Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 2. april 2008

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v gornjo tabelo na nalepki, spodnjo tabelo na nalepki pa pusti prazno.

Prilepi nalepko s šifro

A1. Enačba $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 6$:

(**A**) ima rešitev $x = 1$ (**B**) nima rešitve (**C**) ima rešitev $x = 2$
(**D**) ima neskončno rešitev (**E**) ima rešitev $x = 0$

A2. Naj bo $a = -2$ in $b = -1$. Vrednost izraza $(a - (-b) - a^2 - b)^{-1}$:

(**A**) je enaka -6 (**B**) ni definirana (**C**) je enaka $-\frac{1}{6}$
(**D**) je enaka $\frac{1}{6}$ (**E**) je enaka 6

A3. Natančna vrednost izraza $|6 - 2\pi|$ je:

(**A**) $\frac{2}{7}$ (**B**) $0{,}28$ (**C**) $6 - 2\pi$
(**D**) $6 + 2\pi$ (**E**) $2\pi - 6$

A4. Dana sta izraza $A = x^2 + 7x + 12$ in $B = x^2 + 4x$. Katera trditev je pravilna?

(**A**) $D(A, B) = 1$ (**B**) $v(A, B) = (x+3)(x+4)$ (**C**) $B + 4 = (x-2)^2$
(**D**) $A - 20 = (x-8)(x+1)$ (**E**) $A - B$ je deljiv s konstantnim polinomom $q = 3$

A5. Za katera cela števila ima izraz $-3(a-3) - (-4a)$ vrednost vsaj 5?

(**A**) $a < 5$ (**B**) $a \geq -4$ (**C**) $a < -5$
(**D**) $a < -4$ (**E**) nič od navedenega

A6. Koliko je $2(1 - \frac{1}{2}) + 3(1 - \frac{1}{3}) + \cdots + 10(1 - \frac{1}{10})$?

(**A**) 45 (**B**) 49 (**C**) 50 (**D**) 54 (**E**) 55

B1. Poenostavi izraz $(1-(\frac{x+4}{6})^{-1}):(1-\frac{2x-10}{x^2+x-12})$. *(6 točk)*

B2. Natančno izračunaj $(\sqrt{33}+2\sqrt{3})(\sqrt{33}-2\sqrt{3})-5\cdot\frac{(4-\sqrt{5})^2}{\sqrt{25}}+\sqrt{320}$. Dobljeni rezultat delno koreni. *(6 točk)*

B3. Cena izdelka se je trikrat zapored povečala za 5%. Koliko odstotna je skupna podražitev? Rezultat naj bo zaokrožen na dve decimalni mesti. Za koliko odstotkov, zaokroženo na eno decimalno mesto, moramo znižati končno ceno izdelka, da dobimo prvotno ceno? *(6 točk)*

B4. V tabeli je prikazano število uvrstitev tekmovalcev na prva tri mesta na tekmovanju v sezoni $2006/07$. Tekmovalci so na posamezni tekmi za osvojeno prvo, drugo oziroma tretje mesto dobili različno število točk. Skupno število doseženih točk posameznega tekmovalca v tej sezoni vidimo v zadnjem stolpcu tabele.

Tekmovalec	Število uvrstitev na:			Skupno število doseženih točk
	1. mesto	2. mesto	3. mesto	
Aljaž	2	1	5	28
Branko	4	1	2	36
Cene	0	6	2	28
Darko	1	3	2	?

Izračunajte število točk, ki jih tekmovalec dobi za osvojena prva tri mesta, in število točk, ki jih je dosegel Darko. *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 2. april 2008

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v gornjo tabelo na nalepki, spodnjo tabelo na nalepki pa pusti prazno.

Prilepi nalepko s šifro

A1. Kje v koordinatnem sistemu leži točka $T(1-\sqrt{3}, \pi - 2)$?

(**A**) v koordinatnem izhodišču
(**B**) v prvem kvadrantu
(**C**) v drugem kvadrantu
(**D**) v tretjem kvadrantu
(**E**) v četrtem kvadrantu

A2. Linearna funkcija $f(x) = -(3k-1)x + 4$ je padajoča, če je:

(**A**) $k < \frac{1}{3}$
(**B**) $k = \frac{1}{3}$
(**C**) $k > \frac{1}{3}$
(**D**) $k > 3$
(**E**) nič od navedenega

A3. Soba ima na načrtu širino 18 mm. Kolikšna je dejanska širina sobe, če je načrt sobe narisan v merilu $1 : 200$?

(**A**) $3{,}6$ cm
(**B**) $1{,}8$ m
(**C**) 9 dm
(**D**) $3{,}6$ m
(**E**) 360 mm

A4. Katera od izjav je napačna?

(**A**) V vsakem trikotniku je težiščnica pravokotna na eno izmed stranic.
(**B**) Romb je enakostranični paralelogram.
(**C**) Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360 stopinj.
(**D**) Trikotnik ima tri notranje kote.
(**E**) Težiščnice vsakega trikotnika se sekajo v eni točki.

A5. Vsota števil $\frac{2}{\sqrt{5}}$ in $\frac{1}{\sqrt{7}}$ je enaka:

(**A**) $\frac{19\sqrt{5}}{35}$
(**B**) $\frac{3}{\sqrt{12}}$
(**C**) $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{35}$
(**D**) $\frac{14\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{35}$
(**E**) $\frac{2\sqrt{35}+\sqrt{5}}{35}$

A6. Dan je izraz $\frac{(\sqrt{x})^3}{x^{\frac{1}{2}}} - (\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{1}{3}}})^3$. Za $x > 0$ je vrednost izraza:

(**A**) 0
(**B**) 1
(**C**) -1
(**D**) 2
(**E**) nič od navedenega

B1. Dana je premica z enačbo $-2x-5y=10$. Izračunaj koordinate točke, v kateri dana premica seka simetralo lihih kvadrantov. Obe premici nariši v isti kordinatni sistem. *(6 točk)*

B2. Dana je funkcija $f(x)=(3a-1)x+2b-1$. Določi parametra a in b tako, da bo ničla funkcije -1 in začetna vrednost 5. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga graf te funkcije oklepa s koordinatnima osema? *(6 točk)*

B3. Velikost enega izmed notranjih kotov konveksnega šestkotnika je 120°. Velikosti ostalih pet kotov so v razmerju $3:4:5:6:7$. Izračunaj velikosti vseh notranjih kotov in zapiši število diagonal tega šestkotnika. *(6 točk)*

B4. Reši enačbo $2 \cdot \sqrt{x+2}-2=-\sqrt{3x-2}$. *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 2. april 2008

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v gornjo tabelo na nalepki, spodnjo tabelo na nalepki pa pusti prazno.

Prilepi nalepko s šifro

A1. Vse rešitve neenačbe $x > \frac{x^2}{2}$ ležijo na intervalu:

(**A**) $(0,1)$ (**B**) $[0,1]$ (**C**) $(0,2)$ (**D**) $(\frac{1}{2},2)$ (**E**) $[\frac{1}{2},1]$

A2. Dana je funkcija $f(x) = x(6-x)$. Funkcija ima:

(**A**) najmanjšo vrednost pri $x = 6$
(**B**) največjo vrednost pri $x = 2$
(**C**) vodilni koeficient 1
(**D**) ničlo $x = -6$
(**E**) zalogo vrednosti $\mathrm{Z}_f = (-\infty, 9]$

A3. Kolikšen kot oklepata kraka krožnega izseka, ki pokriva 35% celotne ploščine kroga?

(**A**) $35°$ (**B**) $63°$ (**C**) $35\pi°$
(**D**) $126°$ (**E**) nič od navedenega

A4. Naj bo O število oglišč m-strane piramide, R število robov te piramide in P število njenih mejnih ploskev. Vrednost izraza $O + P - R$ je:

(**A**) m (**B**) 2 (**C**) $m-1$ (**D**) $2m$ (**E**) 5

A5. Rešitvi enačbe $2^{x^2-3x-1} = 0{,}125$ sta:

(**A**) $x_1 = 1, x_2 = 2$ (**B**) $x_1 = x_2 = 1$ (**C**) $x_1 = x_2 = 2$
(**D**) $x_1 = -1, x_2 = 2$ (**E**) $x_1 = -1, x_2 = -2$

A6. Rešitev enačbe $\log_2(\log_2(\log_2 x)) = 0$ je:

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) $\log_8 x$ (**E**) ni rešitve

B1. Če bi se grafično računalo podražilo za toliko odstotkov, kolikor znaša njegova sedanja cena v evrih, bi morali za 12 računal plačati 1287 evrov. Kolikšna je sedanja cena enega računala? *(6 točk)*

B2. Kovinsko kocko s prostornino $288\ \mathrm{cm}^3$ pretalimo v kvader, katerega dolžine stranic so v razmerju $6 : 3 : 2$. Koliko so dolge stranice kvadra in kolikšna je površina kvadra? *(6 točk)*

B3. Dana je funkcija $f(x) = (\frac{1}{3})^{1-x} - 1$.

(a) Koliko ničel ima funkcija?

(b) Kje graf seka ordinatno os?

(c) Nariši graf funkcije. *(skupaj 6 točk)*

B4. Kvadratna funkcija ima teme v presečišču premic z enačbama $x - 2y = 0$ in $x + y + 3 = 0$, njen graf pa poteka skozi točko $A(0, -3)$. Zapiši to funkcijo. *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 2. april 2008

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v gornjo tabelo na nalepki, spodnjo tabelo na nalepki pa pusti prazno.

Prilepi nalepko s šifro

A1. Primerjaj ostra kota α in β po velikosti, če je $\tan\alpha = 1$ in $\cot\beta = 1{,}1$.

(**A**) Kota sta skladna. (**B**) Kot α je večji.
(**C**) Kot β je za 1° manjši od α. (**D**) Kot β je večji.
(**E**) Brez računala ne moremo ugotoviti, kateri je večji.

A2. V katerem primeru zaloga vrednosti ne ustreza dani funkciji?

(**A**) $\mathrm{Z}_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ za $f(x) = \cos x$; če je $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
(**B**) $\mathrm{Z}_f = \mathbb{R}^-$ za $f(x) = -2x - 4$, če je $x > -2$
(**C**) $\mathrm{Z}_f = \mathbb{R}$, za $f(x) = x^2 + 3$, če je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
(**D**) $\mathrm{Z}_f = (0, \infty)$ za $f(x) = 2^x$, če je $x \in \mathbb{R}$
(**E**) $\mathrm{Z}_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ za $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, če je $0 < x \leq 1$

A3. Zapis $f(x) = \sqrt{2} \cdot 2 - 2^{-x}$ predstavlja:

(**A**) linearno funkcijo (**B**) polinom (**C**) racionalno funkcijo
(**D**) logaritemsko funkcijo (**E**) nič od navedenega

A4. Premica, dana z enačbo $\frac{x}{2} - 2y = -1$, seka graf polinoma $p(x) = x^3 - 4x^2 + a_0$ pri $x = 2$. Prosti člen polinoma ima vrednost:

(**A**) 12 (**B**) 6 (**C**) 1 (**D**) 0 (**E**) 9

A5. Splošni člen zaporedja $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{17}; \ldots$ je lahko:

(**A**) $a_n = \frac{1}{2^{2n-2}+1}$ (**B**) $a_n = \frac{1}{2^{2n}+1}$ (**C**) $a_n = \frac{1}{2^{2n-1}-1}$
(**D**) $a_n = \frac{1}{4^{n-2}+1}$ (**E**) $a_n = \frac{1}{4^{n-1}+1}$

A6. Kolikšna je vsota vseh pozitivnih sodih števil, ki so manjša od 10^5?

(**A**) $\frac{10^5}{2}$ (**B**) $2 \cdot 10^5$ (**C**) 5000 (**D**) 5001000 (**E**) 2499950000

B1. Poenostavi izraz $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \tan \alpha \cdot \sin^2 \alpha$. *(6 točk)*

B2. Izračunaj vrednost parametra a tako, da bo polinom $p(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + bx - 2$ deljiv s polinomom $q(x) = (x+2)(x-1)$. *(6 točk)*

B3. Bolniku so vbrizgali zdravilo in nato merili koncentracijo zdravila v bolnikovi krvi. Po t urah od vbrizganja je bila koncentracija zdravila (v miligramih na liter) enaka $c(t) = \frac{4t}{t^2+3}$.

(a) Nariši graf funkcije $c(t)$.

(b) Čez koliko časa pade koncentracija pod $0{,}2$ miligrama na liter? *(skupaj 6 točk)*

B4. Leta 1991 je znašal dobiček podjetja 1000000 evrov. Vsako naslednje leto je dobiček naraščal tako, da je presegel dobiček predhodnega leta za določen konstantni znesek evrov. Skupni dobiček podjetja od začetka 1991 do konca leta 2000 je znašal 19900000 evrov. Koliko evrov je znašal dobiček v letu 1995? *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 2. april 2008

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	C	E	E	B	A

A1. Levo stran enačbe kvadriramo, nato enačbo lahko preuredimo v $9 = 6$, kar pomeni, da enačba nima rešitve.

A2. Namesto a in b vstavimo vrednosti. Dobimo $(-2-1-4+1)^{-1} = -\frac{1}{6}$.

A3. Vrednost izraza $6 - 2\pi$ je negativna, njena absolutna vrednost je enaka $2\pi - 6$.

A4. Ker lahko zapišemo $A = (x+3)(x+4)$ in $B = x(x+4)$, uvidimo, da ne odgovor **A** ne odgovor **B** nista pravilna. Hitro se lahko prepričamo, da ni pravilen niti odgovor **D** niti odgovor **E**. Pravilen je odgovor **C**.

A5. Upoštevamo pomen izraza "vsaj" in zapišemo neenačbo $-3a+9+4a \geq 5$. Rešitev je $a \geq -4$.

A6. Odpravimo vse oklepaje in dobimo vsoto $1+2+3+4+\cdots+9$. Števila seštejemo in dobimo rezultat 45.

II. DEL

B1. Upoštevamo, da je $(\frac{x+4}{6})^{-1} = \frac{6}{x+4}$ in izračunamo $1 - (\frac{x+4}{6})^{-1} = \frac{x+4-6}{x+4} = \frac{x-2}{x+4}$. Delitelj $1 - \frac{2x-10}{x^2+x-12}$ zapišemo v obliki $\frac{x^2+x-12-2x+10}{x^2+x-12} = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$. Deljenje ulomkov zapišemo kot množenje z obratno vrednostjo delitelja: $\frac{x-2}{x+4} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2-x-2}$. Drugi ulomek razcepimo $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x+1)}$. Nato ulomka okrajšamo in dobimo $\frac{x-3}{x+1}$.

Poenostavitev deljenca (prvega izraza) $\frac{x+4-6}{x+4} = \frac{x-2}{x+4}$ .... 1 točka
Poenostavitev deljitelja (drugega izraza) $\frac{x^2+x-12-2x+10}{x^2+x-12} = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$ .... 1 točka

Pravilno izvedeno deljenje ulomkov $\frac{x-2}{x+4} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2-x-2}$ .... 1 točka
Razcep števca in imenovalca drugega ulomka $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x+1)}$ .... $1+1$ točka
Rezultat $\frac{x-3}{x+1}$ .... 1 točka

B2. V prvem zmnožku odpravimo oklepaje, izraz poenostavimo in dobimo vrednost 21. V drugem členu izraza je $\sqrt{25}=5$, opravimo krajšanje in dobimo $(4-\sqrt{5})^2$. Dvočlenik $(4-\sqrt{5})^2$ kvadriramo in dobimo rezultat $21-8\sqrt{5}$. Delno korenimo tretji člen $\sqrt{320}=8\sqrt{5}$. Izračunamo razliko prvih dveh členov, prištejemo tretji člen in dobimo rezultat $16\sqrt{5}$.

Poenostavitev izraza $(\sqrt{33}+2\sqrt{3})(\sqrt{33}-2\sqrt{3})=33-12=21$ .... 1 točka
Izračun kvadratnega korena in krajšanje v drugem členu do oblike $(4-\sqrt{5})^2$ .... 1 točka
Kvadriranje dvočlenika $(4-\sqrt{5})^2=16-8\sqrt{5}+5=21-8\sqrt{5}$ .... 1 točka
Upoštevanje negativnega predznaka pred drugim členom .... 1 točka
Delno korenjenje $\sqrt{320}=8\sqrt{5}$ .... 1 točka
Rezultat $16\sqrt{5}$ .... 1 točka

B3. Za izračuna skupne podražitve uporabimo zaporedoma procentni (sklepni) račun. Po prvi podražitvi je cena izdelka $1{,}05x$, po drugi podražitvi je cena 105 % od $1{,}05x$, kar je $1{,}05^2x$. Po tretji podražitvi je cena $1{,}05^3x$, kar je $1{,}157625x$. Od nove cene odštejemo prvotno ceno x, spremenimo v procente in dobimo podražitev $15{,}76$ %. Izračunamo, da je prvotna cena $86{,}4\%$ končne cene. Razlika je $13{,}6\%$.

Cena po prvi podražitvi $1,05x$ .... 1 točka
Cena po drugi podražitvi $1,05^2x$ .... 1 točka
Cena po tretji podražitvi $1,05^3x=1,157625$ .... 1 točka
Odgovor. Skupna podražitev je $15,76\%$ .... 1 točka
Izračun, da je prvotna cena $86,4\%$ končne cene .... 1 točka
Odgovor: Znižanje je $13,6\%$ .... 1 točka

B4. Uvedemo neznanke x, y, z, ki pomenijo število točk za doseženo prvo, drugo in tretje mesto. Nato s pomočjo podane tabele nastavimo sistem treh enačb s tremi neznankami. Rešimo sistem in dobimo rešitev: $x=7, y=4, z=2$. Darko ima $x+3y+2z$ točk, vstavimo rešitve sistema in dobimo, da je Darko dosegel 23 točk.

Zapis sistema
$2x+y+5z=28$
$4x+y+2z=36$
$6y+2z=28$ .... 2 točki
Rešitev $x=7, y=4, z=2$ .... 1^*+2 točki
Izračunane točke za Darka $x+3y+2z=7+3\cdot4+2\cdot2=23$ .... 1 točka

Drugi letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	D	A	D	A

A2. Upoštevamo, da je smerni koeficient negativen: $-(3k-1) < 0$. Rešimo neenačbo in dobimo, da je $k > \frac{1}{3}$.

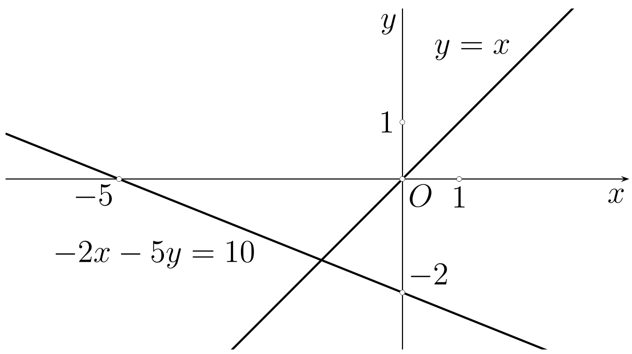
A3. Če je na načrtu, narisanem v merilu $1 : 200$, širina sobe enaka 18 mm, je v resnici 200-krat večja, to je 3600 mm = 3,6 m.

A5. Racionaliziramo imenovalca obeh ulomkov: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ in $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Seštejemo ulomka $\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{14\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{35}$.

A6. Korene zapišemo kot potence z racionalnimi eksponenti in dobimo $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{x}$. Upoštevamo deljenje potenc z enakima osnovama $x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} - x = x - x = 0$.

II. DEL

B1. Premici narišemo v koordinatni sistem, kjer sta presečišči z osema vidni. Upoštevamo enačbo simetrale lihih kvadrantov $y = x$.



Zapišemo enačbo za presečišče premic.
Izračunamo x in zapišemo koordinate presečišč.

Narisani premici .... 2 točki
Upoštevana simetrala lihih kvadrantov $y = x$ .... 1 točka
Zapis enačbe $-\frac{2x}{5} - 2 = x$ .... 1 točka
Izračunani $x = -\frac{10}{7}$ .... 1 točka
Zapisano presečišče $P(-\frac{10}{7}, -\frac{10}{7})$ .... 1 točka

B2. Upoštevamo, da velja $f(-1) = 0$ in dobimo $-(3a-1)+2b-1 = 0$. Upoštevamo še $f(0) = 5$. Dobimo $2b-1 = 5$. Rešimo nastali sistem. Dobimo rešitvi $a = 2$ in $b = 3$. Ploščino trikotnika izračunamo z uporabo formule za ploščino pravokotnega trikotnika $S = \frac{5}{2}$.

Zapis enačbe $-(3a-1) + 2b - 1 = 0$ .... 1 točka
Zapis enačbe $2b - 1 = 5$. .... 1 točka

Izračun $a = 2$ in $b = 3$ .... $1 + 1$ točka
Uporaba $S = \frac{|m \cdot n|}{2} = \frac{5}{2}$ .... $1^* + 1$ točka

B3. Upoštevamo, da je vsota notranjih kotov 6-kotnika $4 \cdot 180°$. Upoštevamo tudi dano razmerje ter zapišemo enačbo $120° + 3t + 4t + 5t + 6t + 7t = 4 \cdot 180°$. Izračunamo $t = 24°$. Nato izračunamo notranje kote $72°, 96°, 120°, 120°, 144°, 168°$. Izračunamo še število diagonal, teh je 9.

Upoštevamo, da je vsota notranjih kotov $4 \cdot 180°$ .... 1 točka
Uporaba razmerja $\alpha_1 = 3t, \alpha_2 = 4t, \alpha_3 = 5t, \alpha_4 = 6t, \alpha_5 = 7t$ .... 1 točka
Zapis enačbe $120° + 3t + 4t + 5t + 6t + 7t = 4 \cdot 180°$ .... 1 točka
Izračun $t = 24°$ .... 1 točka
Zapis velikosti notranjih kotov $72°, 96°, 120°, 120°, 144°, 168°$ .... 1 točka
Izračun števila diagonal .... 1 točka

B4. Enačbo kvadriramo $4(x + 2) - 8\sqrt{x + 2} + 4 = 3x - 2$. Enačbo uredimo $8\sqrt{x + 2} = x + 14$. Dobljeno enačbo kvadriramo in uredimo $x^2 - 36x + 68 = 0$. Rešimo kvadratno enačbo, ki ima rešitvi $x_1 = 34$ in $x_2 = 2$. Naredimo preiskus in ugotovimo, da rešitvi ne ustrezata dani enačbi.

Kvadriranje enačbe $4(x + 2) - 8\sqrt{x + 2} + 4 = 3x - 2$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $8\sqrt{x + 2} = x + 14$ .... 1 točka
Kvadriranje in ureditev enačbe $x^2 - 36x + 68 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $x_1 = 34$ in $x_2 = 2$ .... $1 + 1$ točka
Ugotovitev, da ni ustrezne rešitve .... 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	E	D	B	A	C

A1. Neenačbo uredimo $x^2 - 2x < 0$. Rešimo enačbo $x^2 - 2x = 0$. Rešitvi sta $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Vse rešitve neeneačbe ležijo na intervalu $(0, 2)$.

A3. 35% od $360^\circ = 126^\circ$.

A4. Ugotovimo, da velja $O = m + 1, R = 2m$ in $P = m + 1$. Tako je $O + P - R = 2$.

A5. Če število $0{,}125$ zapišemo v obliki 2^{-3}, dobimo enačbo $2^{x^2-3x-1} = 2^{-3}$. Enačimo eksponenta $x^2 - 3x - 1 = -3$ in dobljeno enačbo uredimo: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Rešitvi sta $x_1 = 1, x_2 = 2$.

A6. Upoštevamo definicijo logaritma. Tako je $\log_2(\log_2 x) = 1$ in $\log_2 x = 2$ ter $x = 4$.

II. DEL

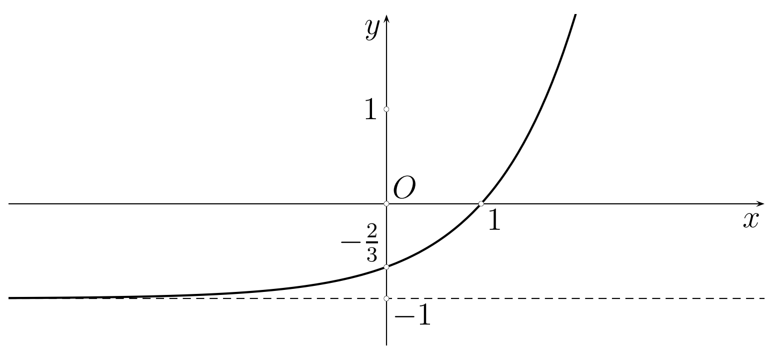
B1. Zapišemo enačbo $12(x + \frac{x}{100} \cdot x) = 1287$. Enačbo preuredimo v $x^2 + 100x - 10725 = 0$. Uporabimo obrazec za reševanje kvadratnih enačb. Dobimo rešitvi $x_1 = -165, x_2 = 65$. Ovržemo negativno rešitev. Cena grafičnega računala je 65 evrov.

Zapis enačbe $12(x + \frac{x}{100} \cdot x) = 1287$ .... $1 + 1$ točki
Zapis enačbe $x^2 + 100x - 10725 = 0$ .... 1 točka
Uporaba obrazca $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 230}{2}$ .... 1 točka
Izračun $x_1 = -165, x_2 = 65$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B2. Ugotovimo, da sta prostornini kocke in kvadra enaki. Upoštevamo to enakost in zapišemo $V = abc = 6t \cdot 3t \cdot 2t = 288$. Izračunamo vrednost parametra $t = 2$ in nato še dolžine stranic kvadra 12 cm, 6 cm in 4 cm. Izračunamo še površino kvadra $P = 288$ cm^2.

Ugotovitev, da sta prostornini kocke in kvadra enaki .... 1 točka
Uporaba $V = abc = 6t \cdot 3t \cdot 2t = 288$ .... 1 točka
Izračun vrednosti parametra $t = 2$ .... 1 točka
Izračun dolžin stranic 12 cm, 6 cm in 4 cm .... 1 točka
Uporaba obrazce za površino kvadra .... 1 točka
Izračun $P = 288$ cm^2 .... 1 točka

B3.



a) Funkcija ima ničlo pri $y = 0$, zato funkcijo enačimo z 0. Dobimo eksponentno enačbo $(\frac{1}{3})^{1-x} - 1 = 0$. Rešimo eksponentno enačbo. Dobimo rešitev $x = 1$. Funkcija ima torej eno ničlo.

b) Izračunamo $f(0)$, s čemer dobimo presečišče grafa z ordinatno osjo $P_y(0, -\frac{2}{3})$.

c) Uporabimo ugotovitvi $P_x(1, 0)$ in $P_y(0, -\frac{2}{3})$. Upoštevamo vodoravno asimptoto $y = -1$ in narišemo graf.

Zapis enačbe $(\frac{1}{3})^{1-x} - 1 = 0$ .... 1 točka
Izračun ničle $x = 1$ .... 1 točka
Izračun $f(0) = -\frac{2}{3}$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P_y(0, -\frac{2}{3})$ .... 1 točka
Narisan graf z asimptoto .... 2 točki

B4. Rešimo sistem dveh linearnih enačb in dobimo $x = -2, y = -1$, kar sta koordinati temena. Uporabimo temensko obliko zapisa kvadratne funkcije $y = a(x-p)^2 + q$. Vstavimo podatke in izračunamo vodilni koeficient $a = -\frac{1}{2}$. Zapišemo enačbo kvadratne funkcije v temenski obliki $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$.

Reševanje sistema .... 1^* točka
Rešitvi $x = -2, y = -1$ .... 1^* točka
Uporaba temenske oblike kvadratne funkcije $y = a(x-p)^2 + q$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki $-3 = a(0+2)^2 - 1$ .... 1 točka
Izračunan $a = -\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapisana kvadratna funkcija $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$ .... 1 točka

Četrti letnik

I. DEL

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	C	E	E	D	E

A1. Uporabimo zvezo $\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta}$. Tako izračunamo, da je $\tan\beta = 0,\bar{90}$ in ugotovimo, da je $\tan\alpha > \tan\beta$. Ker je funkcija tangens naraščajoča, je tudi kot α večji od kotaβ.

A2. Skiciramo graf funkcije $f(x) = x^2 + 3$ in iz grafa odčitamo zalogo vrednosti $Z_f = [3, \infty)$, kar ne ustreza zapisu $Z_f = \mathcal{R}$.

A3. Dan zapis funkcije ne predstavlja linearne funkcije, ker vsebuje člen 2^{-x}. Trditvi A in B nista pravilni. Tudi C ni pravilna, ker 2^{-x} ne predstavlja polinoma, ampak eksponentno funkcijo.Trditev D odpade, ker predpis ne vsebuje logaritemske funkcije. Tako je pravilen odgovor E.

A4. V enačbo premice vstavimo $x = 2$ in dobimo $1 - 2y = -1$ in iz tega $y = 1$. Upoštevamo, da je točka (2,1) presečišče dane premice in polinoma, zato vstavimo $x = 2$ in $y = 1$ v zapis polinoma. Dobimo enačbo $1 = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + a_0$. Iz te enačbe izračunamo $a_0 = 9$.

A5. Će vstavimo $n = 1$ v posamezne zapise, dobimo po vrsti $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_1 = 1$, $a_1 = \frac{4}{5}$ in $a_1 = \frac{1}{2}$. Pravilen je odgovor **D**, saj se vrednosti ujemajo tudi za $n = 2$, $n = 3$ in $n = 4$.

A6. Prvi člen vsote je 2 in zadnji člen je 99998. Zaporedje je aritmetično z diferenco 2.Vseh členov zaporedja je 49999. Uporabimo obrazec za vsoto prvih členov aritmetičnega zaporedja in dobimo vsoto 2499950000.

II. DEL

B1. $\tan\alpha$ in $\sin 2\alpha$ zapišemo s kotnima funkcijama $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$. Prvi ulomek krajšamo. Poiščemo skupni imenovalec $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$. V števcu izpostavimo $2\sin\alpha$, izraz $1 - \sin^2\alpha$ nadomestimo s $\cos^2\alpha$ in ulomek okrajšamo. Dobimo $\sin 2\alpha$.

Uporabljena zveza $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .... 1 točka
Uporabljena zveza $\sin^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ .... 1 točka
Odšteta ulomka $\frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ .... 1 točka
Izpostavljen skupni faktor $2\sin\alpha$ .... 1 točka
Uporabljena zveza $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ .... 1 točka
Okrajšani ulomek in rezultat $\sin 2\alpha$ ali $2\sin\alpha\cos\alpha$ .... 1 točka

B2. 1. način: V shemi Hornerjevega algoritma zapišemo koeficiente polinoma p. Nato zaporedoma izvedemo deljenji polinoma p z linearnima polinomoma $x + 2$ in $x - 1$. Dobljena ostanka enačimo z 0. Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama in zapišemo rešitev.
2. način: Polinom p delimo s polinomom q in upoštevamo, da se deljenje izide, če je ostanek enak nič: $r(x) = (3a + b - 11)x + 16 - 2a = 0$. Zapišemo sistem $3a + b - 11 = 0$, $16 - 2a = 0$. Rešitev sistema je $a = 8$.
3. način: Polinom p zapišemo kot zmnožek polinomov $q(x)$ in $k(x)$, torej $p(x) = q(x) \cdot k(x)$, pri tem je $k(x) = x^2 + cx + d$. Ob upoštevanju enakosti polinomov zapišemo enakost koeficientov (sistem enačb) $a = c + 1, 6 = c + d - 2, b = d - 2c, -2 = -2d$. Iz sistema enačb

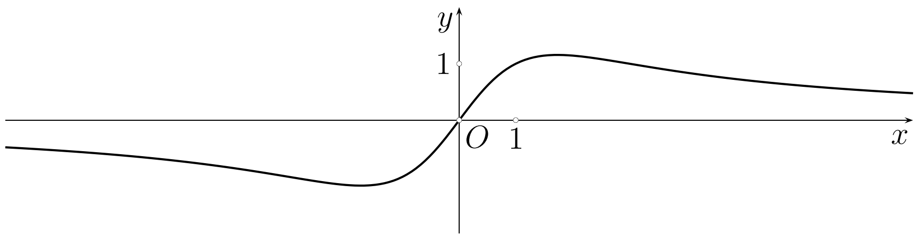
izračunamo vrednost parametra a.

1. način:
Zapis sheme z ustreznimi koeficienti polinoma .... 1 točka
Pravilno izvedeno prvo deljenje .... 1 točka
Pravilno izvedeno zaporedno deljenje .... 1^* točka
Enačitev ostankov z 0 oziroma zapis sistema
$a + b + 5 =$
$3a + b - 11 = 0$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1^* točka
Rešitev $a = 8$ .... 1 točka

2. način:
Zapis deljenja $(x^4 + ax^3 + 6x^2 + bx - 2) : (x^2 + x - 2)$ .... 1 točka
Izveden postopek deljenja .... 1^* točka
Zapis pogoja $r(x) = (3a + b - 11)x + 16 - 2a = 0$ .... 1 točka
Zapis sistema enačb
$3a + b - 11 = 0$
$16 - 2a = 0$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1^* točka
Rešitev $a = 8$ .... 1 točka

3. način:
Zapis ali upoštevanje $p(x) = q(x) \cdot k(x)$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $k(x) = x^2 + cx + d$ .... 1 točka
Izračun produkta in ureditev $(x^2+x-2)(x^2+cx+d) = x^4+(c+1)x^3+(c+d-2)x^2+(d-2c)x-2d$
.... 1 točka
Zapis enakosti koeficientov $a = c + 1$
$6 = c + d - 2$
$b = d - 2c$
$-2 = -2d$ .... 1^* točka
Reševanje sistema .... 1^* točka
Rešitev $a = 8$ .... 1 točka

B3. **a)** Graf odvisnosti $c(t)$ narišemo v koordinatem sistemu z abcisno osjo t (čas v urah) in ordinatno osjo c (koncentracija v mg/liter). Zapišemo značilnosti grafa funkcije $c(t)$: ničlo, vodoravno asimptoto, obnašanje $c(t)$ daleč od koordinatnega izhodišča in po potrebi tabeliramo. Narišemo približen graf.



b) Z reševanjem neenačbe $\frac{4t}{t^2+3} > 0,2$ dobimo rešitev drugega dela naloge. Upoštevamo, da koncentracija zdravila v času t_1 narašča, po času t_2 pa pade na predpisano vrednost $0,2$ mg/liter.

Ugotovljena ničla funkcije in vodoravna asimptota $t = 0, c = 0$ .... 1 točka
Ugotovljeno obnašanje funkcije daleč od koordinatnega izhodišča in približno(točen) maksimum, lahko s pomočjo tabeliranja .... 1 točka
Zapis pogoja neenačbe $\frac{4t}{t^2+3} < \frac{2}{10}$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $t^2 - 20t + 3 = 0$, $t_1 \doteq 0,15$, in $t_2 \doteq 19,8$ .... $1 + 1$ točka
Odgovor: Koncentracija zdravila pade pod 0.2mg/liter po približno $19,8$ ure ...... 1 točka

B4. Gre za aritmetično zaporedje z znanim prvim členom $a_1 = 1000000$ in vsoto prvih desetih členov $S_{10} = 19900000$. Iz obrazca za $S_{10} = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$ izračunamo diferenco zaporedja $d = 220000$. Dobiček v letu 1995 je peti člen tega zaporedja, $a_5 = a_1 + 4d = 1880000$.

Zapis prvega člena in vsote $a_1 = 1000000$, $S_{10} = 19900000$ .... 1 točka
Uporaba formule za vsoto in vstavljeni podatki $19900000 = 5(2000000 + 9d)$ .... 1 točka
Izračunana diferenca $d = 220000$ .... 1 točka
Uporaba formule za peti člen zaporedja $a_5 = a_1 + 4d$ .... 1 točka
Izračun petega člena $a_5 = 1880000$ .... 1 točka
Odgovor: Dobiček v letu 1995 je bil 1880000 evrov .... 1 točka