo cikloide, ki je prikazana na sliki 1. V ta namen si oglejmo krožnico, ki je napravila pot Rt od izhodišča. Fizikalno gledano je to opravljena pot v času t, če se krožnica kotali s kotno hitrostjo $1\,\mathrm{s}^{-1}$. Če ima označena točka na tej krožnici koordinati $P(x,y)$, potem s pomočjo slike 2 hitro vidimo, da x in y lahko opišemo s pomočjo t takole:

$$x = R(t - \sin t), \tag{1}$$

$$y = R(1 - \cos t). \tag{2}$$

V nadaljevanju članka si bomo ogledali splošnejšo situacijo, ko se krožnica kotali po primerni krivulji. Najprej bomo obdelali kotaljenje po ravninski krivulji. Tu bralcu za razumevanje zadošča osnovno znanje analize



Slika 2. Izpeljava parametrične enačbe cikloide.

ter malo linearne algebre. Na koncu bomo pokazali, da lahko podoben način uporabimo tudi za kotaljenje krogle vzdolž prostorske krivulje, ki leži na dani ploskvi. Tu bo poznavanje osnov diferencialne geometrije povsem zadoščalo.

2. Kotaljenje po regularni ravninski krivulji

Recimo, da se krožnica polmera R kotali po regularni ravninski krivulji $\mathcal{C}$, ki je dana s parametrično enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ za $u \in I \subseteq \mathbb{R}$. Ob tem se spomnimo, da krivulji z enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ pravimo *regularna krivulja*, če je neskončnokrat zvezno odvedljiva, odvod $\dot{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}u$ pa je različen od nič v vsaki njeni točki. Če si torej krivuljo predstavljamo kot tir gibanja točke, regularnostni pogoj pomeni, da se točka nikjer ne ustavi. Krivulji $\mathcal{C}$ pravimo *lok*, če je funkcija $\mathbf{r}$ na množici I injektivna, torej krivulja nima samopresečišč. Predpostavimo, da se krožnica kotali po regularnem loku brez zdrsavanja v smeri naraščajočega parametra u. Poleg tega bi radi dosegli, da se krožnica pri svojem kotaljenju nikjer ne „zatakne“, kar pomeni, da krožnica krivuljo seka le v dotikališču. Vsaj v primeru, ko je I kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$, je to vedno mogoče:

Trditev. Naj bo $\mathcal{C}$ regularen lok, ki je dan s parametrično enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ za $u \in I \subseteq \mathbb{R}$. Če je I kompaktna množica, obstaja $R > 0$, da se krožnica s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$ kotali brez zatikanja.

Skicirajmo dokaz te trditve. Spomnimo se, da je *krivinska krožnica* v dani točki P krivulje $\mathcal{C}$ limita krožnic, ki gredo skozi P in njeni bližnji točki M in N na krivulji, ko gresta M in N proti P. Polmer krivinske krožnice v dani točki krivulje lahko izračunamo po formuli [7]

$$\rho(u) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(u)|^3}{|\dot{x}(u)\ddot{y}(u) - \dot{y}(u)\ddot{x}(u)|}.$$

Krivinska krožnica se v dani točki najbolje prilega krivulji, zato moramo za točke $\mathbf{r}(u_0)$ na krivulji, v katerih sta središči kotaleče se krožnice in krivinske krožnice na isti strani krivulje, najprej zahtevati $R \leq \rho(u_0)$. Kljub temu pa lahko krivinska krožnica seka krivuljo v točki, ki je poljubno blizu dane točke $\mathbf{r}(u_0)$. Zato R še nekoliko zmanjšajmo; če npr. zahtevamo $R \leq \rho(u_0)/2$, potem obstaja $\epsilon = \epsilon(u_0) > 0$, da krožnica s polmerom R, ki se krivulje dotika v $\mathbf{r}(u_0)$, ne gre skozi točko $\mathbf{r}(u)$ za vsak $u \in (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \setminus \{u_0\}$.

Sedaj moramo doseči še, da kotaleča se krožnica ne seka točk $\mathbf{r}(u)$ na krivulji za $u \in I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$. Ker je množica $I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ kompaktna in krivulja nima samopresečišč, je razdalja med $\mathbf{r}(u_0)$ in lokom $\{\mathbf{r}(u); u \in I \setminus (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)\}$ pozitivna. Če je premer krožnice manjši od te razdalje, se krožnica preostanka krivulje ne dotakne. Kratek premislek pokaže, da se krožnica z malo manjšim polmerom lepo kotali tudi v točkah blizu $\mathbf{r}(u_0)$. Zato zaradi kompaktnosti obstaja polmer, ki ustreza pogojem v trditvi na celem intervalu I.

Sedaj si oglejmo izpeljavo krivulje, ki jo opiše izbrana točka na krožnici polmera R, ki se kotali po krivulji $\mathcal{C}$. Fiksiramo točko na krožnici. Recimo, da je pri $u = u_0$ to tista točka P_0, kjer se krožnica dotika krivulje $\mathcal{C}$, torej je njen položaj določen z $\mathbf{r}(u_0)$. Pri izbiri, po kateri strani krivulje se krožnica kotali, imamo dve možnosti. Če se postavimo v središče C krožnice in gledamo proti dotikališču krožnice in krivulje $\mathcal{C}$, predpostavimo najprej, da je konec tangentnega vektorja $\dot{\mathbf{r}}$, ki ga postavimo na krivuljo v dotikališču, vedno na levi strani. Označimo točko na krivulji $\mathcal{C}$, ki ustreza vektorju $\mathbf{r}(u)$, s P, opazovano točko na krožnici, ki se dotika krivulje v točki P, pa označimo s P'. Postavimo $t = \angle PCP'$. Potem je dolžina loka krivulje $\mathcal{C}$ med točkama P_0 in P enaka dolžini krožnega loka med točkama P in P'. Od tod dobimo naslednjo zvezo med parametroma t in u:

$$t = \frac{1}{R}\int_{u_0}^{u} |\dot{\mathbf{r}}(v)|\,\mathrm{d}v. \tag{3}$$

Z drugimi besedami, če gledamo Rt kot funkcijo parametra u, je to ravno *naravni parameter* za krivuljo $\mathcal{C}$ [7, stran 21].

Označimo z $\mathcal{V}_\varphi$ linearno transformacijo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki predstavlja vrtež za kot φ okrog izhodišča; bralec si lahko več o linearnih transformacijah prebere v Križaničevem učbeniku [1]. Vektor $\mathbf{a}$ od točke P do točke C dobimo tako, da enotski vektor v smeri vektorja $\dot{\mathbf{r}}$ zavrtimo za $\pi/2$ in potem ustrezno popravimo njegovo dolžino:

$$\mathbf{a} = \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}}\dot{\mathbf{r}}.$$

Če z $\mathbf{r}_C$ označimo krajevni vektor točke C, potem iz zgornje zveze dobimo

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r} + \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}}\dot{\mathbf{r}}.$$

Naš cilj je opisati krajevni vektor $\mathbf{r}_{P'}$ točke P'. To lahko dosežemo, če najprej vektor $\mathbf{a}$ zavrtimo za kot t v smeri gibanja urinega kazalca (torej v negativni smeri). Če z $\tilde{\mathbf{a}}$ označimo vektor od točke C do točke P', dobimo $\tilde{\mathbf{a}} = -\mathcal{V}_{-t}\mathbf{a}$, od tod pa sledi

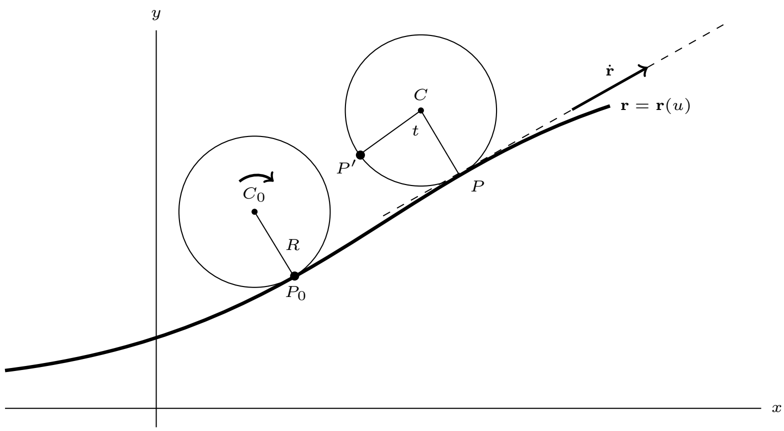
$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} + \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|}(\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}-t})\dot{\mathbf{r}}. \tag{4}$$

Podoben sklep lahko napravimo tudi tedaj, ko se krožnica po krivulji kotali z druge strani. Sedaj je torej, gledano iz središča C krožnice proti dotikališču krožnice in krivulje $\mathcal{C}$, konec tangentnega vektorja $\dot{\mathbf{r}}$, ki ga postavimo na krivuljo v dotikališču, vedno na desni strani. Vse, kar moramo spremeniti v zgornjem sklepu, so smeri vrtežev. Če upoštevamo, da velja $\mathcal{V}_{-\pi/2} = -\mathcal{V}_{\pi/2}$, hitro dobimo

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} - \frac{R}{|\dot{\mathbf{r}}|}(\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}+t})\dot{\mathbf{r}}. \tag{5}$$

Enačbi (4) in (5) sta vektorski enačbi krivulj, ki ju dobimo pri kotaljenju krožnice po krivulji $\mathcal{C}$. Če želimo dobiti parametrična opisa, označimo $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(u) & y(u) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ in $\mathbf{r}_{P'} = \begin{pmatrix} X(u) & Y(u) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. V standardni bazi $\mathbb{R}^2$ lahko linearno transformacijo $\mathcal{V}_\varphi$ predstavimo z matriko

$$\mathcal{V}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$



Slika 3. Kotaljenje krožnice po regularni krivulji.

torej je

$$\mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}_{\frac{\pi}{2}\mp t} = \begin{pmatrix} \mp\sin t & -1+\cos t \\ 1-\cos t & \mp\sin t \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi:

$$\begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2+\dot{y}(u)^2}} \begin{pmatrix} \mp\sin t(u) & -1+\cos t(u) \\ 1-\cos t(u) & \mp\sin t(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \end{pmatrix}.$$

Če slednjo enačbo napišemo po komponentah, dobimo:

Izrek. Naj bo $\mathcal{C}$ regularna ravninska krivulja, ki je dana s parametrično enačbo $x = x(u)$, $y = y(u)$. Krivulja, ki jo opiše izbrana točka na krožnici polmera R, ki se kotali po krivulji $\mathcal{C}$ brez zdrsavanja, ima parametrično enačbo

$$X(u) = x(u) \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2+\dot{y}(u)^2}}\big(\mp\dot{x}(u)\sin t(u) + \dot{y}(u)(-1+\cos t(u))\big), \quad (6)$$

$$Y(u) = y(u) \pm \frac{R}{\sqrt{\dot{x}(u)^2+\dot{y}(u)^2}}\big(\dot{x}(u)(1-\cos t(u)) \mp \dot{y}(u)\sin t(u)\big). \quad (7)$$

Pri tem je funkcija $t(u)$ dana z enačbo (3), izbira predznaka pa je odvisna od tega, po kateri strani krivulje se krožnica kotali.

Oglejmo si že znani primer, ko se krožnica kotali po osi x, torej $x(u) = u$, $y(u) = 0$, od koder dobimo $\dot{x}(u) = 1$, $\dot{y}(u) = 0$ in $\sqrt{\dot{x}(u)^2+\dot{y}(u)^2} = 1$. Če postavimo začetno krožnico v izhodišče koordinatnega sistema, potem je $u_0 = 0$, zato iz enačbe (3) sledi $t = u/R$ oziroma $u = Rt$. Zato enačbi (6) in (7) postaneta $X(t) = R(t-\sin t)$ in $Y(t) = \pm R(1-\cos t)$. Dobimo enačbi dveh cikloid, eno na zgornji, drugo pa na spodnji strani abscisne osi.

V naslednjem zgledu si oglejmo še en klasičen primer [2], ko se krožnica s polmerom R kotali brez zdrsavanja po krožnici s središčem v izhodišču in polmerom a, kjer je $a > R$. Slednjo krožnico lahko opišemo s parametričnima enačbama $x = a\cos u$, $y = a\sin u$. Izberimo $u_0 = 0$, torej na začetku kotalečo se krožnico postavimo tako, da se dane krožnice s polmerom a dotika v točki $T(a, 0)$. Kratek račun pokaže, da je $\sqrt{\dot{x}(u)^2+\dot{y}(u)^2} = a$. Iz enačbe (3) dobimo $t(u) = au/R$. Ker iz te zveze zlahka izrazimo u v odvisnosti od t, bomo enačbi (6) in (7) raje zapisali v odvisnosti od parametra t:

$$X(t) = (a \mp R)\cos\frac{R}{a}t \pm R\cos\left(1 \mp \frac{R}{a}\right)t, \tag{8}$$

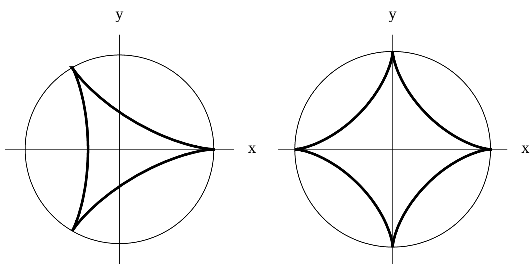
$$Y(t) = (a \mp R)\sin\frac{R}{a}t - R\sin\left(1 \mp \frac{R}{a}\right)t. \tag{9}$$

Enačbi za X in Y, v katerih vzamemo zgornji predznak, predstavljata krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica s polmerom R kotali po notranji strani krožnice s polmerom a. Taki krivulji pravimo *hipocikloida*. Odlikovana posebna primera hipocikloid sta *deltoida* in *astroida*. Prvo dobimo za $a = 3R$, drugo pa za $a = 4R$. Njuna tira poti sta predstavljena na sliki 4. Omenimo, da je deltoido prvi preučeval Leonhard Euler leta 1745 v povezavi s problemom iz optike. Astroida ima pomembno vlogo v termodinamiki, to je namreč krivulja, ki loči območje z enim minimumom proste energije od tistega, ki ima dva taka minimuma [5]. Še več lastnosti teh dveh krivulj in drugih hipocikloid je opisanih v knjigi [2].

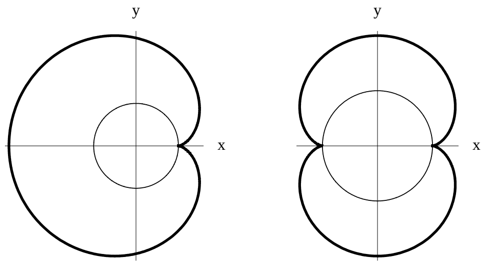
Če v enačbah (8) in (9) vzamemo spodnji predznak, predstavljata krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica s polmerom R kotali po zunanji strani krožnice s polmerom a. Taki krivulji pravimo *epicikloida*. Epicikloide je prvi preučeval Ole Rømer leta 1674 pri študiju najboljših oblik zobatih koles.

Kadar je $a = R$, kotaleča se krožnica napravi ravno en obhod. Krivulji, ki jo dobimo, zaradi njene značilne oblike pravimo *kardioida*. Kadar pa je $a = 2R$, dobljeno krivuljo imenujemo *nefroida* [2]. Obe krivulji sta prikazani na sliki 5.

Kardioida ima več lepih geometrijskih lastnosti. Dobimo jo, če z inverzijo preslikamo parabolo čez poljubno krožnico, katere središče leži v gorišču dane parabole. Poleg tega je kardioida rob osrednjega „mehurčka“ Mandel-



Slika 4. Deltoida in astroida.



Slika 5. Kardioida in nefroida.

brotove množice [3], ki ima pomembno vlogo v teoriji fraktalov, glej sliko 6. V fiziki sta kardioida in nefroida povezani s problemi iz optike.

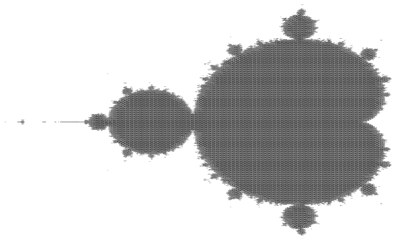
Epicikloida, dana z enačbama (8) in (9), je periodična natanko tedaj, ko je a/R racionalno število (podoben sklep velja tudi pri hipocikloidi). Na sliki 7 sta prikazana primera periodične in neperiodične epicikloide.

Oglejmo si sedaj kotaljenje krožnice po verižnici, ki ima enačbo $y = \operatorname{ch} x$. Verižnico lahko parametriziramo kar z $x(u) = u$, $y(u) = \operatorname{ch} u$. Izberimo $u_0 = 0$. Tedaj je $\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = \operatorname{ch} u$, iz enačbe (3) pa dobimo

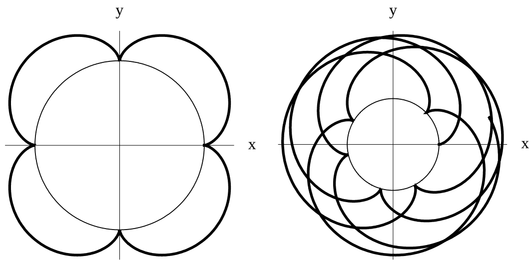
$$t(u) = \frac{1}{R} \operatorname{sh} u.$$

Če to vstavimo v enačbi (6) in (7), dobimo parametrizaciji cikloid po verižnici, enkrat po zgornji, drugič pa po spodnji strani. Tudi v tem primeru dobimo nekoliko lepši enačbi, če parametriziramo po parametru t. Parameter u se da namreč lepo izraziti v odvisnosti od t:

$$u = \operatorname{Arsh} Rt.$$



Slika 6. Mandelbrotova množica.



Slika 7. Epicikloidi za $a/R = 4$ in $a/R = \sqrt{2}$.

Ker je $\operatorname{ch} u = \sqrt{1 + R^2 t^2}$, od tod dobimo:

$$X(t) = \operatorname{Arsh} Rt \pm \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 t^2}} (\mp \sin t + Rt(-1 + \cos t)), \tag{10}$$

$$Y(t) = \sqrt{1 + R^2 t^2} \pm \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 t^2}} (1 - \cos t \mp Rt \sin t). \tag{11}$$

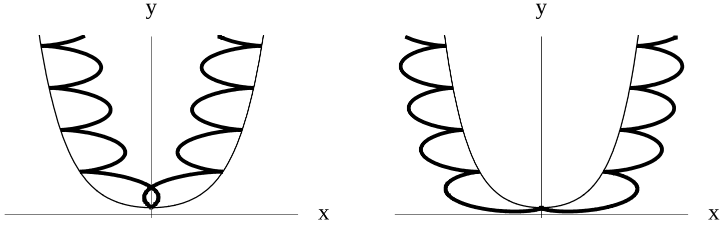
Obe tako dobljeni cikloidi sta prikazani na sliki 8.

Oglejmo si, kaj se zgodi, če začetek kotaljenja po verižnici izberemo v kakšni drugi točki. Tedaj iz enačbe (3) dobimo

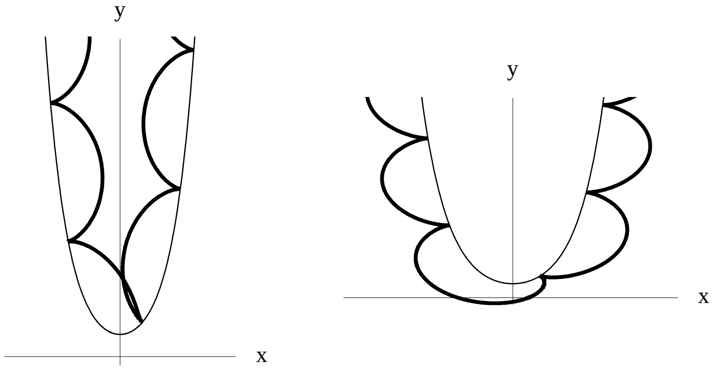
$$t = \frac{1}{R} (\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} u_0),$$

torej $u = \operatorname{Arsh}(Rt + \operatorname{sh} u_0)$. Ker tu enačbi cikloid po verižnici postaneta nekoliko bolj zapleteni, ju ne bomo zapisali. Bralca vabimo, da to za vajo stori sam. Tira poti obeh krivulj sta prikazana na sliki 9.

Za konec si poglejmo še krivuljo, ki jo dobimo, če se krožnica kotali po Arhimedovi spirali. Arhimedova spirala ima v polarni obliki enačbo



Slika 8. Kotaljenje krožnice po verižnici z začetkom v izhodišču.



Slika 9. Kotaljenje krožnice po verižnici z začetkom zunaj izhodišča.

$\rho(\varphi) = a\varphi$, kjer je $a > 0$. Zato jo lahko parametriziramo z $x(u) = au\cos u$, $y(u) = au\sin u$. Postavimo $u_0 = 0$. S krajšim računom hitro dobimo, da je

$$\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} = a\sqrt{1+u^2}$$

in

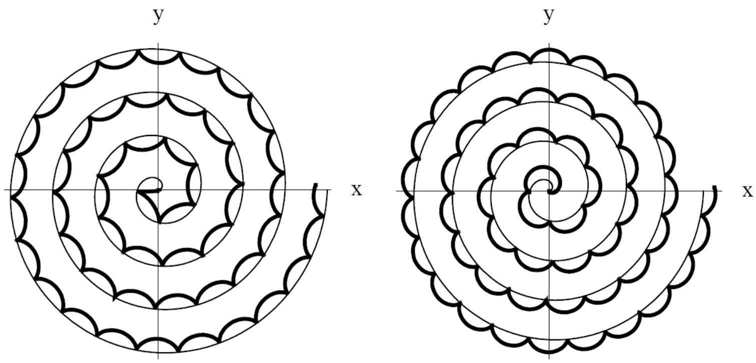
$$t = \frac{a}{R}\int_0^u \sqrt{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{a}{2R}(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{Arsh} u).$$

V tem primeru je u težko izraziti v odvisnosti od t, zato enačbi cikloid (6) in (7) parametriziramo v odvisnosti od u. Tudi tu dobimo zapleteni enačbi, zato ju ne bomo zapisali. Cikloidi sta prikazani na sliki 10.

Bralca ob tem vabimo, da s pomočjo zgoraj opisanega postopka poskuša sam najti nove primere cikloidnih krivulj. Poleg tega naj za zgornje primere cikloid oceni, kolikšen je lahko največ polmer kotaleče se krožnice, da kotaljenje poteka brez zatikanja.

3. Kotaljenje po regularni prostorski krivulji

Preselimo sedaj dogajanje v trirazsežni prostor in opazujmo kotaljenje krogle s polmerom R po ploskvi vzdolž dane krivulje, ki leži na tej ploskvi. Naj bo D odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$ in naj bo $\mathcal{P}$ ploskev, ki je podana s parametrično enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, kjer je $(u,v) \in D$ in je $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ neskončnokrat parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Predpostavimo še, da je



Slika 10. Kotaljenje krožnice po Arhimedovi spirali.

ploskev *regularna*, kar pomeni, da na celotnem območju D velja

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0\,.$$

Naj bo $u = u(w)$ in $v = v(w)$, kjer je $w \in I \subseteq \mathbb{R}$, parametrična enačba regularne krivulje, ki poteka po območju D. Tedaj je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(w), v(w))$ enačba regularne krivulje $\mathcal{C}$, ki leži na ploskvi $\mathcal{P}$. Pri oznakah smo tu malce površni in $\mathbf{r}$ uporabljamo tako za krajevni vektor $\mathbf{r}(u, v)$ točke na ploskvi kot tudi za krajevni vektor točke $\mathbf{r}(w)$ na krivulji, vendar pa je iz konteksta nedvoumno razvidno, kaj oznaka pomeni. Tudi tu predpostavimo, da je parametrizacija krivulje injektivna in da se krogla kotali v smeri naraščajočega parametra w. Izberimo začetno točko $P_0 \in \mathcal{C}$, ki ji v parametrizaciji ustreza parameter w_0. Naj bo P poljubna točka na krivulji $\mathcal{C}$, ki ji ustreza parameter w in ima krajevni vektor $\mathbf{r}$. Naj bo $\mathbf{t}$ enotski vektor v smeri tangente na krivuljo $\mathcal{C}$ v točki P, torej velja

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \tag{12}$$

pri čemer tu uporabljamo oznako $\dot{\mathbf{r}}$ za odvod funkcije $\mathbf{r}$ po spremenljivki w. Po verižnem pravilu velja

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{u}\mathbf{r}_u + \dot{v}\mathbf{r}_v,$$

kar dokazuje (gl. tudi izrek II.1 v [7]), da tangentni vektor $\mathbf{t}$ leži v tangentni ravnini Σ na ploskev $\mathcal{P}$ v točki P, torej tisti ravnini, ki gre skozi točko P in vsebuje vektorja $\mathbf{r}_u(w)$ in $\mathbf{r}_v(w)$. Naj bo $\mathbf{n}$ enotska normala na ravnino Σ, torej

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \tag{13}$$

Pri tem je predznak odvisen od tega, kako si na začetku izberemo orientacijo ploskve $\mathcal{P}$. To storimo tako, da normala kaže v isto smer kot vektor od P do C, kjer je C središče kotaleče se krogle, ki se ploskve dotika v točki P. Na krogli izberimo opazovano točko, pri čemer predpostavimo, da se pri $w = w_0$ ta točka ujema s P_0. Naj bo P' opazovana točka na krogli v trenutku, ko se ta prikotali v točko P. Točki P in P' ležita na krožnici s središčem C in polmerom R, ki leži v *pritisnjeni ravnini* krivulje $\mathcal{C}$ v točki P, torej ravnini, ki vsebuje enotska pravokotna vektorja $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$.

Če je I kompaktna množica, potem lahko izberemo tak $R > 0$, da kotaljenje krogle s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$ poteka brez zatikanja. Sklep je podoben kot v ravninskem primeru, zato bralca vabimo, da podrobnosti izpelje sam. Pri tem omenimo le, da se krivinski polmer $\rho(w)$ prostorske krivulje računa kot $\rho(w) = 1/\kappa(w)$, kjer je $\kappa(w)$ *fleksijska ukrivljenost* oziroma *zvitost* krivulje v dani točki. Ta se izračuna po formuli [7]

$$\kappa(w) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(w) \times \ddot{\mathbf{r}}(w)|}{|\dot{\mathbf{r}}(w)|^3}.$$

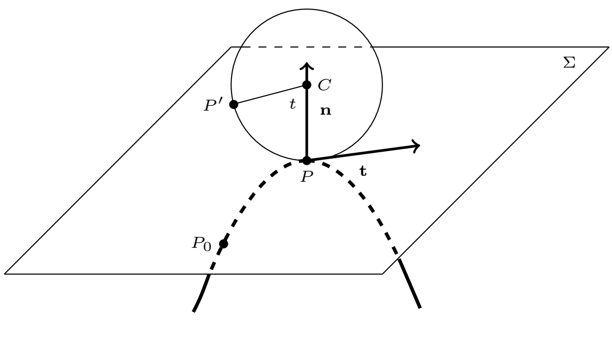
Izpeljimo sedaj enačbo krivulje, ki jo opišejo točke P'. Naj bo $t = \angle PCP'$. Podobno kot v ravninskem primeru, torej kot v enačbi (4), dobimo

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} + R(\mathcal{V}^{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{V}^{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}-t})\mathbf{t}, \tag{14}$$

kjer $\mathcal{V}^{\Sigma}_{\varphi}$ označuje vrtež $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ okrog izhodišča v koordinatnem sistemu v pozitivni smeri za kot φ okrog osi, napete na vektor $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Vektorji $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ in $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Hitro vidimo, da je

$$\mathcal{V}^{\Sigma}_{\varphi}\mathbf{t} = \cos\varphi \cdot \mathbf{t} + \sin\varphi \cdot \mathbf{n},$$



Slika 11. Kotaljenje krogle po prostorski krivulji.

zato lahko enačbo (14) prepišemo v

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r} - R\sin t \cdot \mathbf{t} + R(1-\cos t)\cdot \mathbf{n}. \tag{15}$$

Preostane nam še, da najdemo zvezo med parametroma t in w. Tu opazimo, da je dolžina loka krivulje $\mathcal{C}$ med P_0 in P enaka dolžini krožnega loka med točkama P in P'. Zato je

$$t = \frac{1}{R}\int_{w_0}^{w} |\dot{\mathbf{r}}(\omega)|\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{R}\int_{w_0}^{w}\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,\mathrm{d}\omega, \tag{16}$$

kjer so $E = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$ in $G = \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v$ koeficienti prve fundamentalne forme ploskve $\mathcal{P}$ [7]. Iz enačbe (16) dobimo t izražen v odvisnosti od parametra w, Rt pa je tudi tu naravni parameter krivulje $\mathcal{C}$.

Enačba (15) nam že podaja vektorski opis cikloidne krivulje, ki jo dobimo pri kotaljenju krogle s polmerom R po krivulji $\mathcal{C}$. Pri risanju tira poti krivulje je uporabnejši zapis enačbe po komponentah. Vektor $\mathbf{r}$ ima komponente $\begin{pmatrix} x(w) & y(w) & z(w)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, poleg tega pa označimo $\mathbf{r}_{P'} = \begin{pmatrix} X(w) & Y(w) & Z(w)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Komponente vektorjev $\mathbf{t}$ in $\mathbf{n}$ dobimo iz enačb (12) in (13). Če označimo $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{pmatrix} \tilde{x}(w) & \tilde{y}(w) & \tilde{z}(w)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ in upoštevamo, da je $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, potem dobimo

Izrek. Naj bo $\mathcal{P}$ regularna ploskev, dana z enačbo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. Naj bo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(w), v(w))$ enačba regularne krivulje $\mathcal{C}$, ki leži na ploskvi $\mathcal{P}$. Ob zgornjih oznakah izbrana točka na krogli s polmerom R, ki se kotali po ploskvi $\mathcal{P}$ vzdolž krivulje $\mathcal{C}$, opiše krivuljo z enačbo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{R\sin t}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \pm \frac{R(1-\cos t)}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Pri tem izbira $\pm$ v enačbi (17) odloča o tem, po kateri strani ploskve se krogla kotali.

Oglejmo si primer, ko se krogla s polmerom R kotali po vzporedniku sfere z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, kjer je $a > R$. Sfero lahko parametriziramo s sfernimi koordinatami:

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pri tem je $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\theta \in [0, \pi]$. Točke na danem vzporedniku so natanko tiste, ki imajo konstanten parameter θ, torej $\theta = \theta_0$. Vektorska funkcija $\mathbf{r}(\varphi, \theta_0)$ nam podaja parametrizacijo vzporednika v odvisnosti od parametra φ. Izberimo še orientacijo sfere tako, da normala vedno kaže ven, torej naj se krogla kotali po zunanji strani sfere. Iz enačb (12) in (13) s krajšim računom dobimo

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos\varphi \\ \sin\theta_0 \sin\varphi \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix}.$$

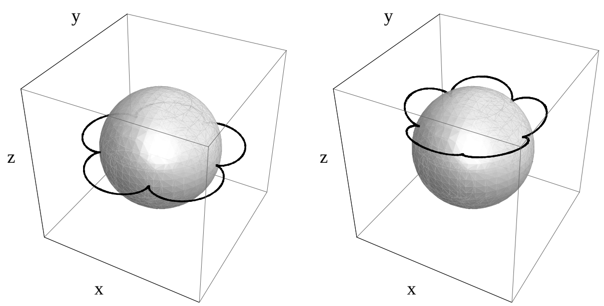
Če izberemo začetno vrednost za φ kar $\varphi_0 = 0$, potem iz enačbe (16) dobimo

$$t = \frac{1}{R} \int_0^{\varphi} |\dot{\mathbf{r}}(\omega, \theta_0)| \, \mathrm{d}\omega = \frac{a \sin\theta_0}{R} \varphi.$$

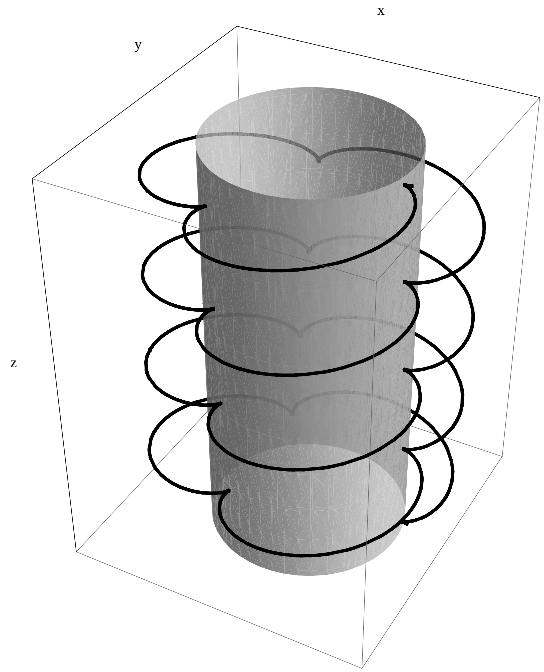
Označimo $A = (a/R) \sin\theta_0$. Če opazimo, da je $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$, iz enačbe (15) dobimo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (a + R(1 - \cos A\varphi)) \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos\varphi \\ \sin\theta_0 \sin\varphi \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} - R \sin A\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Dva primera krivulj z enačbo (18) sta prikazana na sliki 12. Omenimo še, da je krivulja, dana z enačbo (18), periodična natanko tedaj, ko je razmerje med polmerom vzporednika pri $\theta = \theta_0$ in polmerom R kotaleče se krogle racionalno število. Lahko je videti, da je to izpolnjeno natanko tedaj, ko je $A \in \mathbb{Q}$.



Slika 12. Kotaljenje krogle po vzporedniku sfere.



Slika 13. Kotaljenje po spirali, naviti na valj.

Za konec vabimo bralca, da sam izpelje še nekaj podobnih enačb. Poišče naj na primer enačbo krivulje, ki jo dobimo, če se krogla s polmerom R kotali po spirali s parametrično enačbo

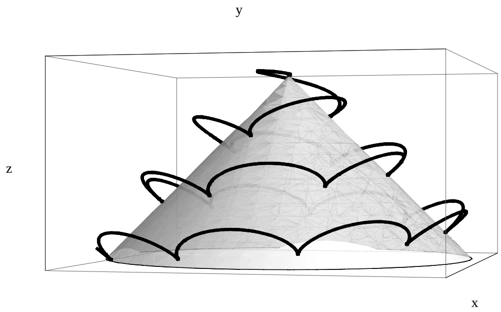
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

kjer sta a in b pozitivni števili. Pri tem naj upošteva, da je ta spirala napeta na valj $x^2+y^2=a^2$. Pri izpeljavi je dobro uporabiti parametrizacijo ploskve s cilindričnimi koordinatami. Ena od teh cikloidnih krivulj je prikazana na sliki 13.

Kot zadnji zgled si oglejmo kotaljenje krogle po spirali

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at\cos bt \\ at\sin bt \\ at \end{pmatrix},$$

ki je navita na stožec $x^2+y^2=z^2$. Bralec lahko za vajo izpelje enačbo te cikloidne krivulje, katere tir poti je prikazan na sliki 14.



Slika 14. Kotaljenje po spirali, naviti na stožec.

LITERATURA

[1] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, d. d., Ljubljana, 1993.

[2] E. H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

[3] H.-O. Peitgen, H. Jürgens in D. Saupe, *Chaos and fractals – New Frontiers of Science*, Springer, New York, 1992, 2004.

[4] R. A. Proctor, *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves*, Longmans, Green and Co., London, 1878.

[5] E. C. Stoner in E. P. Wohlfarth, *A Mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys*, Phil. Trans. R. Soc. London A **240** (1948), 599–642.

[6] I. Vidav, *Variacijski račun*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1985.

[7] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana, 1989.

VESTI

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/pravilniki/Pravilnik_DrustvenaPriznanja.html` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) v skladu s tem pravilnikom za letošnja priznanja pošljete do **30. septembra 2011** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ul. 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije
prof. dr. Sandi Klavžar

KVANTNA ELEKTRODINAMIKA V SLEDI SVINČNIKA

CHRISTOPH GADERMAIER in JURE STRLE

Odsek za kompleksne snovi
Institut Jožef Stefan

PACS: 73.22.Pr, 72.80.Vp, 81.05.ue, 78.67.Wj

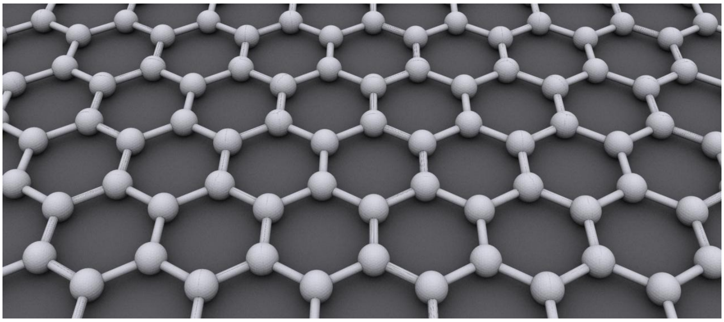
Predstavljamo grafen, za raziskave katerega je bila lani podeljena Nobelova nagrada za fiziko, in njegove fizikalne lastnosti, proizvodnjo ter možnosti uporabe. Osredotočamo se na elektronsko strukturo in lastnosti, izvirne pojave, povezane s kvantno elektrodinamiko, ter uporabo v optiki in elektroniki.

QUANTUM ELECTRODYNAMICS IN A PENCIL TRACE

On the occasion of last year's Nobel Prize in physics we give an overview of the physical properties, production, and potential applications of graphene. We concentrate on the electronic structure and properties, the most original phenomena related to quantum electrodynamics, and optical and electronic applications.

Iz makroskopskega sveta smo vajeni, da se osnovne fizikalne in kemične lastnosti snovi ne spreminjajo z velikostjo predmeta, ki ga snov tvori. Če kos kovine zgolj prerežemo na dva dela, bosta še vedno imela enako gostoto, trdoto, barvo, prevodnost in tako dalje. Toda če kovino režemo še naprej na čedalje manjše kose, se bodo pod neko mejo lastnosti lahko začele spreminjati. Kot primer vzemimo delce snovi, katerih velikost je primerljiva z valovno dolžino vidne svetlobe; sipanje svetlobe na njih in zato tudi barva delcev sta odvisna od njihove velikosti. Kljub nepoznavanju fizikalnega ozadja so to dejstvo izkoriščali že v srednjem veku, ko so steklu primešali nanodelce in dobili barvno steklo za zasteklitve cerkva. Če kose manjšamo še naprej do velikosti valovnih dolžin elektronov v trdnih snoveh, to je nekaj nanometrov, postanejo tudi elektronske lastnosti snovi močno odvisne od njene velikosti in oblike. Dimenzionalna odvisnost funkcionalnih lastnosti snovi, kot je električna prevodnost, pomeni velik nanotehnološki potencial, saj omogoča izdelavo materialov s popolnoma novimi lastnostmi ali kombinacijami lastnosti, ki se jih da prilagajati želeni uporabi s spreminjanjem velikosti ali oblike snovi na nanoskali.

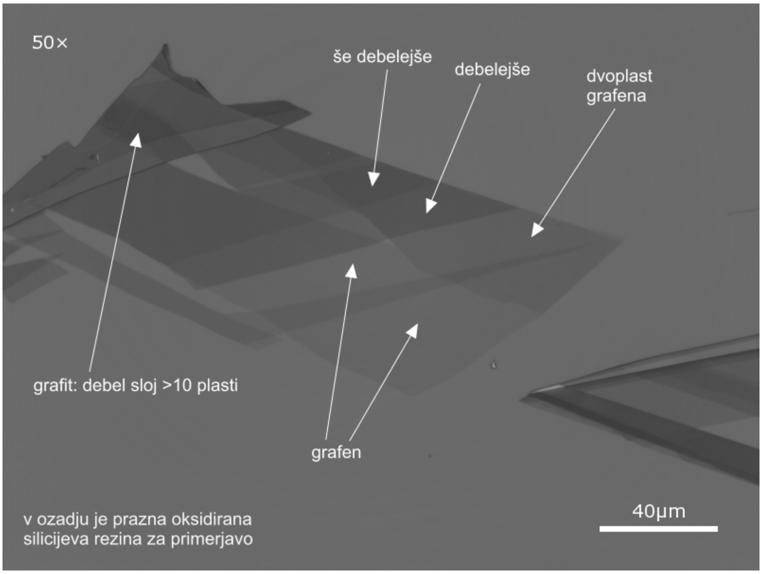
Grafit je ena pogostejših oblik čistega ogljika. Njegovo plastovito strukturo sestavljajo dvodimenzionalne šesterokotne kristalne mreže atomov ogljika, ki so naložene druga na drugo. Vsaka posamezna mreža se imenuje grafen in potrebujemo jih kar tri milijone, da dobimo grafit debeline



Slika 1. Idealna dvodimenzionalna šestkotna kristalna struktura grafena. Razdalja med dvema sosednjima ogljikovima atomoma v mreži je 0,142 nm [20].

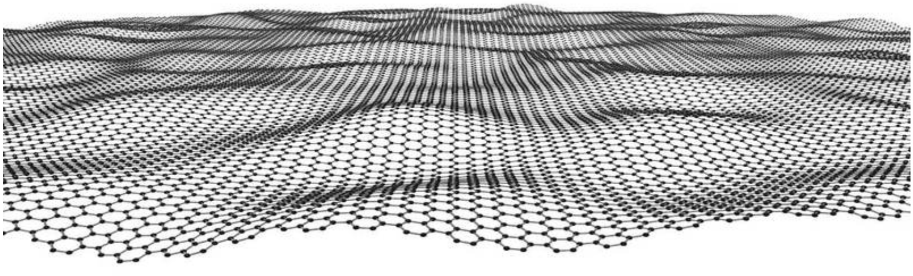
enega milimetra (glej sliko 1). Ko pišemo z grafitnim svinčnikom, se plasti grafita v mini trgajo in odlagajo na papirju. Takemu razcepljanju pravimo eksfoliacija in pravzaprav gre tudi tu za tanjšanje materiala, ki lahko privede do spremembe lastnosti snovi. Čeprav plasti v sledi svinčnika še vedno vsebujejo sloje grafita, sestavljene iz več grafenskih mrež, jih je možno dodatno eksfoliirati na presenetljivo preprost način. Lanska Nobelova nagrajenca za fiziko Andre Geim in Konstantin Novoselov sta leta 2004 uporabila navaden lepljiv trak, da sta odtrgala plast grafita – pravzaprav je šlo za visokourejen pirolitski grafit, čistejšo in bolj urejeno različico grafita od običajne mine svinčnika – in jo nato pritisnila ob substrat. Tako se od tanke plasti grafita na lepljivem traku odlomijo drobne zaplate. Nekatere od njih so sestavljene iz le nekaj ali celo iz ene same plasti grafena. Kljub zelo slabemu izkoristku takega postopka pa pravi izziv ni dobiti posamezne plasti grafena, ampak jih ločiti od preostalih večplastnih slojev. Geim in Novoselov sta odkrila, da se grafen pod optičnim mikroskopom lepo loči od praznega substrata (glej sliko 2), če je kot substrat uporabljena 300 nanometrov debela plast silicijevega dioksida na siliciju, ki se sicer zelo pogosto uporablja v polprevodniški industriji. Debelina oksidne plasti je bistvena, saj že pri 315 nanometrih kontrast, ki je posledica interference v oksidni plasti, popolnoma izgine [1].

V raziskovalni skupnosti je bilo to odkritje nekoliko presenetljivo, saj so teoretiki napovedovali nestabilnost posameznih dvodimenzionalnih kristalov in ti naj bi v naravi obstajali zgolj kot del drugega materiala, kot na primer v grafitu. Pravzaprav je narava elegantno zaobšla teoretične omejitve: posamezne plasti grafena niso povsem dvodimenzionalne, kajti niso popolnoma ravne, ampak nežno valovite s karakteristično dolžino okrog 10 nanometrov (glej sliko 3) [2].



Slika 2. Slika grafenskih plasti, posneta z optičnim mikroskopom. ©Peter Blake, Graphene Industries, ltd.

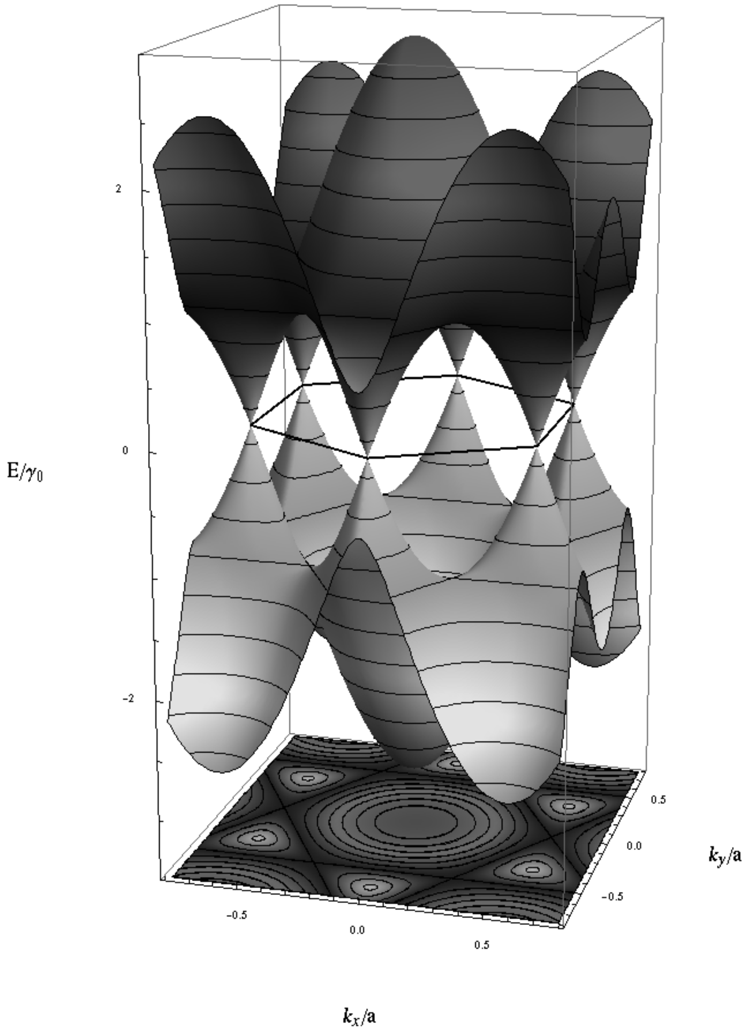
Prvi Geimov in Novoselovov eksperiment na nekajplastnih in enoplastnih grafenskih slojih je bila meritev osnovnih električnih lastnosti – prevodnosti, elektronske mobilnosti in vpliva električnega polja [3]. Električno prevodnost določa sipanje elektronov na nečistočah in nihanjih kristalne mreže. Povprečna prosta pot elektronov med sipanji v bakru pri sobni temperaturi meri okrog 40 nanometrov. V grafenu pa znaša osupljivih 400 nanometrov, kar je vzrok tudi izjemno visoki elektronski mobilnosti. Teoretični izračuni elektronskih pasov so predvidevali, da se v grafenu zapolnjen valenčni pas in prazen prevodni pas ne sekata, ampak le dotikata (glej sliko 4) – takim materialom pravimo „polprevodniki z ničelno energijsko režo“ – zato so v grafenu pričakovali nizko koncentracijo nosilcev naboja, ki naj bi bila tudi močno odvisna od temperature. A tudi v najčistejših vzorcih, kjer ni dodatnih nosilcev naboja zaradi nečistoč, je upor nepričakovano majhen. Kaže celo, da obstaja naravna zgornja meja upora, ki znaša okrog 1/4 von Klitzingove konstante kvanta upora $R_k = h/e^2$. V tranzistorju na poljski pojav (ang. Field Effect Transistor – FET) povečujemo koncentracijo nosilcev naboja, to je elektronov v prevodnem pasu ali vrzeli v valenčnem pasu, linearno z napetostjo na vratih $n = \beta V_G$, $\beta = 7{,}2\ 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{V}^{-1}$, zaradi česar upor pada z $1/V_G$. Grafenskih tranzistorjev zaradi kvantiziranega upora



Slika 3. Model grafenske membrane. ©Max-Planck Institute for Solid State Research.

nikoli ne moremo popolnoma izklopiti, kar zahteva nekoliko drugačne prijeme od tistih v sodobnih vezjih, ki temeljijo na vklopljenih in izklopljenih tranzistorjih. Po drugi strani visoka elektronska mobilnost grafenskih vezij obljublja izjemne frekvence preklapljanja, dosegajoč celo terahertze.

S stališča temeljne fizike pa je verjetno najbolj osupljiv elektronski pojav v grafenu obstoj „brezmasnih elektronov“ ali „Diracovih delcev“ [4], ki je navdihnil naslov več Geimovih predavanj in tudi pričujočega članka. Za elektrone in druge masivne delce v vakuumu velja povezava med njihovo valovno dolžino in energijo $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, kjer je $k = 2\pi/\lambda$ dolžina valovnega vektorja. Energija E kot funkcija k za masivne proste delce ima obliko parabole, katere ukrivljenost je določena z maso delca. Za brezmasne delce, denimo fotone, pa velja $E = \frac{hc}{\lambda} = \hbar c k$ in graf $E(k)$ je premica ali, če upoštevamo vektorsko naravo k in dovolimo gibanje v ravnini, plašč stožca, katerega naklon je določen s svetlobno hitrostjo. Drugače od prostih delcev elektroni v kristalih interagirajo z električnim poljem pozitivno nabite kristalne mreže, zato se odvisnost $E(\vec{k})$ ali disperzija razlikuje od parabol prostih elektronov. Navidezni masi elektronov, ki ustreza ukrivljenosti disperzije v kristalih, pravimo efektivna elektronska masa in je lahko precej drugačna od dejanske elektronske mase. Posebnost grafena je, da za elektrone v prevodnem in vrzeli v valenčnem pasu velja enaka stožčasta odvisnost kot za brezmasne delce, le da naklon ne ustreza svetlobni hitrosti, marveč Fermijevi hitrosti v_F, ki je v grafenu približno 10^6 m/s. Tudi hitrost elektronov v grafenski mreži je neodvisna od njihove energije, podobno kot



Slika 4. Izračunana energija elektronov v grafenu za valovne vektorje $\vec{k} = (k_x, k_y)$. Stožčasti predeli nezasedenih elektronskih stanj in zasedenih stanj se dotikajo brez energijske reže [21].

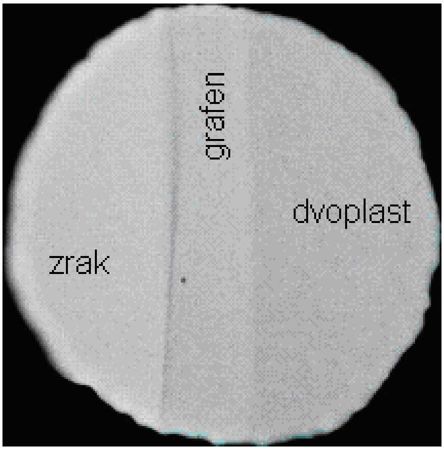
velja za fotone. Fermijeva hitrost v grafenu je tako elektronski ekvivalent svetlobni hitrosti pri fotonih. Popolna simetrija med disperzijama elektronov in vrzeli ustreza elektronsko-pozitronski simetriji fizike visokih energij. Efekti kvantne elektrodinamike, ki povezuje kvantno mehaniko in posebno relativnost, so pogosto obratno sorazmerni s hitrostjo svetlobe c in so v grafenu tako ojačani za faktor $c/v_F \approx 300$, kar omogoča kvantnoelektrodinamske raziskave tudi brez zelo drage opreme v skoraj namiznih eksperimentih, lahko bi rekli „v sledi svinčnika“.

Prvi eksperimentalni dokaz stožčaste odvisnosti disperzije v grafenu je bilo opaženje Shubnikov-de Haasovega efekta. Elektroni v magnetnem polju se premikajo po vijačnici, katere os je vzporedna s poljem. Kot razloži kvantna mehanika, lahko njihove vrtilne količine in energije zavzemajo le določene vrednosti. Če postavimo trdno snov v magnetno polje in nato polje linearno spreminjamo, se ti dovoljeni energijski nivoji premikajo, kar povzroči periodično modulacijo števila prevodnih elektronov in zato tudi modulacijo prevodnosti kot funkcije magnetnega polja. Iz odvisnosti tega efekta od števila prevodnih elektronov kot posledice električnega polja lahko izračunamo disperzijsko zvezo in za grafen dobimo $E \propto k$.

Drug primer kvantnoelektrodinamskega efekta v grafenu je Kleinovo tuneliranje. Kvantnomehansko tuneliranje je efekt, pri katerem obstaja končna verjetnost, da delec premaga energijsko prepreko, ki je višja od njegove kinetične energije, kar ni v skladu s klasično fiziko ali zdravo pametjo. Ta efekt je pomemben pri veliko različnih pojavih, od radioaktivnega razpada do izmenjave elektronov ali protonov pri encimih. Verjetnost za tuneliranje se precej hitro manjša z naraščanjem višine ali širine energijske prepreke. Kvantna elektrodinamika pa predvideva, da gredo lahko brezmasni Diracovi delci neovirano skozi prepreko, tudi če je ta precej visoka ali široka, če nanjo vpadajo pod skoraj pravim kotom. V grafenu so Kleinovo tuneliranje elektronov že potrdili tudi eksperimentalno [5].

Kvantna elektrodinamika opisuje elektromagnetno interakcijo prek sklopitvene konstante za to interakcijo, ki je znana tudi pod imenom konstanta fine strukture. To je brezdimenzijsko število α, ki ga dobimo iz preostalih temeljnih konstant narave: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$. Definicija konstante fine strukture je pogosto zapisana v sistemu enot CGS, kjer je člen $4\pi\varepsilon_0$ izpuščen. V grafenu je prevodnost pri visokih frekvencah konstantna: $G = \frac{e^2}{4\hbar}$, nanjo pa je neposredno vezana optična prepustnost: $T = \frac{1}{(1+2\pi G/c)^2} = \frac{1}{(1+\pi\alpha/2)^2} \approx 1 - \pi\alpha$. Tako vsaka grafenska plast absorbira približno $\pi\alpha \approx 2{,}3$ % svetlobe neodvisno od valovne dolžine, kar so eksperimentalno potrdili za celoten spekter vidne svetlobe in večje dele spektra infrardeče svetlobe (glej sliko 5)[6].

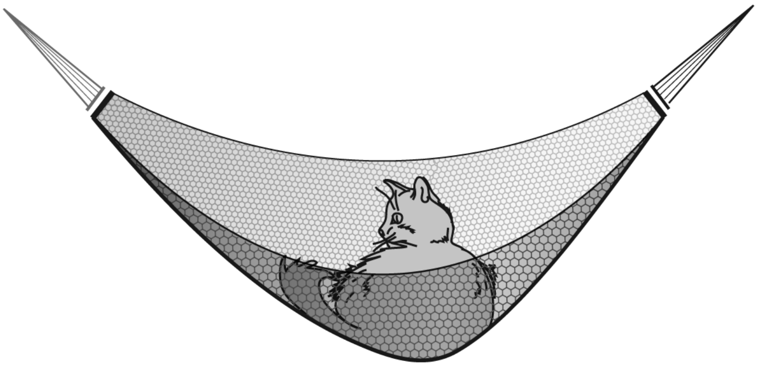
Grafen ima poleg zanimivih pojavov temeljne fizike tudi več praktično uporabnih lastnosti. Omenili smo že grafenske tranzistorje, ki imajo v teoriji lahko izjemne frekvence preklapljanja. Morda za izdelavo integriranih vezij še bolj pomembna pa je visoka toplotna prevodnost grafena, ki je kar



Slika 5. Slika 50 mikrometrov široke odprtine, ki je delno zastrta z grafenom in njegovo dvoplastjo [22].

desetkrat višja od toplotne prevodnosti bakra. Odvajanje toplote je namreč eden večjih izzivov polprevodniške tehnologije, saj sodobni mikročipi že zdaj proizvajajo več toplote na enoto prostornine kot plošče na štedilniku. Druga ideja je uporaba grafena kot prosojne elektrode v ploskih zaslonih. Za zdaj kot optično prepustne elektrode največ uporabljajo indijev kositrov oksid (ang. Indium Tin Oxide – ITO), ki omogoča tehnološko gledano najučinkovitejšo kombinacijo električne prevodnosti in optične prepustnosti. Toda indij je precej redka kovina in zaradi krčenja svetovnih zalog so materiali, ki bi lahko primerno nadomestili ITO, zelo iskani. Za industrijo sprejemljiva vrednost absorpcije svetlobe v takih elektrodah je 10–15 %, in ker vsaka grafenska plast absorbira 2,3 % svetlobe, bi bili uporabni tudi nanosi, ki vsebujejo do šest plasti. Grafen lahko tudi ukrivljamo, kar omogoča izdelavo upogljive elektronike in zaslonov. Naredili so že manjše delujoče prototipe takih elektrod [7] in neodvisno od tega tudi večplastne grafenske filme premera skoraj 1 meter [8]. Morda se bodo naprave na podlagi grafena že v nekaj letih začele pojavljati v naših pisarnah in dnevnih sobah.

Poleg svojih osupljivih električnih, optičnih in toplotnih lastnosti pa ima grafen tudi izjemno mehansko trdnost. Hipotetična viseča mreža iz ene same plasti grafena površine $1\,\mathrm{m}^2$ bi lahko nosila breme 4 kilogramov – denimo mačko (kot je karikirano na sliki 6), tehtala pa bi zgolj 0,77 mg, kar ustreza masi enega mačkinega brka. Obenem lahko grafen elastično raztegnemo za 20 %, kar je več kot pri kateremkoli drugem kristalu [9].

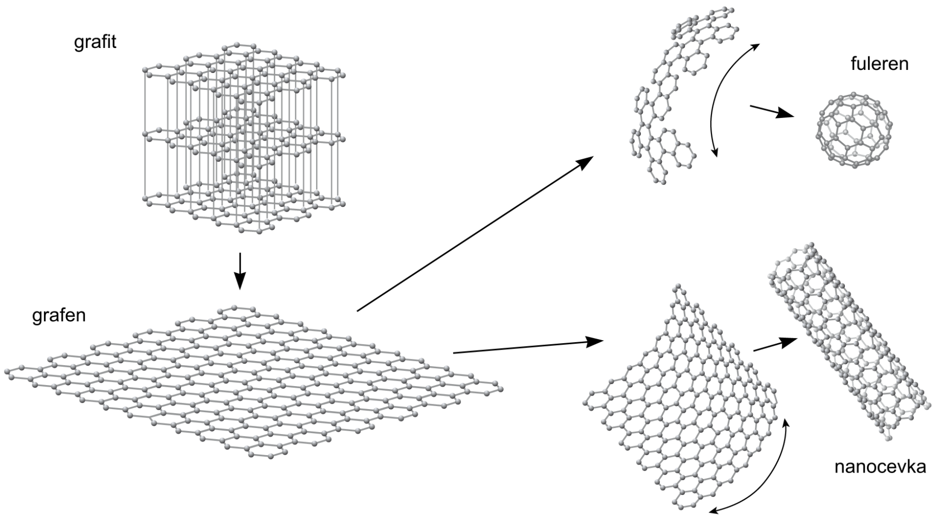


Slika 6. Ena sama plast grafena bi lahko rabila kot viseča mreža srednje veliki mački. Ilustracija: Airi Illiste ©The Royal Swedish Academy of Sciences.

Čeprav je uporaba čistega grafena v gradbene namene za zdaj še utopija, pa ni izključeno dodajanje grafena v plastično maso in jo tako ojačati podobno, a veliko močneje, kot to lahko dosežemo z ogljikovimi vlakni.

Nove možnosti uporabe grafena vključujejo tudi kemijsko zaznavanje. Delovanje plinskih senzorjev temelji na adsorpciji molekul plina na površini trdne snovi, ki zato nekoliko spremeni svoje fizikalne lastnosti; navadno merijo spremembe električne prevodnosti. Seveda se lastnosti spremenijo le v bližini površine, globlje v notranjosti je vpliv adsorpcije premajhen. Dvodimenzionalni materiali pa notranjosti nimajo, saj so vsi njihovi atomi blizu površine, grafen ima celo samo površinske atome, zato so kot senzorji lahko izjemno občutljivi. Grafen odlikujejo zelo nizek šum, dober stik s kovinskimi elektrodami in velika prevodnost že z malo dodanimi nosilci naboja. Zahvaljujoč tako prikladnim lastnostim je Geimova in Novoselovova skupina na mikronskem kosu grafena začutila posamezno molekulo NO_2, kar je tako rekoč skrajna meja zaznavanja [10].

Enostavnost eksfoliacije z lepilnim trakom sicer omogoča dostop do raziskovanja grafena vsem laboratorijem, a iznašli so že metode, ki privedejo do večjih količin grafena, večjih mrež ali celo mrež nadzorovanih oblik. Ena izmed njih je epitaksialna rast grafena na silicijevem karbidu (SiC) [11]. Grafenske plasti zaradi močne interakcije s površino v tem primeru ne moremo obravnavati kot ločenega dvodimenzionalnega kristala, kar sicer omogoča boljšo stabilnost in večje mreže, po drugi strani pa to vpliva na elektronske lastnosti grafena in za veliko raziskav ga je treba najprej prenesti s podlage. Drugi način je rast grafena na določenih kovinskih substratih iz organskih



Slika 7. Molekule fulerena C_{60} in ogljikove nanocevke si lahko zamislimo kot zgrajene iz primerno oblikovanih kosov grafenskih mrež. Ilustracija: Airi Illiste ©The Royal Swedish Academy of Sciences.

par, denimo metana, prek postopka, imenovanega nanašanje s kemičnim naparevanjem (ang. Chemical Vapour Deposition – CVD) [12]. To je cenejša metoda od epitaksialne rasti in je tudi privedla do največjih mrež grafena. Za mreže točno določenih oblik pa so organski kemiki predlagali postopek izgradnje od spodaj navzgor. Nekatere organske molekule, kot je naftalen, so sestavljene iz nekaj benzenovih obročev, ki si delijo stranico ali dve s sosedi. Če pričnemo s takimi molekulami in iz njih z dodajanjem benzenovih obročev postopoma zgradimo večje molekule, kjer so vse stranice benzenovih obročev (razen robnih) deljene s sosedi, prav tako dobimo grafensko mrežo [13]. Tudi eksfoliacija grafena se je spremenila in jo sedaj izvajajo bolj velikopotezno; namesto ročne eksfoliacije z lepilnim trakom zdaj uporabljajo strižne sile, ki nastajajo ob obdelavi grafita z ultrazvokom v primernem topilu, denimo kloroformu [14]. Obdelava v topilu je tehnološko precej zanimiva, ker omogoča nadzorovano nanašanje grafena z različnimi metodami tiska (sitotisk, brizgalno tiskanje).

Grafen ni osnovna enota, iz katere bi bil zgrajen zgolj grafit, ampak tudi druge alotropne oblike ogljika: ogljikove nanocevke in fulereni (glej sliko 7). Ogljikove nanocevke so odprti ali zaprti cilindri, ki si jih lahko predstavljamo kot v cevke zvite eno- ali večslojne grafenske mreže, najtanjša cevka ima premer med 0,5 in 2 nm. Grafen je „nano“ le v eni dimenziji, nanocevke pa v dveh dimenzijah, zato so njihove elektronske lastnosti močno odvisne od premera in vijačnosti, to je smeri, v kateri smo zvili grafensko mrežo. Obseg in vijačnost cevk določata, ali so nanocevke polprevodne ali kovinske. Tudi grafenski trakovi, se pravi dolge a zelo ozke grafenske mreže, imajo podobno odvisnost od širine in orientacije traku. Ogljikove nanocevke se uporabljajo kot prevodno ali ojačevalno polnilo plastičnih in kompozitnih materialov in za izboljšanje lastnosti površine elektrod litijevih ionskih baterij, kajti elektrode določajo življenjski čas baterij in tudi omejujejo maksimalni tok ter njihovo kapaciteto. Še v letu 2007 je bil grafen veliko dražji od ogljikovih nanocevk, kar pa se je obrnilo, saj je sinteza grafena preprostejša in grafen bi lahko nadomestil nanocevke v obeh primerih.

Fulereni so sferam podobne oblike, narejene iz grafenskih mrež. Zaradi narave kemijskih vezi v grafenu (sp2 hibridiziran ogljik) vsi koti med vezmi merijo 120°. Pri zvijanju v cevko se vezi nekoliko prilagodijo, a šesterokotna struktura se ohrani. Zvijanja v sferi podobno strukturo pa ni mogoče izvesti samo s šestkotniki ampak si moramo pomagati tudi z drugimi liki. Če uporabimo petkotnike, iz Eulerjeve formule[1], ki povezuje števila oglišč, robov in ploskev poliedra, sledi, da jih potrebujemo natanko 12 ob poljubnem številu šestkotnikov. Vzorec na klasični nogometni žogi je po tem principu sestavljen iz 20 šestkotnikov in 12 petkotnikov. Najznačilnejši predstavnik fulerenov je molekula C_{60}, kjer 60 ogljikovih atomov tvori skoraj sferičen prisekani ikozaeder. Molekula C_{60} deluje kot elektronski akceptor: če je dovolj blizu polimeru s parom elektron-vrzel, elektron preskoči nanjo, vrzel pa ostane na polimeru [15], kar je uporabno pri delovanju sončnih celic. Tako kot pri nanocevkah so tudi pri fulerenih grafenski kosmi zanimiv nadomestek, kajti omogočajo izbiro drugačnih donorjev, polimerov z manjšo energijsko režo, ki lahko izkoriščajo večji del spektra sončne svetlobe.

Če se vrnemo k našemu uvodnemu primeru rezanja kovine na čedalje manjše kose, grafit ob eksfoliaciji obdrži svoje lastnosti do debeline okrog 10 grafenskih slojev. Dvojni sloj grafena je polprevodnik z ničelno energijsko režo in že kaže veliko zanimivih efektov, a elektroni v njem imajo še vedno efektivno maso, ki znaša približno dvajsetino elektronske mase [16].

Poleg grafita obstaja več drugih plastovitih materialov, zlasti so zanimivi polprevodniki, kot sta borov nitrid BN ali molibdenov disulfid MoS_2, ki se

[1] št. ploskev + št. oglišč = št. robov + 2

prav tako eksfoliirata na podobno enostaven način [17]. Zaradi drugačne zgradbe posamezni sloji sicer ne kažejo kvantnoelektrodinamskih efektov, a ju z grafenom veže več drugih lastnosti in se ju kot polprevodnika da uporabljati v dvodimenzionalni elektroniki komplementarno h grafenu. Zaradi navdušenja nad grafenom tudi ti materiali vzbujajo hitro rastoče raziskovalno zanimanje, v Sloveniji predvsem na Institutu Jožef Stefan. Čeprav še ni bila udejanjena, je v svojem govoru na podelitvi Nobelovih nagrad Kostja Novoselov namenil precej časa ideji vstavljanja plasti grafena med plasti drugih dvodimenzionalnih materialov ter tako ustvarjanju materialov s povsem novimi uporabnimi lastnostmi [18]. Če se poslovimo z mislijo na novelo E. A. Abbotta, bo naša romanca s ploščatim svetom očitno še dolgo trajala [19].

Nobelova nagrajenca: Andre Geim in Konstantin „Kostja“ Novoselov sta se rodila v Rusiji, Geim leta 1958 v Sočiju in Novoselov leta 1974 v Nižnem Tagilu. Ob razpadu Sovjetske zveze sta se zaradi za raziskovanje neugodnih finančnih razmer kot tisoči drugih znanstvenikov odpravila na Zahod in se srečala v Nijmegenu (Nizozemska), kjer je Novoselov postal Geimov doktorski študent. Kasneje sta se skupaj preselila v Manchester (Velika Britanija), kjer oba predavata kot profesorja. Geim je zaslovel že leta 2000 kot prejemnik Ig Nobelove nagrade, ki je satirična različica Nobelove nagrade in podeljena za najbolj neuporabne znanstvene dosežke. Geim je ugotovil, da najdemo diamagnetizem v vseh materialih, če jih postavimo v dovolj močno magnetno polje, in to pokazal z lebdenjem žabe v magnetnem polju. Trenutno je edini znanstvenik, ki je prejel tako Nobelovo kot Ig Nobelovo nagrado.

LITERATURA

[1] A. K. Geim in K. S. Novoselov, *The rise of graphene*, Nature Materials **6** (2007), 183–191.

[2] J. C. Meyer et al., *The structure of suspended graphene sheets*, Nature **446** (2007), 60–63.

[3] K. S. Novoselov et al., *Electric field effect in atomically thin carbon films*, Science **306** (2004), 666–669.

[4] K. S. Novoselov et al., *Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene*, Nature **438** (2005), 197–200.

[5] A. F. Young in P. Kim, *Quantum interference and Klein tunnelling in graphene heterojunctions*, Nature Physics **5** (2009), 222–226.

[6] R. R. Nair et al., *Fine structure constant defines visual transparency of graphene*, Science **320** (2009), 1308.

[7] P. Blake et al., *Graphene-based liquid crystal device*, Nano Letters **8** (2008), 1704–1708.

[8] S. Bae et al., *Roll-to-roll production of 30-inch graphene films for transparent electrodes*, Nature Nanotechnology **5** (2010), 574–578.

[9] C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar in J. Hone, *Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene*, Science **321** (2008), 385–388.

[10] F. Schedin et al., *Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene*, Nature Materials **6** (2007), 652–655.

[11] C. Berger et al. *Ultrathin epitaxial graphite: 2D electron gas properties and a route toward graphene-based nanoelectronics*, Journal of Physical Chemistry B **108** (2004), 19912–19916.

[12] A. Reina et al., *Large area, few-layer graphene films on arbitrary substrates by chemical vapor deposition*, Nano Letters **9** (2009), 30–35.

[13] I. Diez-Perez et al., *Gate-controlled electron transport in coronenes as a bottom-up approach towards graphene transistors*, Nature Communications **1** (2010), 31.

[14] Y. Hernandez et al., *High-yield production of graphene by liquid-phase exfoliation of graphite*, Nature Nanotechnology **3** (2008), 563–568.

[15] N. S. Sariciftci, L. Smilowitz, A. J. Heeger in F. Wudl, *Photoinduced electron transfer from a conducting polymer to buckminsterfullerene*, Science **258** (1992), 1474–1476.

[16] K. S. Novoselov et al. *Unconventional quantum hall effect and Berry's phase of 2p in bilayer graphene*, Nature Physics **2** (2006), 177–180.

[17] K. S. Novoselov et al., *Two-dimensional atomic crystals*, Proceedings of the National Academy of Science **102** (2005), 10451–10453.

[18] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2010/ (ogled: 27. 5. 2011).

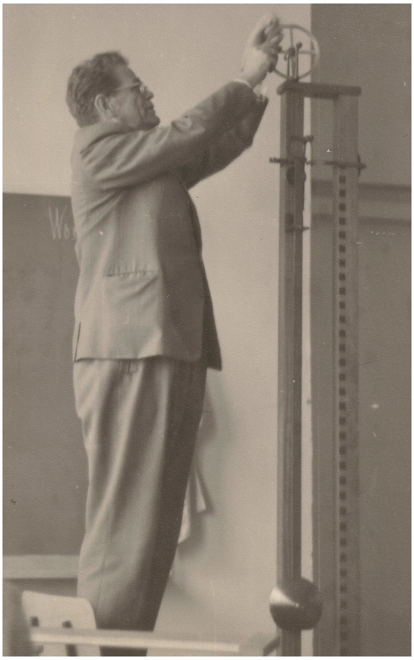
[19] E. A. Abbot, *Flatland, a romance of many dimensions*, Seely & Co., first edition, 1884.

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Graphen.jpg (ogled: 27. 5. 2011).

[21] http://en.wikipedia.org/wiki/File:GrapheneE2.png (ogled: 27. 5. 2011).

[22] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Graphene_visible.jpg (ogled: 27. 5. 2011).

OB STOLETNICI ROJSTVA IVANA ŠTALCA[1]



Konec lanskega leta je minilo sto let od rojstva Ivana Štalca, profesorja matematike in fizike. S svojim pedagoškim delom ter učbeniki in zbirkami vaj je zapustil vidno sled v slovenski matematiki in fiziki. To kaže tudi dodani seznam del.

Ivan Štalec je bil rojen 23. decembra 1910 v Dolenji vasi pri Selcih nad Škofjo Loko kot tretji od desetih otrok v družini Janeza Štalca in mame Frančiške, rojene Ravnihar. V letih od 1917 do 1922 je obiskoval osnovno šolo v Selcih. Šolanje je nadaljeval na Državni gimnaziji v Kranju po humanističnem programu. Leta 1930 je maturiral in leta 1935 diplomiral iz matematike in fizike na Filozofski fakulteti v Ljubljani.

Pri trinajstih letih je izgubil očeta in prevzel del družinskih skrbi. Kot gimnazijec se je za konec tedna vračal v Dolenjo vas, peš, čez Jošta, da je pomagal pri kmečkih opravilih. Od drugega razreda gimnazije se je preživljal z inštruiranjem. Kot odličen študent je bival v brezplačnem Oražnovem domu v Ljubljani. Poleg resnega študija in dela doma ter inštruiranja je tedaj našel čas tudi za številne debate s kolegi in se športno udejstvoval kot nogometni vratar do leta 1932, ko je to dejavnost zaradi poškodbe opustil.

Štiridesetletno učiteljsko pot je profesor Štalec pričel kot suplent leta 1935 na gimnaziji v Murski Soboti. Leta 1936 so ga premestili v Ljubljano na I. državno gimnazijo v Vegovi ulici. Na njej je petindvajset let poučeval matematiko in fiziko z daljšim presledkom med letoma 1945 in 1951, ko je bil premeščen v Trbovlje. Skupaj s I. gimnazijo se je leta 1959 iz Vegove ulice preselil za Bežigrad, kjer je poučeval do upokojitve leta 1975. Ob redni zaposlitvi na šoli je bil v letih od 1951 do 1965 honorarni višji predavatelj na ljubljanski Višji pedagoški šoli. Od 1955 do 1967 pa je poučeval metodiko matematike in fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Omenimo še Štalčev neprostovoljni štirimesečni premor v poučevanju. Leta 1942 so ga

[1]Po predavanju na Seminarju za zgodovino matematičnih znanosti na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

ob raciji zajeli na ulici v Ljubljani in ga odpeljali v Gonars. Po upokojitvi se je intenzivno lotil pisanja, kar pokaže tudi njegova bibliografija. Umrl je po daljši bolezni v Ljubljani 14. junija 1994.

Profesor Štalec je bil zelo dejaven tudi zunaj razreda. Na šoli je vodil matematični krožek, bil je mentor številnim mladim profesorjem, sestavljal je urnike in bil varuh fizikalnega kabineta. Med počitnicami se je udeleževal srečanj Profesorskega ceha v Škofji Loki. Tako so svoje društvo, ki je delovalo v letih od 1932 do 1942, hudomušno imenovali profesorji iz loškega okolja. Ceh je ustanovil tudi Muzejsko društvo in Muzej v Škofji Loki.
Zunaj šole je Ivan Štalec med letoma 1949 in 1951 deloval kot pomožni inšpektor za trboveljski in celjski okraj ter za Ljubljano z okolico. Poleg tega je bil član komisije za republiška tekmovanja iz matematike. Recenziral je dvajset učbenikov za matematiko in fiziko, predaval je na seminarjih za fizikalno eksperimentiranje in sodeloval pri sestavljanju učnih načrtov. Od leta 1951 do leta 1959 je bil tehnični urednik Obzornika za matematiko in fiziko. Kot zunanji sodelavec je sodeloval z Inštitutom za slovenski jezik pri SAZU.

Profesor Štalec je začel pisati dokaj pozno. Njegov prvenec sta bili *Zbirki matematičnih formul*, ki sta bili sestavni del neke vrste priročnika za dijake nižje in višje gimnazije. Obe sta izšli pri Mladinski knjigi leta 1953 v skupnem delu profesorjev I. gimnazije z naslovom *Moj koledar*.

S temi zbranimi formulami za matematiko se je začela vrsta izdaj Štalčevih del. Okoli dvajset del s področja matematike je napisal sam. Sedem del iz matematike, tri iz fizike ter dva priročnika in dva koledarja pa je napisal v sodelovanju s profesorji Francetom Plevnikom, Francem Kvaternikom, Albinom Žabkarjem, Vladimirjem Pilgramom, Ivanom Pucljem, Alojzem Vadnalom, Marijanom Vagajo, Aleksandrom Cokanom, Ivanom Molinarom in Brankom Roblekom. Posebej omenimo učbenika *Geometrija za I. razred gimnazije* 1965 in *Geometrija za II. razred gimnazije* 1970, ki ju je napisal skupaj z Ivanom Pucljem in sta bila dolgo edina srednješolska učbenika za geometrijo.

Od številnih Štalčevih del sta dve skupini močno zaznamovali slovensko srednješolsko matematiko. V prvo sodijo njegove samostojne *Zbirke vaj* *iz aritmetike, algebre in analize* za vse štiri razrede gimnazij in omenjena *Geometrija za srednje šole.* Ta dela kljub spremembam učnih načrtov še vedno izhajajo pri Založništvu DMFA. Kot zanimivost povejmo, da so pod okriljem DMFA omenjene zbirke nalog najprej izšle v obliki skript.

V drugo skupino sodijo Štalčevi štirje učbeniki za tehnične šole: *Matematika 1*, 201 str. – zelen za „zelence“, potrjen 1974; *Matematika 2*, 206 str. – moder za „modre“, potrjen 1974; *Matematika 3*, 210 str. – rdeč za „zagrete“, potrjen 1976; *Matematika 4*, 127 str. – rjav za „zrele“, potrjen 1976. Ti so najprej izšli pri Dopisni delavski univerzi Univerzum, Ljubljana, pozneje pa pri Državni založbi Slovenije.

Ti učbeniki so doživeli zaradi številnih šolskih reform več predelav. Prvo je opravil profesor Štalec sam in nastala so dela: *Linearna funkcija, Odvod*, 1977; *Polinomi, racionalne funkcije, korenske funkcije*, 1977; *Algebrske funkcije, krivulje drugega reda*, 1977; *Kotne funkcije*, 1977. Ta dela je najprej kot poizkusna gradiva izdal Zavod za šolstvo pri DDU Univerzum. Ob prehodu na usmerjeno izobraževanje pa so se profesorju Štalcu pri drugi predelavi in dopolnitvah njegovih del pridružili še soavtorji. Tako so nastala dela: Peter Legiša, Ivan Štalec, Egon Zakrajšek, *Matematika 1*, 1. zvezek: *Uvod, naravna števila, racionalna števila, obseg, kartezijski produkt, relacije, preslikave*, 1981, DZS; 2. zvezek: *Linearna funkcija, enačba, neenačba*, 1981, DZS; Ivan Štalec, Aleksander Cokan, *Zaporedja*, 1992 in Peter Legiša, Ivan Štalec, *Matematika 4. Odvod. Integral*, 1984, DZS.

Omenjene predelave in dopolnitve Štalčevih del so dolgo uporabljali na mnogih srednjih šolah, dokler niso zaradi ponovnih reform ta dela zamrla. Na prigovarjanje številnih srednješolskih profesorjev sta delo Ivana Štalca obudila in dopolnila Miha Štalec in Milena Strnad. V četrtem delu se jima je pridružil še Jože Andrej Čibej. V prvi prenovi in temeljiti dopolnitvi so bili ti učbeniki namenjeni srednjim tehničnim šolam. Pred izidom zadnjega dela prve prenove pa je spet prišlo do sprememb v srednjem šolstvu. Zato je zadnji del prve prenove izšel že kar v duhu naslednje prenove z naslovom

Matematika 4 za gimnazije in tehniške šole, 1999, DZS v diferencirani obliki za gimnazijske in tehnične programe. V letih 2002 in 2003 so sledile prenove tudi preostalih treh del pod naslovom *Matematika 1, 2 in 3 za gimnazije in tehniške šole*. Te učbenike, ki vključujejo duha in ime Ivana Štalca, še vedno uporabljajo na srednjih šolah.

Da so delo Ivana Štalca cenili, pričajo priznanja in odlikovanja: leta 1968 priznanje DMFA Slovenije, 1974 red dela z zlatim vencem, 1984 Žagarjeva nagrada, 1985 častni član DMFA Slovenije.

Spomin na profesorja končajmo z besedami njegovega sina Miha: „Pri svojem delu je bil vedno vesten, natančen, dosleden, strog in pravičen. Še bolj kot po strokovnosti je slovel po metodičnosti in pedagoškem pristopu."

Učbeniki in zbirke vaj

1. Ivan Štalec, *Matematika: splošno izobraževalna šola*, 2. stopnja, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1959.
2. Ivan Štalec, *Poglobitvena matematika za 1. razred ekonomske srednje šole*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1961.
3. Ivan Štalec, *Tehniško računstvo – 1. del*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1961.
4. Ivan Štalec, *Tehniško računstvo – 2. del*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1961.
5. Ivan Štalec, *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 1. razred gimnazije*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1970.
6. Ivan Štalec, *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 2. razred gimnazije*, Državna založba Slovenije, 1970.
7. Ivan Štalec, *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 3. razred gimnazije*, Državna založba Slovenije, 1972.
8. Ivan Štalec, *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 4. razred gimnazije*, Državna založba Slovenije, 1974.

9. Ivan Štalec, *Matematika za 7. razred osnovnega izobraževanja in vzgoje odrasli*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1979.
10. Ivan Štalec, *Matematika za 8. razred osnovnega izobraževanja in vzgoje odraslih*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1979.
11. Ivan Štalec, *Matematika za prvi razred tehniških šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1973.
12. Ivan Štalec, *Matematika za drugi razred tehniških šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.
13. Ivan Štalec, *Matematika za tretji razred tehniških šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1975.
14. Ivan Štalec, *Matematika za četrti razred tehniških šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1976.
15. Ivan Štalec, *Geometrija za prvi razred tehniških šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1973.

Matematika za srednje usmerjeno izobraževanje

1. Ivan Štalec, *Linearna funkcija. Odvod*, Zavod SRS za šolstvo, Ljubljana, 1977.
2. Ivan Štalec, *Polinomi. Racionalne funkcije. Korenske funkcije*, Zavod SRS za šolstvo, Ljubljana, 1977.
3. Ivan Štalec, *Algebrske funkcije. Krivulje drugega reda*, DDU Univerzum, Ljubljana, 1977.
4. Ivan Štalec, *Kotne funkcije*, DDU Univerzum, Ljubljana, 1977.

V soavtorstvu

1. Ivan Štalec, *Moj koledar za nižje razrede gimnazij*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1953 (v sodelovanju s profesorji 1. gimnazije).
2. Ivan Štalec, *Moj koledar za višje razrede gimnazij*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1953 (v sodelovanju s profesorji 1. gimnazije).
3. Ivan Štalec, France Plevnik, *Fizikalne vaje*, Zavod za prosvetno-pedagoško-službo, Ljubljana, 1961.
4. Ivan Štalec, *Fizika za 7. razred osnovnih šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1962.
5. Ivan Štalec, Franc Kvaternik, Albin Žabkar, *Fizika za 8. razred osnovnih šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1963.
6. Ivan Štalec, Ivan Pucelj, *Geometrija za 1. razred gimnazije*, Založba Obzorja, Maribor, 1965.
7. Ivan Štalec, Ivan Pucelj, *Geometrija za 2. razred gimnazije*, Založba Obzorja, Maribor, 1970.
8. Ivan Štalec, Vladimir Pilgram, *Matematika za 1. razred ekonomskih srednjih šol*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1970.

9. Ivan Štalec, Vladimir Pilgram, *Matematika za 2. razred ekonomskih srednjih šol*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1972.
10. Ivan Štalec, Vladimir Pilgram, *Matematika za 3. razred ekonomskih srednjih šol*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1974.
11. Ivan Štalec, Franc Avsec, Aleksander Cokan, Ivan Molinaro, Ivan Pucelj, Branko Roblek, Marjan Vagaja, *Zbirka vaj iz aritmetike, analize in algebre za III. razred srednjih šol*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1972.
12. Ivan Štalec, Vladimir Pilgram, *Matematika I. Izbrana poglavja za poklicno administrativno šolo*, Dopisna delavska univerza, Ljubljana, 1978.
13. Ivan Štalec, Alojzij Vadnal, *Leksikon. Matematika*, Cankarjeva založba, Ljubljana, 1980.

Predelave

1. Ivan Štalec, Peter Legiša, Egon Zakrajšek, *Matematika 1, Uvod, naravna števila, racionalna števila, obseg, kartezijski produkt, relacije, preslikave*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1981.
2. Ivan Štalec, Peter Legiša, Egon Zakrajšek, *Matematika, Linearna funkcija, enačba, neenačba*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1981.
3. Ivan Štalec, Aleksander Cokan, *Zaporedja*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1992.
4. Ivan Štalec, Aleksander Cokan, *ZNSŠ Zaporedja. Diferencialni in integralni račun*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1991.
5. Ivan Štalec, Peter Legiša, *Matematika 4, Odvod. Integral*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1984.
6. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, zgodovinski utrinki Gregor Pavlič, *Matematika 1 za tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 1993.
7. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 2 za tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 1997.
8. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 1 za tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 1999.
9. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 3 za tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 1999.
10. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, Jože A. Čibej, *Matematika 4 za gimnazije in tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 1999.
11. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 1 za gimnazije in tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 2002.
12. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 2 za gimnazije in tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 2003.
13. Ivan Štalec, Miha Štalec, Milena Strnad, *Matematika 3 za gimnazije in tehniške šole*, DZS, Ljubljana, 2004.
14. Ivan Štalec, Aleksander Cokan, Srečko Polanc, *ZNSŠ Zaporedja, diferencialni in integralni račun*, DZS, Ljubljana, 2005.

Milena Strnad

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi k sodelovanju na strokovnem srečanju in 63. občnem zboru, ki bosta 28. in 29. oktobra 2011 v Hotelu Slovenija v Portorožu.

Vodilna tema letošnjega strokovnega srečanja ima naslov *Ko enačbe oživijo – uporaba GeoGebre pri pouku fizike in matematike.*

Računalniški program GeoGebra učinkovito povezuje geometrijo, algebro ter delo s funkcijami in preglednicami, zato omogoča zelo privlačne ponazoritve raznovrstnih matematičnih in fizikalnih vsebin. V okviru srečanja bomo pripravili različne delavnice tako za začetnike kot tudi za izkušenejše uporabnike. Vodilni temi bo dodana tudi astronomska delavnica, namenjena mentorjem tekmovanj v znanju astronomije, in nekaj matematičnih in fizikalnih tem za delo s tekmovalci.

K sodelovanju vabimo vse učitelje in člane DMFA, da predstavijo svoje izkušnje in ideje:

1. v obliki krajših predstavitev (do 25 minut);
2. v obliki plakatov;
3. v obliki delavnice (o pogojih za izvedbo se bo treba poprej dogovoriti).

Dobrodošli so tudi prispevki, ki niso vezani na GeoGebro.

Predavateljem bodo na voljo internet, projekcijsko platno, projektor in ena e-tabla (uporaba e-table bo možna po poprejšnjem dogovoru). Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj ali pa se morajo o tem poprej dogovoriti.
Kontaktna oseba je dr. Boštjan Kuzman: `bostjan.kuzman@pef.uni-lj.si`.
Prosimo vas, da prijavite svoje prispevke na naslov `bostjan.kuzman@pef.uni-lj.si` najkasneje do **20. septembra 2011**.
Prijave morajo vsebovati:

1. naslov prispevka;
2. ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači naslov in elektronski naslov;
3. kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega pol strani formata A4);
4. predlagano trajanje predstavitve.

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Ob letošnjem občnem zboru bomo pripravili tudi **14. slovensko srečanje o uporabi fizike**.

Hotelske storitve si morajo udeleženci strokovnega srečanja rezervirati sami.

Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si/`.

Predsednik DMFA Slovenije
prof. dr. Sandi Klavžar

MATEMATIČNE NOVICE

Mednarodna matematična unija – IMU

Mednarodno matematično unijo (IMU) bo v letih 2011–2014 prvič vodila ženska. Belgijka Ingrid Daubechies, rojena leta 1954, je kariero začela kot matematična fizičarka. Po poroki z ameriškim matematikom se je preselila v ZDA in se zaposlila najprej v industriji, v raziskovalnih laboratorijih. Največje uspehe je dosegla na področju teorije *valčkov* in njihovi uporabi v kompresiji slik. Zdaj je profesorica na univerzi Princeton. Dobila je več pomembnih nagrad in priznanj. Simpatično samopredstavitev najdemo v [1].

Abelova nagrada Johnu Milnorju

Norveška Akademija znanosti je Abelovo nagrado za leto 2011 dodelila ameriškemu matematiku Johnu W. Milnorju z Univerze Stony Brook v New Yorku. Milnor je zelo znan po rezultatih s področja topologije, geometrije in algebre. Pred leti smo na topološkem seminarju predelovali knjigo o karakterističnih razredih [2], ki jo je Milnor napisal skupaj z J. D. Stasheffom. Delo nazorno posreduje nelahko snov (zdaj uporabljano tudi v fiziki).

Objavljanje člankov

V biltenu IMU [3] Jean-Pierre Bourguignon, nekdanji predsednik Evropskega matematičnega društva, razmišlja o prihodnosti objavljanja novih matematičnih rezultatov. Pritiski, naj raziskovalci kar se da veliko publicirajo, obenem z naraščajočimi obremenitvami matematikov s pisanjem projektov, prošenj za financiranje, pisanjem ocen . . . vodijo k raznim problemom. Recenziranje člankov je pogosto površno, zato je v objavljenih prispevkih lahko precej spodrsljajev in napak. Ali, kot pravi Bourguignon: Vse več objavljenih matematičnih člankov je „skoraj pravilnih“ v smislu, da resnični strokovnjaki vedo, kaj je treba spremeniti (pogosto gre za malenkosti), da bi rezultati in dokazi bili v redu. To je ovira za tiste mlade raziskovalce, ki nimajo vsakodnevnega stika z eksperti.

Pojavljajo se tudi druge anomalije, ki jih v reviji Siam News [4] opisuje Douglas N. Arnold. Tako je recimo podiplomski študent Philip Davis (z univerze Cornell) s prijateljem uporabil računalniški program SciGEN, ki je z besediščem teoretičnega računalništva izdelal članek brez kakršnekoli smiselne vsebine. V [4] lahko preberete stavke iz tega članka, pri katerih bi vsakemu malo kritičnemu bralcu zazvonil alarm. Članek sta poslala v *The Open Information Science Journal.* Revijo izdaja založba Bentham Science, ki ima sedež v Združenih arabskih emiratih. Med več kot dvesto revijami, ki jih izdaja ta založba, naj bi jih precej imelo visok faktor vpliva. Avtorja sta se podpisala s psevdonimoma, kot matično ustanovo sta navedla Center for Research in Applied Phrenology ali kratko CRAP. Štiri mesece pozneje sta dobila obvestilo, da je bil po recenziji članek sprejet in bo objavljen, ko bosta vplačala 800 USD. Enako izdelan ničvreden referat je bil sprejet na eni od konferenc v mestu Orlando na Floridi.

Snemanje predavanj

Študent David Hayden z Arizona State University je vodja ekipe, ki je izdelala prototip naprave z imenom Note Taker. Sestavljena je iz zmogljive videokamere in tabličnega računalnika. Naprava snema in povečuje besedilo na tabli, obenem pa omogoča pisanje zapiskov. (Na [5] je videopredstavitev, na [6] pogovor s konstruktorjem.) Kamera lahko sledi dogajanju na tabli. Naprava naj bi bila namenjena predvsem slabovidnim študentom. Če bo cena dostopna, utegne to vplivati tudi na spremljanje predavanj za druge študente. Naprava je zmagala na Microsoftovem tekmovanju Imagine Cup 2011.

LITERATURA

[1] http://www.mathunion.org/imu-net/archive/2011/imu-net-45/ (ogled: 7. 6. 2011)

[2] J. W. Milnor in J. D. Stasheff, *Characteristic classes, annals of mathematics studies*, Princeton University Press, 1974, 330 str.

[3] http://www.mathunion.org/imu-net/archive/2011/imu-net-46/ (ogled: 7. 6. 2011)

[4] D. N. Arnold: *Integrity under attack*, The state of scholarly publishing http://ima.umn.edu/~arnold/siam-columns/integrity-under-attack.pdf (ogled: 7. 6. 2011)

[5] Zapiski za slabovidne, Science Friday, 15. april 2011: http://www.sciencefriday.com/program/archives/201104155 (ogled: 7. 6. 2011)

[6] Zapiski za slabovidne, National Public Radio, 15. april 2011: http://www.npr.org/2011/04/15/135442950/note-taking-made-easy-for-legally-blind-students (ogled: 7. 6. 2011)

Peter Legiša

NOVE KNJIGE

Peter J. Bentley: Knjiga o številih – Skrivnost števil in kako so ustvarila sodobni svet, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2010, 272 strani (prevod iz angleščine).

Števila nedvomno niso potrebna le za razumevanje osnov matematike, z njimi se pravzaprav srečujemo vsepovsod, in to vse življenje, od najnežnejšega otroštva naprej. Brez zadržkov lahko rečemo, da ljudje uporabljamo števila na vseh področjih svojega delovanja in bivanja. Števila ne sodijo samo v matematiko, z njimi imamo opravka v vsakdanjem življenju v zvezi z denarjem, še posebej v kriznih časih, ko pozorno preštevamo svoje dobičke in izgube, plače, pokojnine, nadomestila, honorarje, denarne kazni, vstopnine in drugo. S števili se srečamo v avtu, veliko jih je v naših osebnih dokumentih, koledarjih, da o računalnikih ne govorimo, in še bi lahko naštevali.

Knjiga nas na svojevrsten pripovedni način popelje skozi zgodovino razvoja pojma števila, od najpreprostejšega štetja in zapisa števil v sivi davnini naprej. Posebej je poudarjeno, kateri ljudje si lastijo posebne zasluge, da je znanje o številih nenehno napredovalo. Dandanes uporabljamo v zapisih števil in računanju z njimi ničlo in le malokdo pomisli, da je ljudje še niso uporabljali pred dva tisoč leti, ampak da jo je nekdo moral izumiti. Prav tako se je godilo tudi z danes vsepovsod prisotnim desetiškim sistemom za zapis števil in ustrezne števke.

Knjiga se ne more izogniti znanim številom, kot so krožno število π, zlato število $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, ki ga nekateri označujejo s τ, in število e, osnova naravnih logaritmov. Slednje je na primer povezano z neprestano kapitalizacijo, naravno rastjo in radioaktivnim razpadom. Izvemo tudi marsikaj o Pitagori in pitagorejcih, ki so svoj nauk o številih povzdignili skoraj na raven religije. Starogrška matematika je sicer dosegla marsikaj, saj je skoraj do podrobnosti obvladala racionalna števila, zataknilo pa se ji je pri iracionalnih številih, kakršno je na primer $\sqrt{2}$. Pitagorejci se z njim preprosto niso ukvarjali. Toda prej ali slej so se ljudje morali spoprijeti tudi s celimi, iracionalnimi in kompleksnimi števili. Tudi nekateri upodabljajoči umetniki so znali veliko matematike, zlasti geometrijo skupaj s perspektivo, in jih zato lahko upravičeno štejemo za sopotnike matematikov. Seznanimo se še z marsičim, tudi z zablodami, nesporazumi in problemi prvenstva ter avtorstva v matematiki.

Pripoved v knjigi ne poteka v zgodovinskem zaporedju, ampak v soglasju s števili, od majhnih prek malo večjih proti neskončnosti in se konča s kompleksnimi števili. Temu ustrezno sta prvi poglavji posrečeno oštevilčeni z -1 in 0. Tema sledi poglavje 0,000000001, označeno s številom, ki predstavlja nekaj zelo majhnega. Sledijo poglavja, ki so po vrsti oštevilčena z $1, \sqrt{2}, \phi, 2, e, 3, \pi$ in 10. Namesto poglavje 13 zapiše avtor poglavje 12a, da s tem vključi v pripoved še malo vraževerja in igre na srečo. Nato sledijo še poglavja, oštevilčena s c, hitrostjo svetlobe v praznem prostoru, z ∞ in z i, imaginarno enoto. Vsako poglavje nam ponuja nekaj zgodovine matematike in sproti spoznavamo pomembne ljudi, ki so jo ustvarjali. Če knjigo samo prelistamo in se nekoliko zaustavimo pri ilustracijah, opazimo znana imena, na primer: Brahmagupta, L'Hôpital, Bernoulli, Pitagora, Fermat, Eratosten, Ptolemaj, Evklid, Euler, Cantor, Sokrat, Platon Aristotel, Arhimed, Al-Hvarizmi, Descartes, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, Fibonacci, Kepler, Newton, Leibniz. Še in še bi jih lahko naštevali, končali pa bi pri Gaussu, Weberju, Mandelbrotu, Lorenzu in spet pri Eulerju ter njegovi znameniti formuli $e^{\pi i} + 1 = 0$, ki povezuje kar pet pomembnih števil, ki jih obravnava knjiga, in sicer $0, 1, \pi, e$ in i.

Knjiga je bogato likovno opremljena, v njej je veliko lepih in zanimivih računalniških slik, fraktalov, starodavnih risb, poslikav in drugih upodobitev, fotografij in podobnih gradiv, ki imajo opravka s števili. Konča se z obširnim seznamom virov in literature, stvarnim kazalom, časovno spiralo, komentarjem o ženskah v matematiki in zahvalami različnim inštitucijam za slike.

Vsekakor ponuja knjiga zanimivo branje, pri katerem še tako zahteven bralec izve tudi marsikaj novega in pri tem lahko uživa ob pogledu na izredno lepe ilustracije. Pri tem je morda najpomembnejše, da spozna, kako je matematika nastajala in se razvijala, kako so se rodila nekatera nova matematična področja in kateri so tisti dogodki, ob katerih lahko rečemo, da je matematika doživela znaten napredek.

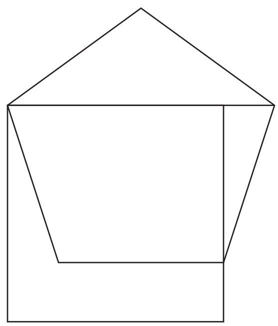
Še nekaj besed o avtorju. Britanski profesor Peter John Bentley se je rodil leta 1972 in ima osnovno zaposlitev na University College v Londonu. Diplomiral je na področju umetne inteligence in pri 24 letih doktoriral. Njegova doktorska disertacija ima naslov *Generic Evolutionary Design of Solid Objects using a Genetic Algorithm*. Njegovo znanstveno področje sta računalništvo in njegova uporaba, zlasti v biologiji. Poleg znanstvenih je napisal tudi več del za popularizacijo matematičnih in računalniških znanosti, čemur se posveča tudi na javnih prireditvah in srečanjih ter na radiu.

Marko Razpet

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Dragi bralci, tokrat vam zastavljamo dve novi vprašanji, ki ju je pripravil Izidor Hafner. Spodaj objavljamo rešitve vseh nalog razen zadnje iz 6. številke prejšnjega letnika. Objavljene rešitve nam je poslal Stanislav Pirnat iz Celja. Vabimo vas, da nam pošljete tudi rešitvi na danes zastavljeni vprašanji in rešitev zgoraj omenjene naloge iz zadnje lanske številke. Veseli bomo tudi vaših predlogov nalog.

1. Kateri lik na skici ima večjo ploščino, pravilni petkotnik ali kvadrat? Odgovor dokaži.



2. Poišči števila q_1, q_2, q_3, $q_4 \in \mathbb{Q}$ ter $k \in \mathbb{Z}$, za katera velja

$$\mathrm{arctg}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = q_1 \mathrm{arctg}(q_2\sqrt{5}) + q_3 \mathrm{arctg}(q_4\sqrt{3}) + \frac{k\pi}{2}\,.$$

Odgovori na vprašanja iz 6. številke Obzornika, letnik 57 (2010)

1. Brivec v Ženevi raje obrije dva Francoza kot enega Nemca, saj je plačilo za britje dveh Francozov dvakratnik plačila za britje enega Nemca.

2. Edina trojica naravnih števil, pri katerih je vsota enaka njihovemu produktu, je 1, 2, 3.

3. Enakokraki trikotnik s krakoma dolžine 1 ima maksimalno možno ploščino, kadar je drugi krak višina na prvi krak. Trikotnik je torej pravokoten in dolžina osnovnice je $\sqrt{2}$.

4. Stavek simbolne logike „$2B \vee \neg 2B =?$“ izraža znano Hamletovo dilemo „*To be* OR NOT *to be* IS the question.“

5. Če je julija ob polnoči v Omahi močno deževalo, je bila po 72 urah ponovno polnoč, v nobeni točki države Omaha pa noben dan v letu ob tej uri ni sončno.

6. „Gospod Novak ima več kot tisoč knjig," reče Janez.

   „Ne, manj jih ima," trdi Peter.

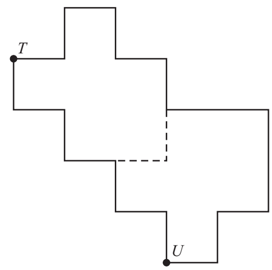
   „Gotovo ima vsaj eno," je prepričana Tina.

   Če je samo ena od zgornjih trditev resnična, gospod Novak nima nobene knjige. Res, obenem z Janezovo trditvijo je resnična tudi Tinina, zato Janezova trditev ni edina resnična. Skupaj s Tinino trditvijo je resnična ali Janezova (in Petrova ne) ali Petrova (in Janezova ne), torej tudi Tinina trditev ni edina resnična. Petrova trditev je edina resnična, če Tinina ni in gospod Novak nima nobene knjige.

7. Sekretarju OZN je bilo pred 35 leti ime enako kot danes – če je star vsaj 35 let in ni spreminjal imena.

8. Kvadrat s stranico a razdelimo na pet skladnih delov tako, da ga razrežemo na pet pravokotnikov s krajšo stranico $\frac{a}{5}$ in daljšo stranico a.

9. Črtkani daljici razdelita lik na dva skladna desetkotnika. Pokrijeta se točki T in U.



10. Preglednico, ki ima v prvi vrstici zapisane števke od 0 do 9, lahko na dva načina dopolnimo tako, da je v drugi vrstici pod vsako števko zapisano število pojavitev te števke v preglednici.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	11	2	1	1	1	1	1	1	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7	3	2	1	1	1	2	1	1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2011
Letnik 58, številka 3
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Model grafenske mreže: prostostoječa grafenska membrana je nežno valovita. © Max Planck Institute for Solid State Research. Glej članek na strani 109.