

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilen odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----|----|----|----|----|----|
| | | | | | |

| B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|----|----|----|
| | | | |

A1 Katera prostornina je med 8 cm^3 in 700 mm^3 ?

- (A) $0,3 \text{ cm}^3$ (B) $0,0009 \text{ dm}^3$ (C) 10 cm^3 (D) 12 ml (E) $0,8 \text{ dm}^3$

A2 V teku na 100 m je Meta vedno najhitrejša. Na športnem dnevu so jo poskušale prehiteti Sonja, Vida in Mojca, a jim ni uspelo. Vida je prišla skozi cilj pred Mojco. Sonja je bila predzadnja. V kakšnem vrstnem redu so prihitele skozi cilj?

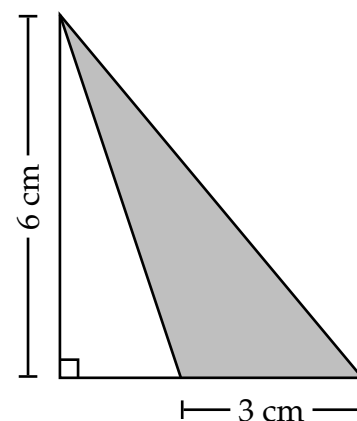
- (A) Vida, Mojca, Sonja, Meta (B) Meta, Sonja, Vida, Mojca
(C) Vida, Meta, Mojca, Sonja (D) Meta, Sonja, Mojca, Vida
(E) Meta, Vida, Sonja, Mojca

A3 Kako visok je steber, če je tretjina stebra v tleh, polovica v vodi, nad vodo pa štrli 1,5 metra?

- (A) 7,5 m (B) 8 m (C) 9 m (D) 9,5 m (E) 10 m

A4 Kolikšna je ploščina osenčenega trikotnika?

- (A) 6 cm^2 (B) 9 cm^2 (C) 15 cm^2
(D) 18 cm^2 (E) 30 cm^2



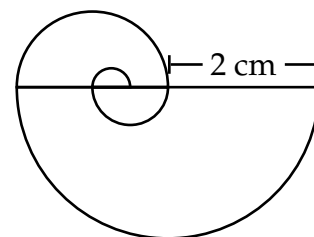
A5 V katerega izmed danih izrazov lahko preoblikuješ izraz

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

- (A) $\frac{3}{a+b+c}$ (B) $\frac{a+b+c}{abc}$ (C) $\frac{3(a+b+c)}{abc}$
(D) $\frac{3}{ab+ac+bc}$ (E) $\frac{3}{abc}$

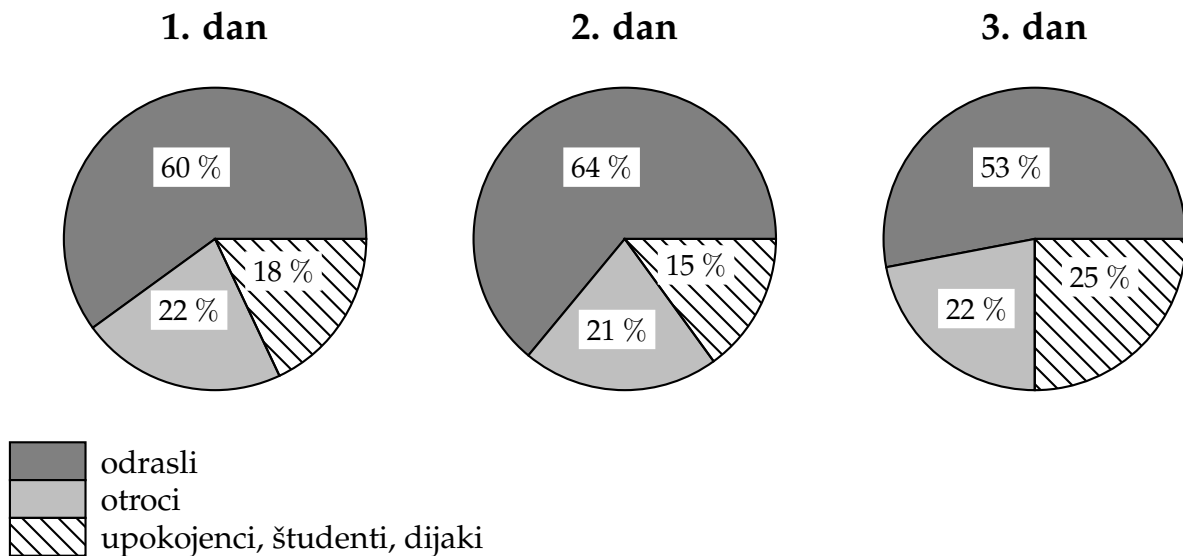
A6 Polžasta vzmet se zavija tako, da je premer zavoja enak prejšnjemu polmeru (glej sliko). Koliko centimetrov je dolga polžasta vzmet?

- (A) $3,25 \pi$ (B) $3,5 \pi$ (C) $3,75 \pi$
(D) 4π (E) $4,25 \pi$



B1 Turistično društvo Hrastov vršiček je v novoletnem času pripravilo Žive jaslice in namenilo del izkupička v dobrodelne namene. Spodnja tabela in grafikoni prikazujejo, koliko obiskovalcev si je ogledalo Žive jaslice.

| | Št. obiskovalcev |
|--------|------------------|
| 1. dan | 440 |
| 2. dan | 536 |
| 3. dan | 544 |



A Izpolnite spodnjo tabelo (zaokrožite na cela števila):

| | Število obiskovalcev | | |
|------------------------------|----------------------|--------|--------|
| | 1. dan | 2. dan | 3. dan |
| Odrasli | | | |
| Otroci | | | |
| Upokojenci, študenti, dijaki | | | |

B Vstopnina za odraslega je znašala 7 EUR, za otroka polovico manj, za upokojenca, študenta ali dijaka pa za 2 EUR manj. Kolikšen je bil izkupiček od prodaje vstopnic v vseh treh dneh?

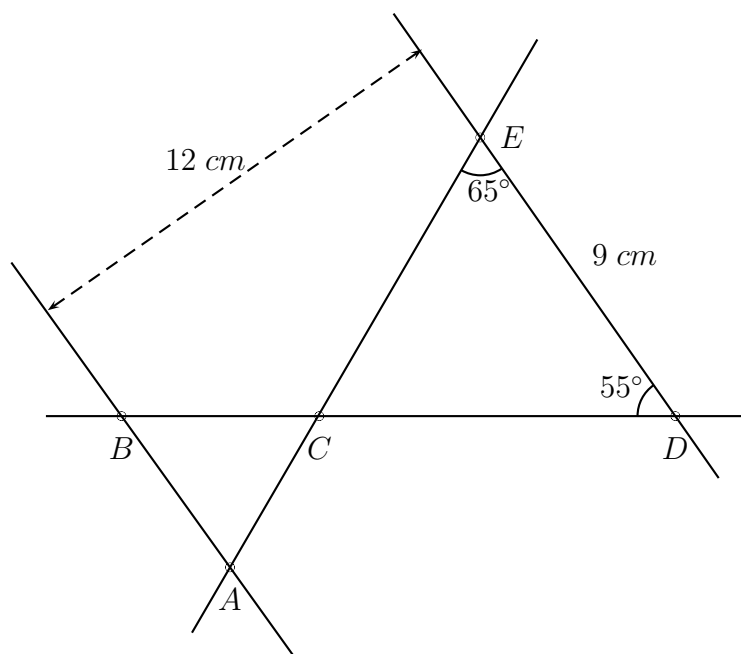
C Turistično društvo je 35 % izkupička od prodaje vstopnic namenilo v dobrodelne namene. Koliko EUR je bilo to?

B2 Štirje delavci so si razdelili 1880 EUR honorarja. Prvi delavec je dobil četrtno, drugi pa 5 % celotnega zneska. Ostanek sta si razdelila tretji in četrti delavec v razmerju 1 : 3. Koliko je dobil vsak delavec?

B3 Alpinistična odprava ima 420 kg prtljage.

- A** Najmanj koliko nosačev morajo najeti, če lahko vsak nosač nosi največ 35-kilogramski tovor?
- B** Povprečno kolikšno breme bi moral nositi vsak nosač, če bi jih bilo 15?
- C** Na koliko načinov lahko izberejo prvi trije nosači svoj tovor, če izbirajo med desetimi različnimi tovor?
- D** Eden od tovorov je v obliki kvadra, drugi pa v obliki valja s premerom 1 m in višino 0,8 m. Kvader je 1,57 m dolg in 4 dm širok. Koliko je visok, če imata oba tovara enako prostornino?

B4 Vzporedni premici AB in DE , oddaljeni 12 cm, sekata premici s presečiščem v točki C tako, da velja $|BC| : |CD| = 2 : 3$.



- A** Zapiši velikosti kotov $\angle CAB$, $\angle ABC$ in $\angle BCA$.
- B** Izračunaj razdaljo $|AB|$, če meri razdalja $|DE| = 9$ cm.
- C** Izračunaj ploščino trikotnika ABC .

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z -0.5 točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| B | E | C | B | D | C |

1. $0,0009 \text{ dm}^3 = 900 \text{ mm}^3$ je več kot 700 mm^3 in manj kot $8 \text{ cm}^3 = 8000 \text{ mm}^3$.
2. Ker je Meta prva, Sonja pa predzadnja, je od vseh ponujenih edini možni odgovor E.
3. Če je x višina celega stebra, meri njegova polovica $\frac{x}{2}$, tretjina pa $\frac{x}{3}$. Iz enačbe $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 1,5 \text{ m} = x$ dobimo, da je višina stebra $x = 9 \text{ m}$.
4. Ploščino trikotnika izračunamo tako, da produkt stranice trikotnika in višine na to stranico delimo z 2. Ploščina osenčenega trikotnika na sliki je enaka $\frac{3 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm}^2$.
5. Vrednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$.
6. Dolžina vzmeti je vsota dolžin štirih različnih krožnih lokov, pri čemer vsak krožni lok predstavlja polovico obsega izbranega kroga s polmerom $2, 1, \frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ cm. Ker se polovica obsega kroga s polmerom r izračuna kot πr , je dolžina polžaste vzmeti $2\pi + 1\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = 3,75\pi$.

DALJŠE NALOGE

B1. Iz tabele in grafikona odčitamo podatke za reševanje naloge in izračunamo število odraslih, otrok in upokoјencev/študentov/dijakov, ki so v posameznih dneh obiskali Žive jaslice.

| | Število obiskovalcev | | |
|------------------------------|----------------------|-------------------|-------------------|
| | 1. dan | 2. dan | 3. dan |
| Odrasli | 60 % od 440 = 264 | 64 % od 536 = 343 | 53 % od 544 = 288 |
| Otroci | 22 % od 440 = 97 | 21 % od 536 = 113 | 22 % od 544 = 120 |
| Upokoјenci, študenti, dijaki | 18 % od 440 = 79 | 15 % od 536 = 80 | 25 % od 544 = 136 |

Izkupiček od prodaje je bil:

- 1. dan: $264 \cdot 7 \text{ EUR} + 97 \cdot 3,5 \text{ EUR} + 79 \cdot 5 \text{ EUR} = 2582,5 \text{ EUR}$
- 2. dan: $343 \cdot 7 \text{ EUR} + 113 \cdot 3,5 \text{ EUR} + 80 \cdot 5 \text{ EUR} = 3196,5 \text{ EUR}$
- 3. dan: $288 \cdot 7 \text{ EUR} + 120 \cdot 3,5 \text{ EUR} + 136 \cdot 5 \text{ EUR} = 3116 \text{ EUR}$

Izkupiček od prodaje v vseh treh dneh je bil 8895 EUR.

V dobrodelne namene je bilo namenjenih $0,35 \cdot 8895 \text{ EUR} = 3113,25 \text{ EUR}$.

- A Izpolnjena tabela, vsaka vrstica 1 točka 3 točke
- B Odgovor, npr.: Izkupiček od prodaje v vseh treh dneh je bil 8895 EUR. 2 točki
- C Odgovor, npr.: V dobrodelne namene so namenili 3113,25 EUR 1 točka

B2. Prvi delavec je dobil $\frac{1}{4}$ od 1880 EUR = 470 EUR, drugi delavec 5 % od 1880 EUR = 94 EUR. Ostanek $1880 \text{ EUR} - (470 \text{ EUR} + 94 \text{ EUR}) = 1316 \text{ EUR}$ si tretji in četrti delavec razdelita v razmerju 1 : 3. Tretji delavec dobi tako $\frac{1}{4}$ od 1316 EUR = 329 EUR, četrti delavec pa $\frac{3}{4}$ od 1316 = 987 EUR.

Izračunan honorar za prvega in drugega delavca, dvakrat po 1 točka..... 2 točki

Izračunan honorar za tretjega in četrtega delavca, dvakrat po 2 točki..... 4 točke

Odgovor, npr.: Prvi delavec dobi 470 EUR, drugi 94 EUR, tretji 329 EUR in četrti delavec 987 EUR..... 1 točka

B3. Najeti morajo najmanj $\frac{420 \text{ kg}}{35 \text{ kg}} = 12$ nosačev.

Če bi jih bilo 15, bi vsak nosač v povprečju moral nositi breme $\frac{420 \text{ kg}}{15} = 28 \text{ kg}$.

Nosači lahko izberejo svoj tovor na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načinov.

Prostornino valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$, pri čemer je $r = 0,5 \text{ m}$ in $v = 0,8 \text{ m}$.

Prostornina valja je $0,628 \text{ m}^3$.

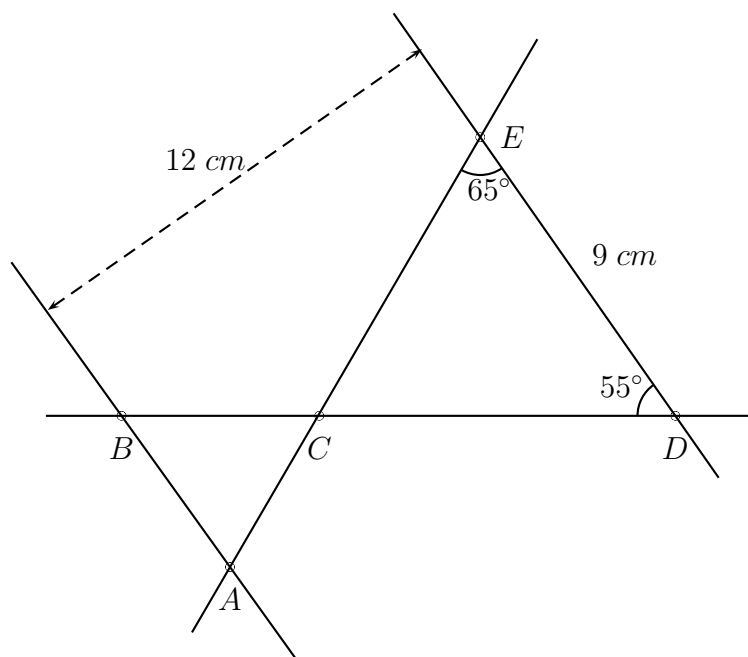
Višina kvadra z dano dolžino in širino ob znani prostornini izračunamo iz enačbe $v = \frac{V}{ab} =$

$$\frac{0,628 \text{ m}^3}{1,57 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m}} = 1 \text{ m}.$$

- A Odgovor, npr.: Najeti morajo vsaj 12 nosačev. 1 točka
- B Odgovor, npr.: Če bi bilo 15 nosačev, bi moral vsak v povprečju nositi 28 kg tovora... 1 točka

- C Odgovor, npr.: Trije nosači lahko izberejo tovor na 720 različnih načinov. 2 točki
- D Izračunana prostornina valja $V = 0,628 m^3$ 1 točka
 Izračunana višina kvadra $v = 1 m$ 2 točki

B4. S slike razberemo, da je $\angle CAB = \angle CED$ in $\angle ABC = \angle EDC$, saj gre za izmenične kote ob prečnici. Tako je $\angle BAC = 65^\circ$ in $\angle CBA = 55^\circ$. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku 180° , je $\angle ACB = 180^\circ - (65^\circ + 55^\circ) = 60^\circ$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEC$ sta podobna, zato velja: $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|}$. Iz enačbe $\frac{|AB|}{9 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$ dobimo, da je $|AB| = 6 \text{ cm}$. Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je $S = \frac{|AB| \cdot v_{AB}}{2} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 4,8 \text{ cm}}{2} = 14,4 \text{ cm}^2$. Višino $v_{AB} = 4,8 \text{ cm}$ dobimo upoštevajoč $v_{AB} + v_{DE} = 12 \text{ cm}$ in $\frac{v_{AB}}{v_{DE}} = 2 : 3$.



- A Zapisane velikosti kotov: $\angle BAC = 65^\circ$, $\angle CBA = 55^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, trikrat po 1 točka
 3 točke
- B Izračunana dolžina $|AB| = 6 \text{ cm}$ 2 točki
- C Izračunana višina trikotnika $\triangle ABC$, $v_{AB} = 4,8 \text{ cm}$ 1 točka
 Izračunana ploščina trikotnika $\triangle ABC$, $S = 14,4 \text{ cm}^2$ 1 točka