

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2019/20

1. skupina: Poslovna matematika

Petek, 6. marec 2020

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V tovarni piškotov Piškotek je 100 delavcev v 9 mesecih speklo 3320 t piškotov, če so delali po 8 ur na dan?

- a) Koliko ur na dan bi morale delati 120 delavcev, da bi v 6 mesecih spekli enako količino piškotov, njihova storilnost pa bi bila večja za 8 %?

3 točke

- b) Za koliko odstotkov bi se v tem primeru podaljšal delovnik (zanemarimo pravni vidik urejanja delovnih razmerij)?

1 točka

- c) Povpraševanje po piškotih se je v naslednjih treh mesecih precej zmanjšalo. Koliko delavcev bodo morali odpustiti, da bi v treh mesecih napekli 870 t piškotov in bi delali po 7 ur na dan? Upoštevajte izhodiščne podatke in rezultat zaokrožite na cele delavce.

3 točke

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

a) $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;

(Podatki: Kraj A ima 15.500 prebivalcev, kraj B 20.300 prebivalcev, kraj C 6.000 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)

b) preostanek pa tako, da dobi kraj A šestkrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{4}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.

Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

7 točk

3. naloga

- a) V tovarni smuči so proizvedli 55.200 parov smuči, in sicer smuči A za alpsko smučanje, tekaške smuči B in smuči C za turno smuko. Tekoških so naredili za 30 % manj kot alpskih, proizvodnja smuči za turno smuko pa je predstavljala le 20 % proizvodnje tekaških smuči. Koliko posameznih vrst smuči so naredili?

2 točki

- b) Miha si je želel kupiti smuči za alpsko smučanje, ki so stale 880,00 EUR. Počakal je do razprodaje, kjer so jih najprej znižali za 25 %, nato pa še za dodatnih 12 %. Koliko je Miha plačal za smuči in koliko odstoten je skupni popust? Izračunajte tudi ceno smuči po prvi pocenitvi.

3 točke

- c) Miha je navdušen smučar in si je kupil sezonsko smučarsko vozovnico za 489,00 EUR. Ugotovil je, da se je cena smučarske vozovnice v zadnjih dveh letih povečala vsako leto za 3 % v primerjavi s predhodnim letom. Izračunajte ceni sezonske smučarske vozovnice, ki sta veljali v zadnjih dveh letih.

2 točki

4. naloga

Družina Kos bo prenavljala stanovanje. Po predračunu znašajo stroški adaptacije 30.500,00 EUR.

- a) Pred pričetkom del vežejo depozit 20.000,00 EUR po 2,5-% letni obrestni meri za 3 leta in navadnem obrestovanju, dve leti pred začetkom del pa še depozit 6.000,00 EUR po nekoliko nižji letni obrestni meri, in sicer 1,8-%. Kolikšna bo skupna vrednost obeh depozitov po izteku obeh vezav in koliko denarja bo zmanjkalo do predvidene višine stroškov po predračunu?

4 točke

- b) Kljub vsem varčevalnim naporom ugotovijo, da je potrebno najeti posojilo 4.000,00 EUR, in sicer za 18 mesecev. Enkratno vračilo posojila bi po izteku posojilne pogodbe znašalo 4.352,00 EUR. Izračunaj letno in mesečno obrestno mero ob predpostavki navadnega obrestovanja.

3 točke



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2019/2020

2. skupina: Statistika

Petek, 6. marec 2020

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Dijake, vpisane v srednjo šolo Bistra glava 1. septembra 2019, smo razvrstili po spolu in programu, ki ga obiskujejo. Rezultate smo prikazali v tabeli spodaj.

Tabela 1: **Dijaki srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	230	61	36	327
Dekleta	218	85	185	488
Skupaj	448	146	221	815

- a) Za dijake srednje šole Bistra glava izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno.)

2 točkiTabela 2: **Struktura dijakov srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje				
Dekleta		*		
Skupaj				

- b) Razložite podatek v tabeli 2, ki je označen z zvezdico.

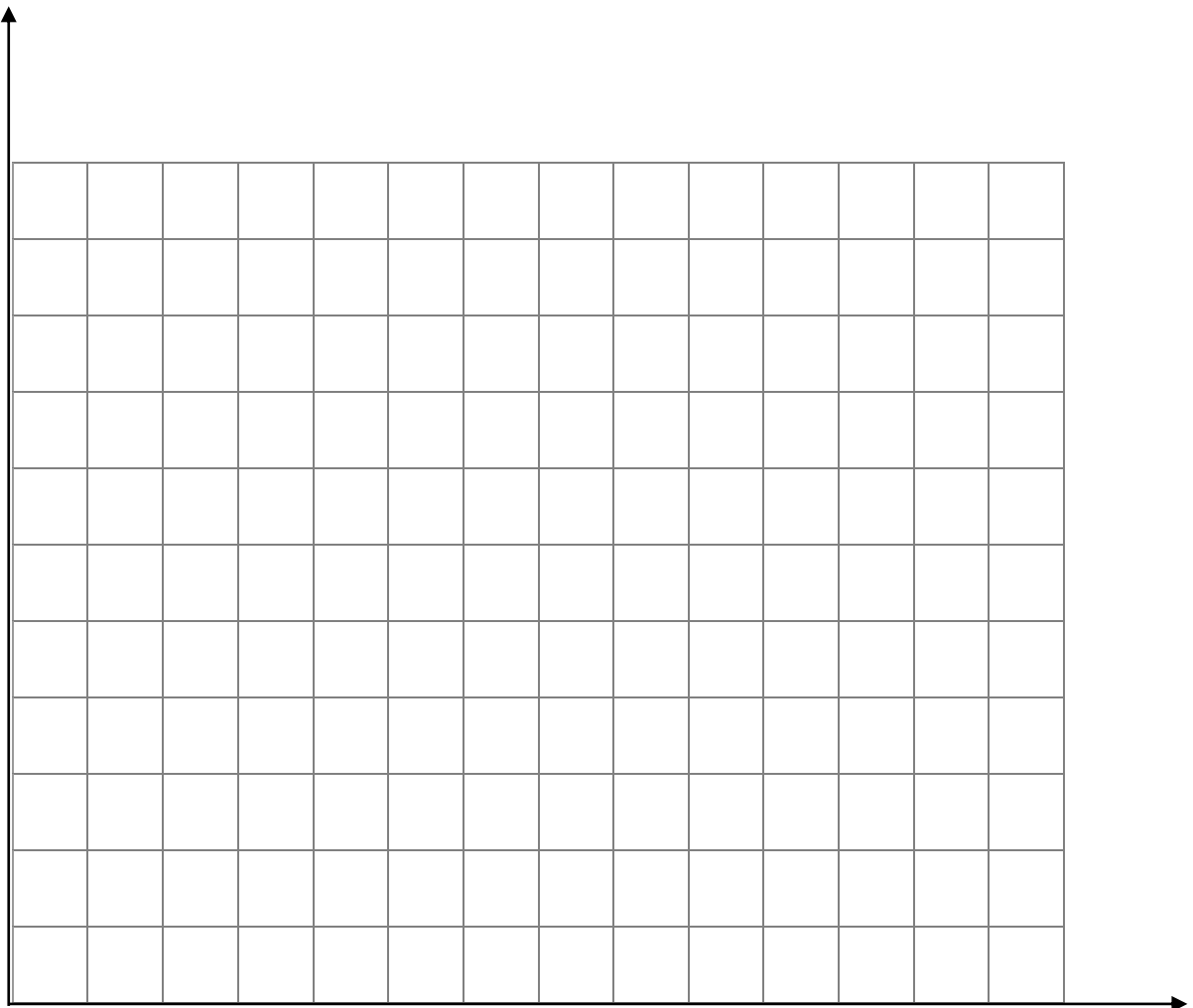
1 točka

- c) Navedite spremenljivke in vrste spremenljivk, po katerih smo opazovali populacijo dijakov srednje šole Bistra glava.

1 točka

- d) Izračunano strukturo pod točko **a** grafično prikažite s strukturnimi stolpci.

3 točke



2. NALOGA

Tabela 3: Število dijakov, strokovnih delavcev in srednjih šol v Sloveniji po šolskih letih

Šolsko leto	2016/2017	2017/2018	2018/2019
Število srednjih šol	156	145	143
Število strokovnih delavcev	7.470	7.454	7.250
Število dijakov	74.021	73.776	73.110
a)			
b)			

Vir: SURS, 2019

- a) Izračunajte število strokovnih delavcev na šolo za posamezno šolsko leto.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo pod točko **a**.)

2 točki

- b) Izračunajte število dijakov na srednjo šolo za posamezno šolsko leto.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo pod točko **b**.)

2 točki

- c) Izračunajte povprečno število strokovnih delavcev na 100 dijakov za celotno obdobje (vsa tri šolska leta).

2 točki

- d) Srednjo šolo Bistroum obiskuje 672 dijakov. Prav tako vemo, da je na šoli 12 dijakov na učitelja. Koliko učiteljev je zaposlenih na srednji šoli Bistroum?

1 točka

3. NALOGATabela 4: **Bruto domači proizvod na prebivalca v Sloveniji v letih od 2008 do 2018**

Leto	BDP na prebivalca v EUR	a)	c)	
2008	18.757			
2009	17.758			
2010	17.749			
2011	18.052			
2012	17.626			
2013	17.700			
2014	18.253			
2015	18.830			
2016	19.551			
2017	20.809			
2018	22.083			

Vir: SURS, 2019

- a) Z ustreznimi indeksi izračunajte spremembe v bruto domačem proizvodu na prebivalca iz leta v leto za celotno obdobje. (Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko a.)

2 točki

- b) V katerih letih je bila stopnja rasti negativna?

1 točka

- c) Izračunajte spremembe bruto domačega proizvoda na prebivalca glede na leto 2009.
(Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko c.)

2 točki

- d) Ocenite vrednost bruto domačega proizvoda na prebivalca v letu 2021, če se je ta v letu 2019 povečal za 2,5 %, v letu 2020 in 2021 pa je predvidena rast bruto domačega proizvoda vsako leto za 3 %.

2 točki

4. NALOGATabela 5: **Frekvenčna porazdelitev števila zamud dijakov v mesecu oktobru šolskega leta 2019/2020**

Št. zamud	Št. dijakov			
0–2	3			
3–5	5			
6–8	4			
9–11	6			
12–14	2			
Skupaj	20			

Vir: Izmišljeni podatki

a) Določite spodnjo mejo in širino 3. razreda.

1 točkab) Izračunajte deleže dijakov po razredih. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo.*)**2 točki**

c) Kaj nam pove izračunan delež v 2. razredu?

1 točka

d) Koliko odstotkov dijakov je k pouku zamudilo 9- in večkrat?

1 točka

e) Izračunajte povprečno število zamud na dijaka.

2 točki

3. SKUPINA

Ime in priimek: _____

N1	N2	N3	N4

Razred: _____ Mentor/-ica: _____

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.

Dovoljena je uporaba žepnega računalja. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. V preglednici so zbrani podatki o številu kandidatov pri splošni maturi v spomladanskem in jesenskem izpitnem roku v letu 2019:

Način opravljanja	Prijava		Odjave		Pristopili		Opravili	
	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.
Opravljali prvič ¹	6101	452	492	124	5600	309	5337	135
21-letniki ² prvič in maturitetni tečaj prvič	242	54	51	17	145	30	66	13
Popravljali eno ali dve negativni oceni	377	470	7	13	333	422	173	242
Ponovno v celoti	155	186	6	18	105	114	13	13
Opravljali v dveh delih	143	108	19	3	0	52	0	30
Izboljševali oceno	180	339	17	204	161	133	160	133
Dodatni izpit k poklicni maturi	1863	347	186	47		218		91
Dodatni izpit k splošni maturi	19	4	0	1	17	3	17	2

Pomen okrajšav: pom. – spomladanski rok, jes. – jesenski rok

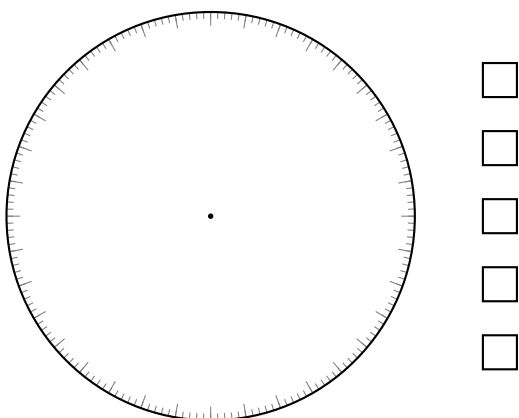
¹ Brez 21-letnikov in kandidatov z maturitetnim tečajem.

² 21-letniki so kandidati, ki so dopolnili vsaj 21 let.

Vir: Državni izpitni center, Splošna matura – Letno poročilo 2019.

- a) Določi število kandidatov, ki so se prijavili k opravljanju splošne mature ponovno v celoti v jesenskem izpitnem roku, vendar se izpitov niso udeležili niti se niso od mature odjavili. [2 točki]

- b) Določi število kandidatov mlajših od 21 let, ki so bili pri svojem prvem opravljanju celotne mature v letu 2019 neuspešni. [2 točki]
- c) Določi število kandidatov, ki so opravili dodatni izpit k poklicni maturi v spomladanskem izpitnem roku, če veš, da k izpitu ni pristopilo 117 prijavljenih kandidatov, od tistih, ki so k izpitu pristopili, pa je bilo 23,974 % neuspešnih. [3 točke]
- d) Določi delež uspešnih kandidatov pri dodatnem izpitu k splošni ali poklicni maturi glede na vse kandidate, ki so k takšnemu izpitu pristopili v jesenskem izpitnem roku. Rezultat v odstotkih zaokroži na tri decimalna mesta. [3 točke]
- e) S krožnim diagramom prikaži strukturo kandidatov, ki so v jesenskem izpitnem roku opravili splošno maturo (brez izboljševanja ocene in dodatnih izpitov). Kote v krožnem diagramu določi na stopinjo natančno. [8 točk]
Opomba: Daljše črtice označujejo kotne korake po 10° , krajše črtice pa 2° . Za ločevanje kategorij lahko uporabiš različne teksture. Kvadratki so namenjeni legendi.



- f) Med 6022 kandidati, ki so opravili maturo v letu 2019, je bilo 4,351 % zlatih maturantov; ti so dosegli izjemen splošni uspeh, vsaj 30 točk. Koliko je bilo takih, ki so dosegli vseh 34 točk, če predstavljajo 3,817 % zlatih maturantov? [2 točki]

2. Kaja najame stanovanjski kredit v višini 30 000 €. Odplačala ga bo v enakih mesečnih obrokih v naslednjih 10 letih, prvi obrok en mesec po najemu kredita. Banka za kredit uporablja konformno mesečno obrestovanje in 4,8 % letno obrestno mero.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Določi višino obroka.

[8 točk]

b) Določi višino preostalega dolga dve leti po najemu kredita, to je takoj po plačilu 24. obroka.

[5 točk]

- c) Dve leti po najemu kredita Kaja izgubi službo, zato obrokov ne more več plačevati. Z banko se dogovori za moratorij na odplačilo kredita. Eno leto ji obrokov ne bo treba plačevati, nadaljnji obroki pa bodo zato višji. Prvi višji obrok bo plačala tri leta in en mesec po najemu kredita, zadnji pa kot v prvotni pogodbi, to je 10 let po najemu. Določi višino obroka po moratoriju. [7 točk]

3. Znani sta naslednji netvegani efektivni obrestni meri, določeni na osnovi cen državnih obveznic. Čas t je merjen v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	4,00 %

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Država je pravkar izdala klasično dveletno kuponsko obveznico z nominalno vrednostjo 100 € in letnimi kuponi po kuponski obrestni meri 3,70 %. Prvi kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno obveznice ob izdaji. [5 točk]

b) Država je takoj za tem izdala še dveletno *kuponsko obveznico z zaostalimi kuponi* in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica eno leto po izdaji ne izplača kupona, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice z zaostalimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a). [4 točke]

c) Hkrati z obveznico iz naloge b) je država izdala še dveletno *kuponsko obveznico s pospešenimi kuponi* in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica ob dospetju kupona ne izplača, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice s pospešenimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz a). [4 točke]

d) Zasebno finančno podjetje v isti državi pri zadolževanju plačuje pribitek x na netvegano obrestno mero; to pomeni, da za obrestno mero podjetja za vse t velja $\bar{R}(0, t) = R(0, t) + x$. Odloči se, da bo še samo izdalo dveletne obveznice z zaostalimi in s pospešenimi kuponi z nominalno vrednostjo 100 €. Z analizo kapitalskega trga ugotovi, da bosta ob izdaji ceni obveznic enaki, če zaostali kupon znaša 12 €, pospešeni kupon pa 11 €. Določi višino pribitka x na netvegano obrestno mero. [7 točk]
Prostor za reševanje je na naslednji strani.

4. Podjetje, ki sprejema plačila tudi v kriptovalutah, se želi zavarovati pred močnimi nihanji vrednosti, ki so značilna za trg kriptovalut. Zato želi na borzi skleniti nekaj trimesečnih terminskih poslov za prodajo bitcoinov. Danes (6. marca 2020) je na voljo terminski posel za prodajo bitcoinov z ročnostjo 6. junija 2020 in izročitveno ceno 7245 \$ za en bitcoin.

Netvegana efektivna obrestna mera je 1 % za vsa dospetja.

Rezultate v ameriških dolarjih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Predpostavi, da na trgu ni arbitraže. Določi trenutno ceno enega bitcoina v dolarjih?

[5 točk]

b) Standardni terminski posel na borzi se nanaša na nakup ali prodajo 5 bitcoinov. Podjetje ve, da bo čez tri mesece prejelo 100 bitcoinov, ki jih bo moralo nato takoj prodati. Koliko standardnih terminskih poslov mora skleniti, da se popolnoma zavaruje pred tveganjem zaradi negotove prihodnje vrednosti bitcoina?

[2 točki]

c) Podjetje bo 6. junija 2020 na trgu kriptovalut prodalo 100 prejetih bitcoinov in z denarno poravnavo zaprlo terminske posle iz naloge b). Koliko denarja bo prejelo s prodajo bitcoinov in koliko denarja bo prejelo/plačalo ob zaprtju terminskih poslov v naslednjih dveh primerih:

i. cena bitcoina bo 8123 \$;

ii. cena bitcoina bo 6238 \$?

[6 točk]

d) Privzemi, da danes cena bitcoina ni enaka vrednosti iz naloge a), pač pa znaša 7171 \$. Opiši arbitražno strategijo in določi višino arbitražnega zaslužka. [7 točk]

Stran s formulami

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico, ki izplačuje dividende

$$F_t = (S_t - I(t, T))(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- valutni terminski posel

$$F_t = S_t \frac{(1 + R_d)^{T-t}}{(1 + R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)})$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$R(t, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{1 + R(0, T) \cdot (T - t)}{1 + R(0, S) \cdot (S - t)} - 1 \right), \quad K = R(0, S, T)$$

$$V_t = \frac{N \cdot (R(t, S, T) - K) \cdot (T - S)}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}$$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času t , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- premija v času t , če delnica izplačuje dividende

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t - I(t, T)$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t - I(t, T) = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropske in ameriške opcije

$$c_t^E \leq c_t^A, \quad p_t^E \leq p_t^A$$



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2019/20

1. skupina: Poslovna matematika

Petek, 6. marec 2020

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V tovarni piškotov Piškotek je 100 delavcev v 9 mesecih speklo 3320 t piškotov, če so delali po 8 ur na dan?

- a) Koliko ur na dan bi morale delati 120 delavcev, da bi v 6 mesecih spekli enako količino piškotov, njihova storilnost pa bi bila večja za 8 %?

3 točke

100 delavcev	9 mesecev	3320 t	8 ur/dan	100 %
↓	↓	↑	↑	↓
120 delavcev	6 mesecev	3320 t	x ur	108 %

$$X = \frac{8 * 100 * 9 * 3320 * 100}{120 * 6 * 3320 * 108} = \underline{\underline{9,26 \text{ ure}}}$$

Odg.: 120 delavcev bi morale delati 9,26 ure/dan, da bi spekli enako količino v pol leta.

1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)

1 točka – določitev vrste sorazmerij

1 točka – izračun neznanke in zapis odgovora

- b) Za koliko odstotkov bi se v tem primeru podaljšal delovnik (zanemarimo pravni vidik urejanja delovnih razmerij)?

1 točka

8 ur/dan	100 %
↑		↑
1,26 ure/dan	x %

$$X = \frac{1,26 * 100}{8} = \underline{\underline{15,75 \%}}$$

Odg.: Delovnik bi se moral podaljšati za 15,75 %.

1 točka – izračun neznanke in zapis odgovora

- c) Povpraševanje po piškotih se je v naslednjih treh mesecih precej zmanjšalo. Koliko delavcev bodo morali odpustiti, da bi v treh mesecih napekli 870 t piškotov in bi delali po 7 ur na dan? Upoštevajte izhodiščne podatke in rezultat zaokrožite na cele delavce.

3 točke

100 delavcev	9 mesecih	3320 t	8 ur/dan
↑	↓	↑	↓
x delavcev	3 mesecih	870 t	7 ur/dan

$$x = \frac{100 * 9 * 870 * 8}{3 * 3320 * 7} = \underline{\underline{89,85 \text{ delavca} \Rightarrow \underline{\underline{90 \text{ delavcev}}}}$$

Odg.: Zaradi manjšega povpraševanja bodo morali odpustiti 10 delavcev.

1 točka – zapis podatkov in določitev vrste sorazmerij

1 točka – zapis ulomka in izračun vrednosti neznanke

1 točka – zapis odgovora

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

- a) $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;
 (Podatki: Kraj A ima 15.500 prebivalcev, kraj B 20.300 prebivalcev, kraj C 6.000 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)
- b) preostanek pa tako, da dobi kraj A šestkrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{4}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.
 Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

Izračun $\frac{1}{5}$ in preostanka

1 T

$$m_1 = \frac{1}{5} \text{ od } 150.000,00 = \underline{30.000,00 \text{ EUR}}$$

$$m_2 (\text{preostanek}) = 150.000,00 - 30.000,00 = \underline{120.000,00 \text{ EUR}}$$

Rešitev k tč. a) $m_1 = 30.000,00 \text{ EUR}$

$$A : B : C : D = 15.500 x + 20.300 x + 6.000 x + 18.200 x$$

$$60.000 x = 30.000,00$$

$$\underline{x = 0,5}$$

1 T

$$A = 15.500 * 0,5 = \underline{7.750,00 \text{ EUR}}$$

$$B = 20.300 * 0,5 = \underline{10.150,00 \text{ EUR}}$$

$$C = 6.000 * 0,5 = \underline{3.000,00 \text{ EUR}}$$

$$D = 18.200 * 0,5 = \underline{9.100,00 \text{ EUR}}$$

1 T

Rešitev k tč. b) $m_2 = 120.000,00 \text{ EUR}$

		Odgovor
A	6 x	13.090,91
B	$6 x + (\frac{1}{4} * 6 x) = 6 x + 1,5 x = 7,5 x$	16.363,64
C	x	2.181,82
D	$3 * (6 x + 7,5 x) = 3 * 13,5 x = 40,5 x$	88.363,64

2 T

$$A + B + C + D = 120.000,00$$

$$55 x = 120.000,00$$

$$\underline{x = 2.181,818181}$$

1 T

Odgovor: Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?			
A	$7.750,00 + 13.090,91 =$	20.840,91	1 T
B	$10.150,00 + 16.363,64 =$	26.513,64	
C	$3.000,00 + 2.181,82 =$	5.181,82	
D	$9.100,00 + 88.363,64 =$	97.463,64	

3. naloga

- a) V tovarni smuči so proizvedli 55.200 parov smuči, in sicer smuči A za alpsko smučanje, tekaške smuči B in smuči C za turno smuko. Tekaških so naredili za 30 % manj kot alpskih, proizvodnja smuči za turno smuko pa je predstavljala le 20 % proizvodnje tekaških smuči. Koliko posameznih vrst smuči so naredili?

2 točki

Smuči		Odgovor
A	x	30.000 smuči za alpsko smučanje
B	0,7 x	21.000 tekaških smuči
C	20 % od B = 0,2 * 0,7 x = 0,14 x	4.200 smuči za turno smuko

$$A + B + C = 55.200$$

$$1,84 x = 55.200$$

$$\underline{\underline{x = 30.000,00}}$$

1 točka – pravilna nastavitve deležev

1 točka – izračun q smuči za posamezno vrsto

- b) Miha si je želel kupiti smuči za alpsko smučanje, ki so stale 880,00 EUR. Počakal je do razprodaje, kjer so jih najprej znižali za 25 %, nato pa še za dodatnih 12 %. Koliko je Miha plačal za smuči in koliko odstoten je skupni popust? Izračunajte tudi ceno smuči po prvi pocenitvi.

3 točke

Končna cena smuči: $x = 880,00 * 0,75 * 0,88 = \underline{\underline{580,80}}$

Cena smuči po prvi pocenitvi: $880 * 0,75 = \underline{\underline{660,00 \text{ EUR}}}$

$$\Sigma \text{ popust} = \frac{(880,00 - 580,80) * 100}{880,00} = \underline{\underline{34 \%}}$$

1 točka – izračun končne cene smuči

1 točka – izračun vmesne cene smuči (prva pocenitev)

1 točka – izračun skupne pocenitve

- c) Miha je navdušen smučar in si je kupil sezonsko smučarsko vozovnico za 489,00 EUR. Ugotovil je, da se je cena smučarske vozovnice v zadnjih dveh letih povečala vsako leto za 3 % v primerjavi s predhodnim letom. Izračunajte ceni sezonske smučarske vozovnice, ki sta veljali v zadnjih dveh letih.

2 točki

Cena vozovnice pred 1 letom

489,00 EUR 103 %



X EUR 100 %

$$x = \frac{489 * 100}{103} = \underline{\underline{474,76 \text{ EUR}}}$$

Cena vozovnice pred 2 letoma

474,76 EUR 103 %



X EUR 100 %

$$x = \frac{474,76 * 100}{103} = \underline{\underline{460,93 \text{ EUR}}}$$

1 točka – izračun cene sezonske vozovnice pred enim letom

1 točka – izračun cene sezonske vozovnice pred dvema letoma

4. naloga

Družina Kos bo prenavljala stanovanje. Po predračunu znašajo stroški adaptacije 30.500,00 EUR.

- a) Pred pričetkom del vežejo depozit 20.000,00 EUR po 2,5-% letni obrestni meri za 3 leta in navadnem obrestovanju, dve leti pred začetkom del pa še depozit 6.000,00 EUR po nekoliko nižji letni obrestni meri, in sicer 1,8-%. Kolikšna bo skupna vrednost obeh depozitov po izteku obeh vezav in koliko denarja bo zmanjkalo do predvidene višine stroškov po predračunu?

4 točke

$$G_1 = 20.000,00 \text{ EUR}$$

$$p_1 = 2,5 \%$$

$$l_1 = 3 \text{ leta}$$

$$G_1^+ = x \text{ EUR}$$

$$G_2 = 6.000,00 \text{ EUR}$$

$$p_2 = 1,8 \%$$

$$l_2 = 2 \text{ leti}$$

$$G_2^+ = x \text{ EUR}$$

$$o_1 = \frac{G \times p \times l}{100} = \frac{20.000,00 \times 2,5 \times 3}{100} = \underline{\underline{1.500,00 \text{ EUR}}}$$

$$o_2 = \frac{6.000,00 \times 1,8 \times 2}{100} = \underline{\underline{216,00 \text{ EUR}}}$$

$$G_1^+ = G_1 + o_1 = 20.000,00 + 1.500,00 = \underline{\underline{21.500,00 \text{ EUR}}} \quad G_2^+ = \underline{\underline{6.216,00 \text{ EUR}}}$$

$$\Sigma G^+ = (G_1^+ + G_2^+) = \underline{\underline{27.716,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Manjkajoči znesek: } 30.500,00 - 27.716,00 = \underline{\underline{2.784,00 \text{ EUR}}}$$

1 točka – izračun G_1^+

1 točka – izračun G_2^+

1 točka – izračun ΣG^+

1 točka – izračun manjkajočega zneska

- b) Kljub vsem varčevalnim naporom ugotovijo, da je potrebno najeti posojilo 4.000,00 EUR, in sicer za 18 mesecev. Enkratno vračilo posojila bi po izteku posojilne pogodbe znašalo 4.352,00 EUR. Izračunaj letno in mesečno obrestno mero ob predpostavki navadnega obrestovanja.

3 točke

$$G^+ = 4.352,00 \text{ EUR}$$

$$G = 4.000,00 \text{ EUR}$$

$$o = 352,00 \text{ EUR}$$

$$m = 18 \text{ mesecev}$$

$$p = x \%$$
 (letna obrestna mera)

$$p' = x \%$$
 (mesečna obrestna mera)

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$p = \frac{o \times 1200}{G \times m} = \frac{352,00 \times 1200}{4000,00 \times 18} = \underline{\underline{5,87 \%}}$$

$$p' = \frac{p}{12} = \frac{5,87}{12} = \underline{\underline{0,49 \%}}$$

1 točka – zapis obrazca in vstavitve podatkov

1 točka – izračun letne obrestne mere

1 točka – izračun mesečne obrestne mere



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2019/2020

2. skupina: Statistika – REŠITVE

Petek, 6. marec 2020

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Dijake, vpisane v srednjo šolo Bistra glava 1. septembra 2019, smo razvrstili po spolu in programu, ki ga obiskujejo. Rezultate smo prikazali v tabeli spodaj.

Tabela 1: **Dijaki srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	230	61	36	327
Dekleta	218	85	185	488
Skupaj	448	146	221	815

- a) Za dijake srednje šole Bistra glava izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki
1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih

Tabela 2: **Struktura dijakov srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	70,3	18,7	11,0	100,0
Dekleta	44,7	17,4*	37,9	100,0
Skupaj	55,0	17,9	27,1	100,0

- b) Razložite podatek v tabeli 2, ki je označen z zvezdico.

1 točka

Program ekonomski tehnik je obiskovalo 17,4 % deklet.

1 točka – pravilno razložen odstotek

- c) Navedite spremenljivke in vrste spremenljivk, po katerih smo opazovali populacijo dijakov srednje šole Bistra glava.

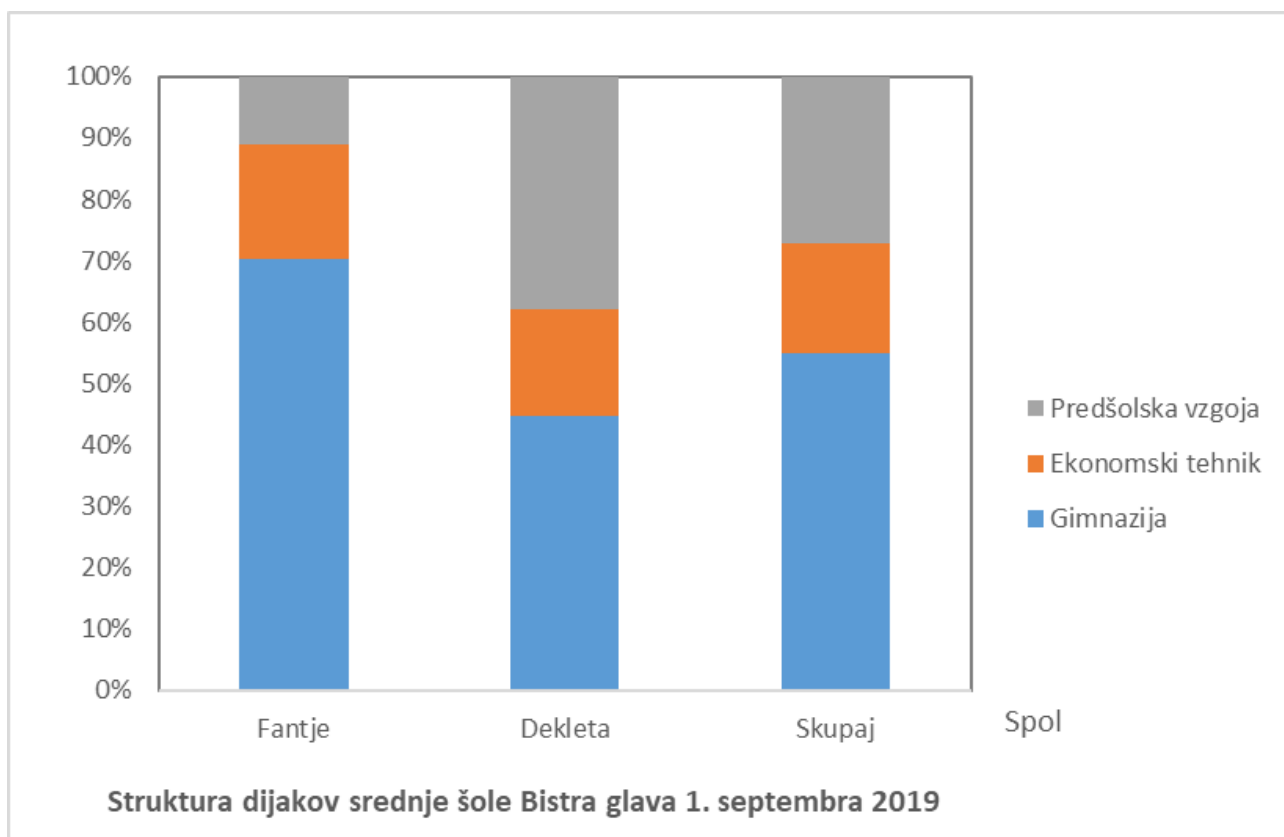
1 točka

Spremenljivka	Vrsta spremenljivke
Spol	opisna spremenljivka
Izobraževalni program	opisna spremenljivka

1 točka – navedeni statistični spremenljivki in vrsti spremenljivk

- d) Izračunano strukturo pod točko a grafično prikažite s strukturnimi stolpci.

3 točke



2 točki – vsi pravilno narisani strukturni stolpci

1 točka – pravilno opremljen grafikon (oznake osi, naslov grafikona, legenda)

2. NALOGATabela 3: **Število dijakov, strokovnih delavcev in srednjih šol v Sloveniji po šolskih letih**

Šolsko leto	2016/2017	2017/2018	2018/2019
Število srednjih šol	156	145	143
Število strokovnih delavcev	7.470	7.454	7.250
Število dijakov	74.021	73.776	73.110
a)	48	51	51
b)	474	509	511

Vir: SURS, 2019

- a) Izračunajte število strokovnih delavcev na šolo za posamezno šolsko leto.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo pod točko **a**.)

2 točki

$$\text{Število strokovnih delavcev na šolo} = \frac{\text{število strokovnih delavcev}}{\text{število srednjih šol}}$$

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti
1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

- b) Izračunajte število dijakov na srednjo šolo za posamezno šolsko leto.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo pod točko **b**.)

2 točki

$$\text{Število dijakov na srednjo šolo} = \frac{\text{število dijakov}}{\text{število srednjih šol}}$$

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti
1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

- c) Izračunajte povprečno število strokovnih delavcev na 100 dijakov za celotno obdobje (vsa tri šolska leta).

2 točki

$$K = \frac{\text{povprečno število strokovnih delavcev}}{\text{povprečno število dijakov}} \cdot 100$$

$$\frac{7.391,33}{73.635,67} \cdot 100 = 10 \text{ strokovnih delavcev na 100 dijakov}$$

$$\begin{aligned} \text{Povprečno število strokovnih delavcev} &= \frac{7470 + 7454 + 7250}{3} = \frac{22.174}{3} \\ &= 7.391,33 \text{ strokovnega delavca} \end{aligned}$$

$$\text{Povprečno število dijakov} = \frac{774021 + 73776 + 73110}{3} = \frac{220.907}{3} = 73.635,67 \text{ dijaka}$$

1 točka – pravilno izračunano povprečno število strokovnih delavcev in povprečno število dijakov

1 točka – pravilno izračunano povprečno število strokovnih delavcev na 100 dijakov

- d) Srednjo šolo Bistroum obiskuje 672 dijakov. Prav tako vemo, da je na šoli 12 dijakov na učitelja. Koliko učiteljev je zaposlenih na srednji šoli Bistroum?

1 točka

$$12 = \frac{Y}{x} = \frac{672}{x} = 56 \text{ učiteljev}$$

1 točka – pravilno izračunano število učiteljev

3. NALOGATabela 4: **Bruto domači proizvod na prebivalca v Sloveniji v letih od 2008 do 2018**

Leto	BDP na prebivalca v EUR	a) V_j	c) $I_{j/2009}$	S_j v %
2008	18.757	-	105,63	-
2009	17.758	94,67	100,00	-5,33
2010	17.749	99,95	99,95	-0,05
2011	18.052	101,71	101,66	1,71
2012	17.626	97,64	99,26	-2,36
2013	17.700	100,42	99,67	0,42
2014	18.253	103,12	102,79	3,12
2015	18.830	103,16	106,04	3,16
2016	19.551	103,83	110,10	3,83
2017	20.809	106,43	117,18	6,43
2018	22.083	106,12	124,36	6,12

Vir: SURS, 2019

- a) Z ustreznimi indeksi izračunajte spremembe v bruto domačem proizvodu na prebivalca iz leta v leto za celotno obdobje. (Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko a.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi
1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih

- b) V katerih letih je bila stopnja rasti negativna?

1 točka

Stopnja rasti je bila negativna v letih 2009, 2010 in 2012.

1 točka – pravilno ugotovljena leta z negativno stopnjo rasti

- c) Izračunajte spremembe bruto domačega proizvoda na prebivalca glede na leto 2009. (Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko c.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi
1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih

- d) Ocenite vrednost bruto domačega proizvoda na prebivalca v letu 2021, če se je ta v letu 2019 povečal za 2,5 %, v letu 2020 in 2021 pa je predvidena rast bruto domačega proizvoda vsako leto za 3 %.

2 točki

$$BDP_{2021} = 22.083 \cdot 1,025 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 24.013,55 \text{ EUR na preb.}$$

1 točka – pravilno ocenjena vrednost BDP za leto 2021

4. NALOGATabela 5: **Frekvenčna porazdelitev števila zamud dijakov v mesecu oktobru šolskega leta 2019/2020**

Št. zamud	Št. dijakov	f_j	y_j	$y_j * f_j$
0–2	3	0,150	1	3
3–5	5	0,250	4	20
6–8	4	0,200	7	28
9–11	6	0,300	10	60
12–14	2	0,100	13	26
Skupaj	20	1,000		137

Vir: Izmišljeni podatki

- a) Določite spodnjo mejo in širino 3. razreda.

1 točka

$$y_{3,min} = 6 - 0,5 = 5,5$$

$$d_3 = 8,5 - 5,5 = 3$$

1 točka – pravilno določena spodnja meja in širina 3. razreda

- b) Izračunajte deleže dijakov po razredih. (Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani deleži

1 točka – 1 napaka pri izračunanih deležih

c) Kaj nam pove izračunan delež v 2. razredu?

1 točka

25 % dijakov je zamudilo k pouku od 3- do 5-krat.

1 točka – pravilno razložen delež

d) Koliko odstotkov dijakov je k pouku zamudilo 9- in večkrat?

1 točka

K pouku je 9- in večkrat zamudilo 40 % dijakov.

1 točka – pravilno ugotovljen odstotek

e) Izračunajte povprečno število zamud na dijaka.

2 točki

$$M = \frac{137}{20} = 6,85 \text{ zamude na dijaka}$$

1 točka – pravilno izračunani produkti sredin in frekvenc

1 točka – pravilno izračunana aritmetična sredina

3. SKUPINA

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih damo tudi ob prenosu napake.

Točke brez zvezdice damo le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V preglednici so zbrani podatki o številu kandidatov pri splošni maturi v spomladanskem in jesenskem izpitnem roku v letu 2019:

Način opravljanja	Prijava		Odjave		Pristopili		Opravili	
	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.
Opravljali prvič ¹	6101	452	492	124	5600	309	5337	135
21-letniki ² prvič in maturitetni tečaj prvič	242	54	51	17	145	30	66	13
Popravljali eno ali dve negativni oceni	377	470	7	13	333	422	173	242
Ponovno v celoti	155	186	6	18	105	114	13	13
Opravljali v dveh delih	143	108	19	3	0	52	0	30
Izboljševali oceno	180	339	17	204	161	133	160	133
Dodatni izpit k poklicni maturi	1863	347	186	47		218		91
Dodatni izpit k splošni maturi	19	4	0	1	17	3	17	2

Pomen okrajšav: pom. – spomladanski rok, jes. – jesenski rok

¹ Brez 21-letnikov in kandidatov z maturitetnim tečajem.

² 21-letniki so kandidati, ki so dopolnili vsaj 21 let.

Vir: Državni izpitni center, Splošna matura – Letno poročilo 2019.

- a) Določi število kandidatov, ki so se prijavili k opravljanju splošne mature ponovno v celoti v jesenskem izpitnem roku, vendar se izpitov niso udeležili niti se niso od mature odjavili. [2 točki]

Rešitev

$186 - 18 - 114 = 54$ kandidatov.

Točkovanje

Število kandidatov 2 točki.

- b) Določi število kandidatov mlajših od 21 let, ki so bili pri svojem prvem opravljanju celotne mature v letu 2019 neuspešni. [2 točki]

Rešitev

$$(5600 + 309) - (5337 + 135) = 437 \text{ kandidatov.}$$

Točkovanje

Število kandidatov 2 točki.

- c) Določi število kandidatov, ki so opravili dodatni izpit k poklicni maturi v spomladanskem izpitnem roku, če veš, da k izpitu ni pristopilo 117 prijavljenih kandidatov, od tistih, ki so k izpitu pristopili, pa je bilo 23,974 % neuspešnih. [3 točke]

Rešitev

Število kandidatov, ki so pristopili:

$$1863 - 186 - 117 = 1560 \text{ kandidatov.}$$

Delež uspešnih kandidatov:

$$100 \% - 23,974 \% = 76,026 \%$$

Število uspešnih kandidatov:

$$1560 \cdot 0,76026 = 1186 \text{ kandidatov.}$$

Točkovanje

Število kandidatov, ki so pristopili, 1 točka.

Delež uspešnih kandidatov 1 točka.

Število uspešnih kandidatov 1 točka.

- d) Določi delež uspešnih kandidatov pri dodatnem izpitu k splošni ali poklicni maturi glede na vse kandidate, ki so k takšnemu izpitu pristopili v jesenskem izpitnem roku. Rezultat v odstotkih zaokroži na tri decimalna mesta. [3 točke]

Rešitev

Pristopilo je $218 + 3 = 221$ kandidatov, uspešnih je bilo $91 + 2 = 93$ kandidatov.

Delež uspešnih je bil $\frac{93}{221} = 0,42081 = 42,081 \%$.

Točkovanje

Število kandidatov, ki so pristopili, 1 točka.

Število uspešnih kandidatov 1 točka.

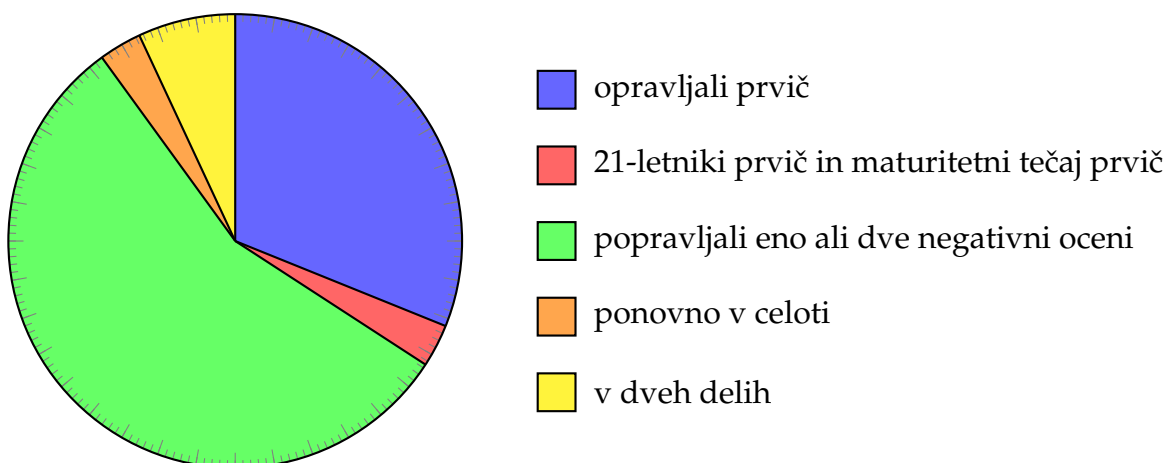
Delež uspešnih kandidatov 1 točka.

- e) S krožnim diagramom prikaži strukturo kandidatov, ki so v jesenskem izpitnem roku opravili splošno maturo (brez izboljševanja ocene in dodatnih izpitov). Kote v krožnem diagramu določi na stopinjo natančno. [8 točk]

Rešitev

Maturo je opravilo $135 + 13 + 242 + 13 + 30 = 433$ kandidatov, med njimi:

- opravljali prvič: $360^\circ \cdot \frac{135}{433} = 112,24^\circ \approx 112^\circ$,
- 21-letniki prvič in maturitetni tečaj prvič: $360^\circ \cdot \frac{13}{433} = 10,81^\circ \approx 11^\circ$,
- popravljali eno ali dve negativni oceni: $360^\circ \cdot \frac{242}{6875} = 201,20^\circ \approx 201^\circ$,
- ponovno v celoti: $360^\circ \cdot \frac{13}{433} = 10,81^\circ \approx 11^\circ$,
- v dveh delih: $360^\circ \cdot \frac{30}{433} = 24,94^\circ \approx 25^\circ$.



Točkovanje

Število uspešnih kandidatov 1 točka.

Vsak pravilno izračunan kot v krožnem diagramu 1 točka (skupaj 5 točk).

Pravilno narisan in označen diagram 2 točki.

Kategorije so lahko drugače urejene.

- f) Med 6022 kandidati, ki so opravili maturo v letu 2019, je bilo 4,351 % zlatih maturantov; ti so dosegli izjemen splošni uspeh, vsaj 30 točk. Koliko je bilo takih, ki so dosegli vseh 34 točk, če predstavljajo 3,817 % zlatih maturantov? [2 točki]

Rešitev

Število maturantov, ki so dosegli 34 točk:

$$6022 \cdot 0,043507 \cdot 0,03817 = 10 \text{ kandidatov.}$$

Točkovanje

Kandidati z vsemi točkami 1*+1 točka.

Postopkovno točko damo za število zlatih maturantov.

2. Kaja najame stanovanjski kredit v višini 30 000 €. Odplačala ga bo v enakih mesečnih obrokih v naslednjih 10 letih, prvi obrok en mesec po najemu kredita. Banka za kredit uporablja konformno mesečno obrestovanje in 4,8 % letno obrestno mero.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi višino obroka.

[8 točk]

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 30\,000$ €, višino obroka označimo z a .

Obrestna mera je $p\% = 4,8\%$, mesečni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1,048}$.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na konec 10. leta.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = ar^{119} + ar^{118} + \dots + ar + a$$

$$Gr^{120} = a(r^{119} + r^{118} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{120} = a \cdot \frac{r^{120} - 1}{r - 1}$$

$$a = Gr^{120} \cdot \frac{r - 1}{r^{120} - 1}$$

$$a = 30\,000 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{-120} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048} - 1}{\sqrt[12]{1,048}^{-120} - 1} = 313,78 \text{ €}.$$

Mesečni obrok znaša 313,78 €.

Točkovanje

Shema denarnih tokov oziroma razumevanje naloge 2 točki.

Mesečni obrestni faktor 1 točka.

Enačba na osnovi načela ekvivalence glavnice 1*+1 točka.

Vsota geometrijske vrste 1* točka.

Rezultat 2 točki.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

- b) Določi višino preostalega dolga dve leti po najemu kredita, to je takoj po plačilu 24. obroka. [5 točk]

Rešitev

1. način:

Začetno glavnico in prvih 24 obrokov naobrestimo na dve leti po najemu kredita.

$$\begin{aligned}G_1 &= Gr^{24} - ar^{23} - ar^{22} - \dots - ar - a \\&= Gr^{24} - a(r^{23} + r^{22} + \dots + r + 1) \\&= Gr^{24} - a \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1} \\&= 30\,000 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{24} - 313,78 \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048}^{24} - 1}{\sqrt[12]{1,048} - 1} = 25\,069,45 \text{ €}.\end{aligned}$$

Preostali dolg znaša 25 069,45 €.

2. način:

Preostalih 96 obrokov razobrestimo na dve leti po najemu kredita.

$$\begin{aligned}G_1 &= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^{95}} + \frac{a}{r^{96}} \\&= \frac{a}{r^{96}}(r^{95} + r^{94} + \dots + r + 1) \\&= \frac{a}{r^{96}} \cdot \frac{r^{96} - 1}{r - 1} \\&= \frac{313,78}{\sqrt[12]{1,048}^{96}} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048}^{96} - 1}{\sqrt[12]{1,048} - 1} = 25\,069,45 \text{ €}.\end{aligned}$$

Točkovanje

Enačba na osnovi načela ekvivalence glavnice 1*+1 točka.

Vsota geometrijske vrste 1* točka.

Rezultat 2 točki.

Upoštevamo odstopanja, ki so posledica zaokrožene višine obroka a .

- c) Dve leti po najemu kredita Kaja izgubi službo, zato obrokov ne more več plačevati. Z banko se dogovori za moratorij na odplačilo kredita. Eno leto ji obrokov ne bo treba plačevati, nadaljnji obroki pa bodo zato višji. Prvi višji obrok bo plačala tri leta in en mesec po najemu kredita, zadnji pa kot v prvotni pogodbi, to je 10 let po najemu. Določi višino obroka po moratoriju. [7 točk]

Rešitev

Dve leti po najemu kredita Kajin dolg znaša $G_1 = 25\,069,45 \text{ €}$

Višino obroka po moratoriju označimo z b .

Novo denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$G_1 r^{96} = b r^{83} + b r^{82} + \dots + b r + b$$

$$G_1 r^{96} = b(r^{83} + r^{82} + \dots + r + 1)$$

$$G_1 r^{96} = b \cdot \frac{r^{84} - 1}{r - 1}$$

$$b = G_1 r^{96} \cdot \frac{r - 1}{r^{84} - 1}$$

$$b = 25\,069,45 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{96} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048} - 1}{\sqrt[12]{1,048}^{84} - 1} = 367,61 \text{ €}.$$

Mesečni obrok po moratoriju znaša 367,61 €.

Točkovanje

Shema denarnih tokov oziroma razumevanje naloge 2 točki.

Enačba na osnovi načela ekvivalence glavnice 1*+1 točka.

Vsota geometrijske vrste 1* točka.

Rezultat 2 točki.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

Upoštevamo odstopanja, ki so posledica zaokroževanj v prejšnjih nalogah.

3. Znani sta naslednji netvegani efektivni obrestni meri, določeni na osnovi cen državnih obveznic. Čas t je merjen v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	4,00 %

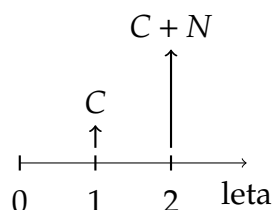
Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Država je pravkar izdala klasično dveletno kuponsko obveznico z nominalno vrednostjo 100 € in letnimi kuponi po kuponski obrestni meri 3,70 %. Prvi kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno obveznice ob izdaji. [5 točk]

Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

Kuponska obveznica izplača kupon $C = 3,70$ € čez eno leto ter kupon C skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100$ € čez dve leti.



$$\begin{aligned}
 P &= C \cdot D(0, 1) + (C + N) \cdot D(0, 2) = \\
 &= \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{C + N}{(1 + R(0, 2))^2} = \\
 &= \frac{3,7}{1 + 0,02} + \frac{103,7}{(1 + 0,04)^2} = 99,50 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1+1 točka.

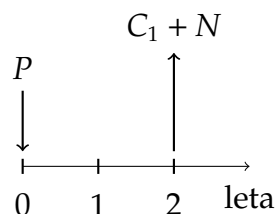
Cena obveznice 1 točka.

- b) Država je takoj za tem izdala še dveletno kuponsko obveznico z zaostalimi kuponi in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica eno leto po izdaji ne izplača kupona, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice z zaostalimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a). [4 točke]

Rešitev

Obveznica izplača kupon C_1 skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100$ € čez dve leti.

Cena obveznice je $P = 99,50$ €.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P = (C_1 + N) \cdot D(0, 2) = \frac{C_1 + N}{(1 + R(0, 2))^2}$$

in

$$C_1 = P(1 + R(0, 2)) - N = 99,5 \cdot (1 + 0,04)^2 - 100 = 7,62 \text{ €}.$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.

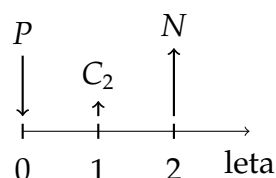
Izražen kupon in višina kupona 1*+1 točka.

Postopkovno točko damo pri prenosu napačne cene obveznice iz naloge a).

- c) Hkrati z obveznico iz naloge b) je država izdala še dveletno *kuponsko obveznico s pospešenimi kuponi* in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica ob dospetju kupona ne izplača, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice s pospešenimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz a). [4 točke]

Rešitev

Obveznica izplača kupon C_2 čez eno leto in nominalno vrednost $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti. Cena obveznice je $P = 99,50 \text{ €}$.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P = C_2 \cdot D(0, 1) + N \cdot D(0, 2) = \frac{C_2}{1 + R(0, 1)} + \frac{N}{(1 + R(0, 2))^2}$$

in

$$C_1 = \left(1 + R(0, 1)\right) \left(P - \frac{N}{(1 + R(0, 2))^2}\right) = (1 + 0,02) \cdot \left(99,5 - \frac{100}{(1 + 0,04)^2}\right) = 7,19 \text{ €}.$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.

Izražen kupon in višina kupona 1*+1 točka.

Postopkovno točko damo pri prenosu napačne cene obveznice iz naloge a).

- d) Zasebno finančno podjetje v isti državi pri zadolževanju plačuje pribitek x na netvegano obrestno mero; to pomeni, da za obrestno mero podjetja za vse t velja $\bar{R}(0, t) = R(0, t) + x$. Odloči se, da bo še samo izdalo dveletne obveznice z zaostalimi in s pospešenimi kuponi z nominalno vrednostjo 100 €. Z analizo kapitalskega trga ugotovi, da bosta ob izdaji ceni obveznic enaki, če zaostali kupon znaša 12 €, pospešeni kupon pa 11 €. Določi višino pribitka x na netvegano obrestno mero. [7 točk]

Rešitev

Obveznica z zaostalom kuponom izplača kupon $C_3 = 12$ € skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100$ € čez dve leti.

Z upoštevanjem obrestnega pribitka njena cena znaša

$$P_1 = (C_3 + N) \cdot \bar{D}(0, 2) = \frac{C_3 + N}{(1 + R(0, 2) + x)^2} = \frac{112}{(1,04 + x)^2}.$$

Obveznica s pospešenim kuponom izplača kupon $C_4 = 11$ € čez eno leto in nominalno vrednost $N = 100$ € čez dve leti.

Njena cena znaša

$$\begin{aligned} P_1 &= C_4 \cdot \bar{D}(0, 1) + N \cdot \bar{D}(0, 2) = \frac{C_4}{1 + R(0, 1) + x} + \frac{N}{(1 + R(0, 2) + x)^2} = \\ &= \frac{11}{1,02 + x} + \frac{100}{(1,04 + x)^2}. \end{aligned}$$

Z enačenjem dobimo

$$\begin{aligned} \frac{112}{(1,04 + x)^2} &= \frac{11}{1,02 + x} + \frac{100}{(1,04 + x)^2} \\ \frac{12}{(1,04 + x)^2} &= \frac{11}{1,02 + x} \\ 12(1,02 + x) &= 11(1,04 + x)^2 \\ 11x^2 + 10,88x - 0,3424 &= 0 \end{aligned}$$

Kvadratna enačba ima diskriminanto $D = 133,44$ in rešitvi $x_1 = 0,0305$ in $x_2 = -1,0196$.

Druga rešitev je nesmiselna, prva nam da pribitek $x = 3,05\%$.

Točkovanje

Denarni tokovi obveznic 1+1 točka.

Enačba na osnovi formule za vrednotenje obveznic z upoštevanjem pribitka 2 točki.

Prevedba na kvadratno enačbo 1* točka.

Rešitvi kvadratne enačbe 1 točka.

Višina pribitka 1 točka.

Postopkovno točko damo samo v primeru napačnih denarnih tokov.

Če pribitek v enačbi ni pravilno uporabljen, je rešitev vredna največ 2 točki.

4. Podjetje, ki sprejema plačila tudi v kriptovalutah, se želi zavarovati pred močnimi nihanjem vrednosti, ki so značilna za trg kriptovalut. Zato želi na borzi skleniti nekaj trimesečnih terminskih poslov za prodajo bitcoinov. Danes (6. marca 2020) je na voljo terminski posel za prodajo bitcoinov z ročnostjo 6. junija 2020 in izročitveno ceno 7245 \$ za en bitcoin.

Netvegana efektivna obrestna mera je 1 % za vsa dopetja.

Rezultate v ameriških dolarjih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Predpostavi, da na trgu ni arbitraže. Določi trenutno ceno enega bitcoina v dolarjih?

[5 točk]

Rešitev

Obrestna mera je $R = 1\%$.

Ročnost terminskega posla je 3 mesece, to je $T = \frac{1}{4}$ leta.

Izročitvena cena bitcoina je $K = 7245$ \$.

Za izročitveno ceno v terminskem poslu mora veljati

$$K = S_0(1 + R)^T,$$

kjer je S_0 trenutna cena bitcoina. Dobimo

$$S_0 = \frac{K}{(1 + R)^T} = \frac{7245}{1,01^{1/4}} = 7227 \$.$$

Točkovanje

Formula, ki povezuje trenutno in izročitveno ceno, 2 točki.

Pravilne vrednosti parametrov R , K in T 1 točka.

Trenutna cena 2 točki.

- b) Standardni terminski posel na borzi se nanaša na nakup ali prodajo 5 bitcoinov. Podjetje ve, da bo čez tri mesece prejelo 100 bitcoinov, ki jih bo moralo nato takoj prodati. Koliko standardnih terminskih poslov mora skleniti, da se popolnoma zavaruje pred tveganjem zaradi negotove prihodnje vrednosti bitcoina? [2 točki]

Rešitev

Skleniti mora $\frac{100}{5} = 20$ terminskih poslov.

Točkovanje

Število poslov 2 točki.

- c) Podjetje bo 6. junija 2020 na trgu kriptovalut prodalo 100 prejetih bitcoinov in z denarno poravnavo zaprlo terminske posle iz naloge b). Koliko denarja bo prejelo s prodajo bitcoinov in koliko denarja bo prejelo/plačalo ob zaprtju terminskih poslov v naslednjih dveh primerih:

i. cena bitcoina bo 8123 \$;

ii. cena bitcoina bo 6238 \$?

[6 točk]

Rešitev

Vrednost posameznega termenskega posla ob ročnosti za podjetje (kratka pozicija) znaša

$$5 \cdot (K - S_T),$$

kjer je $K = 7245$ \$ izročitvena cena bitcoina v terminskem poslu, S_T pa cena bitcoina na trgu na dan ročnosti posla.

Če bo $K > S_T$, je vrednost termenskega posla pozitivna in podjetje znesek prejme.

Če bo $K < S_T$, je vrednost termenskega posla negativna in podjetje znesek plača.

- i. Če bo cena bitcoina enaka $S_T = 8123$ \$, bo s prodajo bitcoinov podjetje zasluži

$$100 \cdot S_T = 812300 \$.$$

Za zaprtje terminskih poslov bo moralo plačati

$$20 \cdot 5 \cdot (8123 - 7245) = 87800 \$.$$

- ii. Če bo cena bitcoina enaka $S_T = 6238$ \$, bo s prodajo bitcoinov podjetje zasluži

$$100 \cdot S_T = 623800 \$.$$

Ob zaprtju terminskih poslov bo prejelo

$$20 \cdot 5 \cdot (7245 - 6238) = 100700 \$.$$

Opomba: V obeh primerih podjetje dobi 724500 \$ za 100 bitcoinov. Z nakupom terminskih poslov si že danes zagotovi prihodnjo prodajno ceno bitcoina.

Točkovanje

Oba primera točkujemo enako, in sicer:

- Zaslugek ob prodaji bitcoinov 1 točka.
- Smer denarnega toka ob zaprtju posla (tj. podjetje plača ali prejme) 1 točka.
- Znesek poravnave 1 točka.

- d) Privzemi, da danes cena bitcoina ni enaka vrednosti iz naloge a), pač pa znaša 7171 \$. Opiši arbitražno strategijo in določi višino arbitražnega zaslugeka. [7 točk]

Rešitev

Ker je cena bitcoina na trgu nižja od 7227 \$, je arbitražna strategija naslednja:

Danes (6. marca 2020, $t = 0$):

- Podjetje si na banki za 3 mesece sposodi 717100 \$,
- na trgu kriptovalut kupi 100 bitcoinov,
- na borzi sklene 20 terminskih poslov za prodajo bitcoinov čez 3 mesece po izročitveni ceni 7245 \$.

Netiran denarni tok je enak 0.

Čez 3 mesece (6. junija 2020, $t = T = \frac{1}{4}$):

- Podjetje proda 100 bitcoinov po izročitveni ceni, kot mu omogočajo terminski posli (ekvivalentno: proda bitcoine na trgu kriptovalut in z denarno poravnavo zapre terminske posle),
- banki vrne sposojeno glavnico z obrestmi.

Netiran denarni tok je

$$100 \cdot 7245 - 717100 \cdot 1,01^{1/4} = 5613,93 \$.$$

Arbitražni zaslužek znaša 5613,93 \$ in je ustvarjen ob ročnosti terminskih poslov.

Točkovanje

Strategija v času $t = 0$, 1+1+1 točka.

Netiran denarni tok v času $t = 0$ (mora biti nenegativen), 1 točka.

Strategija v času $t = \frac{1}{4}$, 1+1 točka.

Netiran denarni tok v času $t = \frac{1}{4}$ (mora biti nenegativen), 1 točka.

Vsaj v enem trenutku mora biti denarni tok pozitiven.

Arbitražno strategijo lahko opišemo za poljubno število bitcoinov, ki pa mora biti deljivo s 5.