Priprave na MMO 2024 – 1. domača naloga

1. V tabeli velikosti 7×7 dve polji pobarvamo z rdečo, preostala pa z modro barvo. Dve barvanji tabele sta enaki, če lahko od enega do drugega pridemo z rotacijo. Na koliko različnih načinov lahko pobarvamo tabelo?

2. V tabeli velikosti 8×8 označimo 8 polj, pri čemer nobeni nista v isti vrstici ali istem stolpcu. Za vsaki dve različni označeni polji na tablo napišemo razdaljo med njunima središčema. Dokaži, da smo na tablo napisali dve enaki števili.

3. Pravimo, da sta dve polji šahovnice velikosti 8×8 *sosednji*, če imata skupno stranico ali oglišče. Na šahovnico postavimo kralja. Ali je mogoče, da kralj obišče vsako polje šahovnice natanko enkrat, pri čemer se v vsaki potezi razen prvi premakne v polje, ki je sosednje sodemu številu že obiskanih polj?

   Opomba: Kralj se v vsaki potezi lahko premakne na poljubno sosednje polje.

4. Naj bo n liho naravno število. Določi število permutacij π množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katere je
$$|\pi(1) - 1| + |\pi(2) - 2| + \cdots + |\pi(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **19. 11. 2023** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

1. Če ne bi upoštevali pogoja o enakosti barvanj po rotaciji, bi našteli $\binom{49}{2} = \frac{49\cdot 48}{2} = 1176$ različnih barvanj, saj moramo izmed 49 polj izbrati dve rdeči polji. Na ta način bi večino dejanskih barvanj (z upoštevanjem rotacij) šteli večkrat – razmislimo, koliko barvanj bi šteli enkrat, dvakrat ali štirikrat.

   Hitro ugotovimo, da nobenega barvanja ne bi šteli samo enkrat. Tako barvanje bi se moralo namreč ohranjati z rotacijami. Ker bi bilo vsaj eno od rdečih polj nesredinsko, bi morala biti rdeče obarvana še vsa tri ostala polja, ki jih to polje pokrije po rotacijah za kot 90°. To pa seveda ni mogoče, saj sta rdeči le dve polji.

   Obstajajo barvanja, ki bi jih na opisan način šteli dvakrat. To so barvanja, ki se ohranijo po rotaciji za kot 180°. Tako barvanje ne more imeti sredinskega polja pobarvanega rdeče, zato je vsako tako barvanje določeno z izborom enega polja iz skrajno zgornje leve 4×3 podtabele – drugo rdeče polje bo namreč njegova zrcalna slika čez središče tabele. Takih barvanj je torej natanko 12.

   Vsa ostala barvanja smo torej šteli štirikrat. Če naj bo teh barvanj n, velja

   $$4n + 2 \cdot 12 = 1176,$$

   od koder dobimo $n = 288$, zato je vseh barvanj $n + 12 = 300$.

2. Na tablo smo zapisali toliko števil, kot lahko sestavimo parov iz naših osmih polj, kar je $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$. Poglejmo si sedaj, koliko je vseh možnih razdalj, ki jih lahko napišemo. Ker nobeni dve označeni polji nista v isti vrstici ali stolpcu, so možne razdalje med dvema poljema v vodoravni oz. navpični smeri $1, 2, \ldots, 7$.

   Razdalja med dvema poljema se po Pitagorovem izreku izračuna kot $\sqrt{a^2 + b^2}$, kjer sta a in b zaporedoma razdalja v vodoravni in navpični smeri. Sledi, da je možnih razdalj največ toliko, kot je neurejenih parov števil (a, b), kjer sta a in b ne nujno različni števili iz $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Takih parov pa je $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$, kjer sta števili različni, in 7, kjer sta števili enaki, skupaj torej 28. Ker pa pri parih $(1, 7)$ in $(5, 5)$ dobimo enako razdaljo

   $$\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 + 5^2},$$

   je možnih razdalj največ 27. Tako smo po Dirichletovem principu vsaj eno razdaljo zapisali vsaj dvakrat.

3. Pokazali bomo, da tak obhod ni mogoč. Preštejmo, koliko parov sosednih polj bi obiskali, če bi opisan obhod obstajal. Po eni strani bi moral kralj na koncu obiskati vsa polja, zato bi obiskal tudi vsak par sosednih polj natanko enkrat. Tako smo upoštevali toliko sosednosti, kot jih je v vsej šahovnici, kar je

   $$\frac{36 \cdot 8 + 24 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{2} = 210,$$

   saj imamo 36 polj s po 8 sosedi (nerobna polja), 24 polj s po 5 sosedi (robna polja, ki niso v kotih) ter 4 polja s po 3 sosedi (kotna polja), vse sosednosti pa smo pri tem razmisleku šteli natanko dvakrat.

   Po drugi strani pa v vseh korakih razen v prvem kralj obišče sodo število novih parov sosednih polj. Ker v prvem koraku obišče natanko en par sosednih polj, v vseh nadaljnjih pa sodo mnogo, bi jih moral v celoti obiskati liho mnogo. To je v protislovju z izračunanim sodim številom parov sosednih polj, zato tak obhod res ni mogoč.

4. Ker vedno velja $|a-b| = a-b$ ali $|a-b| = -a+b$, lahko dano vsoto zapišemo kot

$$|\pi(1)-1| + |\pi(2)-2| + \cdots + |\pi(n)-n| = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \cdots \pm n \pm n,$$

kjer imamo n plusov in n minusov v nekem vrstnem redu. Največja vrednost tega izraza bo torej dosežena, ko bodo plusi pri največjih številih, torej bo enaka

$$\begin{aligned}
&2\left(-1-2-\cdots-\frac{n-1}{2}\right) - \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + 2\left(\frac{n+3}{2} + \cdots + n\right) \\
=&-\frac{n-1}{2}\cdot\left(1+\frac{n-1}{2}\right) + \frac{n-1}{2}\cdot\left(\frac{n+3}{2}+n\right) \\
=&\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n+(n+3)-2-(n-1)}{2} \\
=&\frac{n^2-1}{2}.
\end{aligned}$$

Prešteti moramo torej, pri koliko permutacijah so predznaki postavljeni na opisan način. Naj bo $\pi\left(\frac{n+1}{2}\right) = k$. Če je $k \leq \frac{n-1}{2}$, mora veljati

$$\left\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \ldots, n\right\}$$

in

$$\left\{\pi\left(\frac{n+3}{2}\right), \pi\left(\frac{n+5}{2}\right), \ldots, \pi(n)\right\} = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}\right\} \Big\backslash \{k\},$$

če je $k \geq \frac{n+1}{2}$ pa

$$\left\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n\right\} \Big\backslash \{k\}$$

in

$$\left\{\pi\left(\frac{n+3}{2}\right), \pi\left(\frac{n+5}{2}\right), \ldots, \pi(n)\right\} = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}.$$

Ker imamo pri vsakem $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ torej $\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ možnosti za razporeditev manjših in $\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ možnosti za razporeditev večjih elementov, je iskanih permutacij skupaj

$$n\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2.$$