Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

4. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

31. marec 2004

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Vrednost produkta $\left(\frac{4}{7}\right)^7 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^5$ je:

(**A**) $\frac{14}{8}$ (**B**) $\frac{16}{49}$ (**C**) $\frac{49}{16}$ (**D**) 1 (**E**) $\frac{8}{14}$

A2. Katero izmed navedenih števil je treba prišteti številu 888777666555, da bo vsota deljiva s 6?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A3. Vrednost izraza $5\frac{7}{8} - 3\frac{2}{5} + 3\frac{11}{25} : 8\frac{6}{10} - 3\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-1}$ je:

(**A**) $\frac{15}{8}$ (**B**) $2\frac{1}{8}$ (**C**) $-1,2$
(**D**) $\frac{13}{4}$ (**E**) nič od navedenega

A4. V Singapuru je $\frac{3}{4}$ Kitajcev, $\frac{1}{6}$ Malajcev in $\frac{1}{20}$ Indijcev, prebivalcev ostalih ras pa je 85000. Koliko milijonov prebivalcev ima Singapur?

(**A**) 1,6 (**B**) 2,55 (**C**) 4,2
(**D**) 6 (**E**) nič od navedenega

A5. Naj bo $3a + 6 = b$ in $3b = 9c$. Potem je $c - a$:

(**A**) -2 (**B**) $\frac{1}{12}$ (**C**) 1 (**D**) 2 (**E**) 3

A6. Točka $A(1 - \sqrt{2}, \pi - 3)$ leži:

(**A**) v I. kvadrantu (**B**) v II. kvadrantu (**C**) v III. kvadrantu
(**D**) v IV. kvadrantu (**E**) na abscisni osi

II. DEL

B1. Za katere vrednosti realnega števila a ima izraz $(a-0,\bar{3})(-3)+(-4a)$ vrednost vsaj -6? Rešitev predstavite tudi grafično.

B2. Pri nakupu blaga za več kot 10000 SIT trgovina nudi 15 % popusta. Koliko tolarjev prihrani gospa Mezgec, ki kupi tri majice po 2150 SIT, štiri pare nogavic po 680 SIT, pulover za 8980 SIT in ruto za 2450 SIT? Koliko znaša račun? Zapišite odgovora.

B3. Krona sirakuškega kralja Hieronima je bila narejena iz zlata in srebra. Njena teža je bila na zraku 10 kp, pod vodo pa $9\frac{3}{8}$ kp. Zlato izgubi pod vodo $\frac{1}{19}$ svoje teže, srebro pa $\frac{1}{10}$ svoje teže. Koliko bi bilo težko zlato in koliko srebro v kroni, če bi tehtali na zraku? Zapišite odgovor.

B4. Dane so točke $A(4,y)$, $B(-2,-3)$ in $C(-3,4)$. Določite neznano koordinato y točke A tako, da bo ploščina trikotnika ABC enaka 25.

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Premica, dana z enačbo $4x + 7y - 3 = 0$,

(**A**) je naraščajoča
(**B**) je padajoča
(**C**) seka abscisno os pri $x = 1$
(**D**) seka ordinatno os pri $y = -1$
(**E**) je vzporedna ordinatni osi

A2. Premica $ax + 2y - c = 0$ je vzporedna osi x, če je vrednost parametra a:

(**A**) -2 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) negativna (**E**) pozitivna

A3. Dolžine stranic trikotnika so $a = 5$, $b = 3$ in $c = 4$. Kot α meri:

(**A**) $60°$ (**B**) $89°$ (**C**) $91°$
(**D**) $180°$ (**E**) nič od navedenega

A4. Iztegnjeni kot razpolovimo, polovico razdelimo na tretjine, tretjino na petine, petino na šestine. Šestina petine tretjine polovice iztegnjenega kota meri:

(**A**) $1°$ (**B**) $2°$ (**C**) $30°$ (**D**) $1'$ (**E**) $30'$

A5. Rešitev enačbe $\sqrt[3]{x} + \sqrt{16} = \sqrt[3]{8}$ je:

(**A**) $x = -8$ (**B**) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**C**) $x = 2$
(**D**) $x = 8$ (**E**) nič od navedenega

A6. Če izraz $\dfrac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}b^{-1}} : a^{-1}b$ poenostavimo, dobimo:

(**A**) 0 (**B**) ab^{-1} (**C**) $a^{-1}b^{-1}$ (**D**) $a^{-1}b$ (**E**) ab

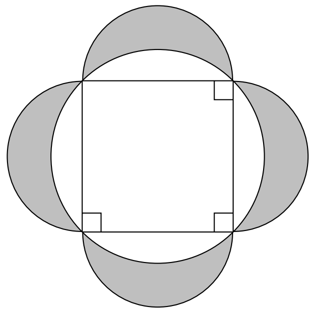
II. DEL

B1. Natančno izračunajte razdaljo med točko $A(-1,-6)$ ter presečiščem premic $2x+4y-2=0$ in $x+3y+1=0$. Rezultat delno korenite.

B2. Točke A, B, C in D, ki razdelijo krožnico v razmerju $3:5:7:3$, določajo tetivni štirikotnik. Narišite skico in izračunajte notranje kote nastalega štirikotnika.

B3. Rešite iracionalno enačbo:

$$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}}=2.$$



B4. Kvadratu, ki ima stranico dolgo $\sqrt{2}$ cm, očrtamo krožnico. Nad vsako stranico kvadrata narišemo polkrožnico, ki leži izven kvadrata. Kolikšna je vsota ploščin likov, ki jih omejujejo narisane polkrožnice in očrtana krožnica?

4. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

31. marec 2004

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da <u>na tem</u> listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Dvomestno število ima x desetic in y enic. Števki zadoščata pogoju $3^x - 3^y = 6$. Katero število je to?

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 21
(**D**) 30 (**E**) Nobeno izmed navedenih.

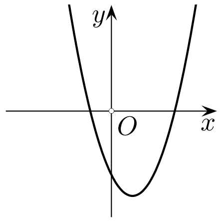
A2. Enačba $\log(m^2 - 3m) = 1$ ima rešitvi:

(**A**) 0 in 3 (**B**) 5 in -2 (**C**) -5 in 2
(**D**) $\pm\frac{1}{2}$ (**E**) Enačba ni rešljiva.

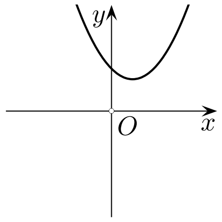
A3. Dana je funkcija $f(x) = -x^2 + 7x - 12$. Katera izmed naslednjih trditev je pravilna?

(**A**) Funkcija $f(x)$ ima samo eno realno ničlo.
(**B**) Graf funkcije $f(x)$ je parabola, njena os simetrije je vzporedna z ordinatno osjo.
(**C**) Produkt obeh ničel funkcije $f(x)$ je 7.
(**D**) Vsota obeh ničel funkcije $f(x)$ je 12.
(**E**) Graf funkcije $f(x)$ ima vodoravno asimptoto.

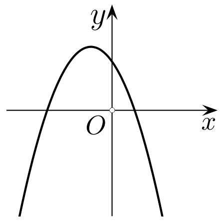
A4. Na kateri sliki je graf kvadratne funkcije, katere vodilni koeficient je pozitiven, prosti člen pa negativen?



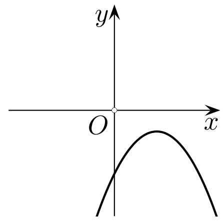
(**A**)



(**B**)



(**C**)



(**D**)

(**E**) Na nobeni izmed narisanih.

A5. Dolžino kvadra povečamo za 25 %, širino za tretjino, višino pa zmanjšamo za 10 %. Za koliko odstotkov se poveča prostornina tega kvadra?

(**A**) 10 (**B**) 25 (**C**) 48 (**D**) 50 (**E**) 150

A6. Najmanj kolikšen mora biti premer debla, ki ima obliko valja, da iz njega lahko izdelamo tram, katerega presek je kvadrat s ploščino 162 cm^2?

(**A**) 9 cm (**B**) $8\sqrt{2}$ cm (**C**) 1,8 dm (**D**) 9 dm (**E**) 4,5 m

II. DEL

B1. Na delovni akciji je bilo potrebno prepeljati 350 vozičkov materiala. Če bi vsak delavec prepeljal tri vozičke več, bi bilo potrebnih 15 delavcev manj. Koliko je bilo delavcev in koliko vozičkov je vsak prepeljal? Zapišite odgovor.

B2. Grafično rešite enačbo $2^{x+1} = -x^2 + 2$.

B3. Hlebec sira v obliki valja z višino 10 cm in premerom 30 cm, razrežemo na 8 enakih kosov tako, kot režemo torto. Vsak kos posebej zavijemo v folijo. Za vsak kos porabimo 20 % več folije, kot je površina kosa sira. Koliko dm^2 folije bomo porabili za zavijanje sira? Rezultat zaokrožite na stotinko natančno. Zapišite odgovor.

B4. Rešite enačbo: $\log(4 + 2^{x+2}) = \log 4 + \log(5 \cdot 2^{4-x} - 1)$.

4. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

31. marec 2004

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da <u>na tem</u> listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Dana je funkcija $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. Vrednost produkta $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ je enaka:

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) $\dfrac{\pi}{3}$ (**E**) 2

A2. Naj bosta α in β ostra kota v pravokotnem trikotniku, ki ni enakokrak. Potem je $\sin(\alpha+\beta)$ enako:

(**A**) $-\cos 2\alpha$ (**B**) $2\cos^2\alpha$ (**C**) $2\sin^2\beta$
(**D**) $\sin^2\alpha+\cos^2\beta$ (**E**) 1

A3. Količnik geometrijskega zaporedja $\sqrt{2}+1$, $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$, $3\sqrt{2}+3$ je:

(**A**) $-\sqrt{3}$ (**B**) 1 (**C**) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (**D**) $\sqrt{3}$ (**E**) 3

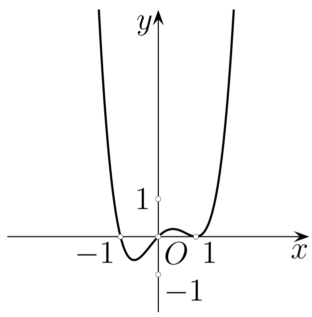
A4. Katera izmed trditev ne velja za zaporedje $1,\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16},\ -\dfrac{1}{64},\ \ldots,\ \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$?

(**A**) Zaporedje je omejeno. (**B**) Zaporedje je padajoče.
(**C**) Zaporedje je geometrijsko. (**D**) Zaporedje je navzdol omejeno.
(**E**) Vse navedene trditve veljajo.

A5. Katera izmed trditev ne velja za funkcijo $f(x)=x-4x^{-1}$?

(**A**) Funkcija $f(x)$ je liha. (**B**) Funkcija $f(x)$ je soda.
(**C**) Funkcija $f(x)$ je navzgor omejena. (**D**) Funkcija $f(x)$ ima ničlo $x=4$.
(**E**) Vse navedene trditve veljajo.

A6. Na sliki je graf polinoma $p(x)$. Rešitev neenačbe $p(x) \leq 0$ je:



(**A**) $x \in (-1, 0)$

(**B**) $x \in [-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [0, \infty]$

(**C**) $x \in (-1, 0) \cup \{1\}$

(**D**) $x \in [-1, 0]$

(**E**) nič od navedenega

II. DEL

B1. Izračunajte $531 + 535 + 539 + 543 + \cdots + 983 + 987$.

B2. Določite koeficient a tako, da bosta premici, dani z enačbama $2x + ay + 3 = 0$ in $3x - 2y - 2 = 0$, oklepali kot $45°$.

B3. Naj bo $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3$ in $q(x) = x + 1$.

a) Izračunajte $3p(-2) + 2q(3)$.

b) Zapišite vodilni člen polinoma $2\left(p(x)\right)^2$.

c) Izračunajte $p(x) \cdot \left(q(x)\right)^2$.

d) Delite $p(x)$ s $q(x)$.

B4. Narišite graf funkcije $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ in pokažite, da velja $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ za $x \neq \pm 1$.

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	B	C	A	B	D	B

A2. Dano število je deljivo s 3. Da bo vsota deljiva s 6, mora biti deljiva z 2 in s 3, zato moramo prišteti 3.

A4. Nastavimo enačbo $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{20}x + 85000 = x$. Rešitev enačbe je 2550000 ali 2,55 milijona.

A5. Enakost $b = 3a + 6$ uporabimo v drugi enakosti. Tako dobimo $3a + 6 = 3c$, iz te zveze pa izrazimo $c - a = 2$.

II. DEL

B1. Po besedilu naloge zapišemo neenakost: $(a-0,\bar{3})(-3)+(-4a) \geq -6$. Periodično decimalno število $0,\bar{3}$ zamenjamo z ulomkom $\frac{1}{3}$. Nato odpravimo oklepaje: $-3a + 1 - 4a \geq -6$ in neenačbo uredimo $-7a \geq -7$. Delimo z -7 in dobimo rešitev $a \leq 1$.

Zapis neenačbe: $(a - 0,\bar{3})(-3) + (-4a) \geq -6$ .... 1 točka
Zapis periodičnega števila z ulomkom $0,\bar{3} = \dfrac{1}{3}$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe do oblike $-7a \geq -7$ .... 1 točka
Rešitev $a \leq 1$ .... 1 točka
Grafična predstavitev .... 2 točki

B2. Artikli, ki jih je kupila gospa Mezgec, stanejo skupaj 20600 SIT. Ker je to več kot 10000 SIT, izračunamo 15 % popusta, kar je 3090 SIT. Gospa Mezgec je torej prihranila 3090 SIT, saj je plačala le 17510 SIT.

Nastavitev računa in izračun: $3 \cdot 2150 + 4 \cdot 680 + 8980 + 2450 = 20600$ .... $1+1$ točka
Zapis: $0,15 \cdot 20600 = 3090$ SIT .... 1 točka
Izračun $0,85 \cdot 20600 = 17510$ SIT .... $1+1$ točka
Odgovor .... 1 točka

B3. Denimo, da je bilo na zraku zlato težko x kp, srebro pa y kp. Tedaj velja: $x+y=10$ in $x - \frac{1}{19}x + y - \frac{1}{10}y = 9\frac{3}{8}$. Rešitvi sistema sta $x = 7\frac{11}{12}$ kp in $y = 2\frac{1}{12}$ kp. Če bi tehtali na zraku, bi bilo zlato težko $7\frac{11}{12}$ kp, srebro pa $2\frac{1}{12}$ kp.

Vpeljava neznank: x - teža zlata, y - teža srebra .... 1 točka
Zapis enačbe: $x+y=10$ .... 1 točka
Zapis enačbe: $x - \frac{1}{19}x + y - \frac{1}{10}y = 9\frac{3}{8}$ oziroma $\frac{18}{19}x + \frac{9}{10}y = 9\frac{3}{8}$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Rešitvi $x = 7\frac{11}{12}$ kp, $y = 2\frac{1}{12}$ kp .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B4. Ploščina trikotnika je $\pm\frac{1}{2}\Big((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\Big)$, kjer predznak izberemo glede na orientacijo trikotnika. V našem primeru je $\pm\frac{1}{2}\Big((-6)(4-y)-(-7)(-3-y)\Big) = 25$, od koder dobimo rešitvi $y_1 = 5$ in $y_2 = -95$.

Pravilno vstavljeni podatki v obrazec .... 1 točka
Pravilno zapisana in reševana enačba npr: $-24+6y-21-7y = \pm 50$ .... 2 točki
Zapis: $y = \mp 50 - 45$ .... 1 točka
Dobljeni reštvi: $y_1 = 5$ in $y_2 = -95$ .... $1+1$ točka
OPOMBA: Če je upoštevana samo ena orientacija (pozitivna ali negativna), se prizna 4 točke.

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	B	B	E	A	A	E

A1. Iz eksplicitne oblike enačbe premice $y = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$ razberemo smerni koeficient $k = -\frac{4}{7}$. Funkcija je padajoča, ker je smerni koeficient negativen.

A2. Premica je vzporedna osi x, če je smerni koeficient enak nič. Tako mora biti $a = 0$.

A3. Uporabimo kosinusni izrek za izračun kota $\alpha : \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-25}{24} = 0$. Torej je kot α pravi. Pravilen odgovor je E.

A4. Polovica iztegnjenega kota je $90°$, tretjina tega je $30°$, petina dobljenega je $6°$ in šestina slednjega je $1°$.

A5. Enačbo poenostavimo: $\sqrt[3]{x} + 4 = 2$, pa še uredimo $\sqrt[3]{x} = -2$. Nazadnje še kubiramo in dobimo rešitev $x = -8$.

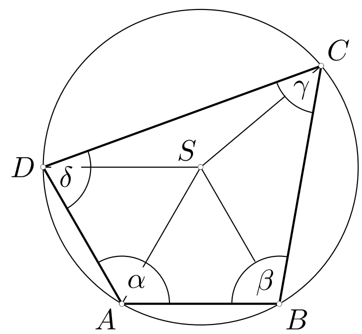
A6. Ulomek v izrazu okrajšamo in dobimo: $1 : \frac{1}{a} \cdot b$, kar je enako ab.

II. DEL

B1. Najprej poiščemo presečišče premic tako, da rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama: $2x+4y-2=0$ in $x+3y+1=0$. Le-ta ima rešitev $x=5,\ y=-2$, torej je presečišče $P(5,-2)$. Z uporabo obrazca za razdaljo med točkama izračunamo $d(P,A)=2\sqrt{13}$.

Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Rešitev sistema $x=5,\ y=-2$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P(5,-2)$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za razdaljo: $d(A,P)=\sqrt{(-1-5)^2+(-6+2)^2}$ .... 1 točka
Izračun $d(A,P)=\sqrt{52}$ .... 1 točka
Rezultat $2\sqrt{13}$ .... 1 točka

B2. Oglišča tetivnega štirikotnika $ABCD$ razdelijo krožnico v razmerju $3:5:7:3$. Daljice, ki povezujejo središče krožnice s temi točkami, razdelijo polni kot v enakem razmerju. Tako je $\angle ASB=60°$, $\angle BSC=100°$, $\angle CSD=140°$ in $\angle DSA=60°$. Sedaj lahko hitro poiščemo velikosti notranjih kotov štirikotnika, saj sta trikotnika ABS in DAS enakostranična, trikotnika BCS in CDS pa enakokraka s kotoma $40°$ oziroma $20°$ ob osnovnici. Notranji koti so torej $120°$, $100°$, $60°$ in $80°$.



Rešujemo lahko drugače: iz danega razmerja sklepamo, da so posamezni krožni loki dolgi $3t$, $5t$, $7t$ in $3t$. Obodni koti pri A, B, C in D pripadajo lokom $5t+7t=12t$, $7t+3t=10t$, $3t+3t=6t$ oziroma $3t+5t=8t$, zato so njihove velikosti v razmerju $12:10:6:8$ oziroma $6:5:3:4$. Ker je vsota notranjih kotov štirikotnika enaka $360°$, je $6v+5v+3v+4v=360°$, od tod pa dobimo $v=20°$ in končno še notranje kote: $120°$, $100°$, $60°$ in $80°$.

Ustrezna skica .... 2 točki
Sklep: $\alpha=6x,\ \beta=5x, \gamma=3x,\ \delta=4x$ .... 1 točka
Sklep: $6x+5x+3x+4x=360°$ .... 1 točka
Rezultat $x=20°$ .... 1 točka
Izračunane velikosti kotov: $120°$, $100°$, $60°$, $80°$ .... 1 točka

B3. Zaporedoma kvadriramo in urejujemo: $2+\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}=4$, $\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}=2$, $1+\sqrt{3x+2}=4$, $\sqrt{3x+2}=3$, $3x+2=9$. Rešitev je $x=\dfrac{7}{3}$. Končno preverimo, da ta x res zadošča enačbi.

Pravilno kvadriranje dane enačbe do oblike: $2+\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}=4$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}=2$ .... 1 točka
Pravilno kvadriranje zgornje enačbe do oblike $1+\sqrt{3x+2}=4$ .... 1 točka
Kvadriranje $\sqrt{3x+2}=3$ do oblike $3x+2=9$ .... 1 točka
Rešitev $x=\dfrac{7}{3}$ .... 1 točka
Opravljen preizkus .... 1 točka

B4. Polmer kvadratu očrtane krožnice je enak polovici dolžine diagonale: $R = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1$.

Polmer polkrožnice nad stranico kvadrata je $r = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vsoto ploščin likov, ki jih omejujejo narisane polkrožnice in očrtana krožnica, dobimo tako, da od vsote ploščin kvadrata in polkrogov nad njegovimi stranicami odštejemo ploščino kvadratu očrtanega kroga. Imamo torej $S = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 - \pi R^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} - \pi = 2\ \mathrm{cm}^2$.

Zapis polmera kvadratu očrtanega kroga $R = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$ cm .... 1 točka
Zapis ploščine tega kroga: $S_1 = \pi\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka
Zapis polmera polkroga nad stranico kvadrata: $r = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm .... 1 točka
Zapis ploščine polkrogov: $S_2 = 2\ \pi r^2 = \pi\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka
Zapis ploščine osenčenega lika: $S = a^2 + S_2 - S_1$ .... 1 točka
Izračun ploščine $S = a^2 = 2\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	C	B	B	A	D	C

A2. V enačbi nastopa logaritem z osnovo 10, zato lahko zapišemo $10 = m^2 - 3m$. Enačbo uredimo: $m^2 - 3m - 10 = 0$, razstavimo in dobimo rešitvi $m_1 = 5,\ m_2 = -2$.

A5. Nova dolžina je $1,25\ d$, nova širina je $1\frac{1}{3}\ š$ in nova višina je $0,9\ v$. Nova prostornina je tako enaka $V_1 = 1,25d \cdot 1\frac{1}{3}š \cdot 0,9v = 1,50 \cdot d \cdot š \cdot v$, kar pomeni, da se prostornina poveča za 50 %.

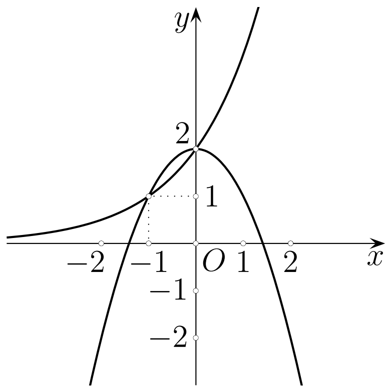
A6. Iz ploščine kvadrata izračunamo dolžino stranice $a = 9\sqrt{2}$ cm. Premer debla mora biti vsaj enak dolžini diagonale kvadratnega preseka trama. Tako je $r = d =$ 1,8 dm.

II. DEL

B1. Denimo, da je x število delavcev in y število vozičkov. Po besedilu naloge zapišemo enačbi: $x\cdot y = 350$ in $(y+3)\cdot(x-15) = 350$. Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama: iz prve lahko izrazimo $x = \frac{350}{y}$ in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo $(\frac{350}{y} - 15) \cdot (y + 3) = 350$, kar poenostavimo v $y^2+3y-70 = 0$. Kvadratno enačbo razstavimo $(y-7)(y+10) = 0$, od koder preberemo rešitvi $y = 7$ in $y = -10$, pri čemer druga rešitev ni smiselna. Ko izračunamo še $x = 50$, odgovorimo: sodelovalo je 50 delavcev in vsak je prepeljal 7 vozičkov.

Zapis enačb: $x \cdot y = 350$ in $(y + 3) \cdot (x - 15) = 350$ .... $1 + 1$ točka
Pretvorba na enačbo z eno neznanko: $(\frac{350}{y} - 15) \cdot (y + 3) = 350$ .... 1 točka
Poenostavitev do oblike: $y^2 + 3y - 70 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi $y = 7,\ y = -10$ (druga ni smiselna) .... 1 točka
Odgovor: Sodelovalo je 50 delavcev in vsak je prepeljal 7 vozičkov. .... 1 točka

B2. Graf eksponentne funkcije poteka skozi točki $(0, 2)$ in $(-1, 1)$. Graf kvadratne funkcije ima teme v točki $(0, 2)$ in ničli $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$, gre pa tudi skozi točko $(-1, 1)$. Iz narisanih grafov odčitamo rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$.



Narisan graf eksponentne funkcije .... 2 točki
Narisan graf kvadratne funkcije .... 2 točki
Odčitani rešitvi: $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$ .... $1 + 1$ točka

B3. Površina enega kosa sira je enaka $P_1 = \frac{1}{8} \cdot 2\pi r^2 + \frac{1}{8} \cdot 2\pi r + 2 \cdot r \cdot v = 594{,}375\ \mathrm{cm}^2$. Osem kosov sira ima osemkrat večjo površino $P = (\frac{1}{8} \cdot 2\pi r^2 + \frac{1}{8} \cdot 2\pi r + 2 \cdot r \cdot v) \cdot 8 = 47{,}55\ \mathrm{dm}^2$. Upoštevamo še dodatnih 20 %, ki jih porabimo za folijo: $8 \cdot 1{,}2 \cdot P_1 = 57,06\ \mathrm{dm}^2$. Za zavijanje sira bomo porabili $57,06\ \mathrm{dm}^2$ folije.

Površina enega kosa sira je: $P = \frac{1}{8} \cdot 2\pi r^2 + \frac{1}{8} \cdot 2\pi r + 2 \cdot r \cdot v$ .... $1 + 1 + 1$ točka
Upoštevanje 20 %: $8 \cdot 1,2P_1$ ali $1,2P$ .... 1 točka
Rezultat $57,06\ \mathrm{dm}^2$ .... 1 točka
Odgovor: Za 8 kosov potrebujemo $57,06\ \mathrm{dm}^2$ folije. .... 1 točka
ALI
Za en kos potrebujemo: $P = \dfrac{\pi r^2}{4} + 2rv + \dfrac{\pi r v}{4}$ .... $1 + 1 + 1$ točka
$P = 594,38\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka
Upoštevanje 20 % .... 1 točka
Odgovor: Za 8 kosov potrebujemo $57,06\ \mathrm{dm}^2$ folije. .... 1 točka

B4. Z antilogaritmiranjem dobimo $4 + 2^{x+2} = 4 \cdot (5 \cdot 2^{4-x} - 1)$. Ko odpravimo oklepaje, dobimo $4 + 2^{x+2} = 20 \cdot 2^{4-x} - 4$ oziroma $4 + 2^x \cdot 2^2 = \dfrac{20 \cdot 2^4}{2^x} - 4$, kar preoblikujemo v $2^x + (2^x)^2 = 5 \cdot 2^4 - 2^x$. Uvedemo novo neznanko $2^x = t$. Dobimo enačbo $t^2 + 2t - 80 = 0$, ki jo razstavimo na $(t + 10)(t - 8) = 0$. Rešitev $t = -10$ ni ustrezna, saj potenca s pozitivno osnovo ne more imeti negativne vrednosti. Rešitev $t = 8$ vstavimo v $2^x = t$ in dobimo $x = 3$. Rezultat preverimo.

Zapis enačbe: $4 + 2^{x+2} = 4 \cdot (5 \cdot 2^{4-x} - 1)$ .... 1 točka
Vpeljava nove neznanke $2^x = t$ .... 1 točka
Zapis enačbe $t^2 + 2t - 80 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi: $t_1 = 8$ in $t_2 = -10$ (druga ni ustrezna) .... 1 točka
Rešitev $x = 3$ .... 1 točka
Opravljen preizkus .... 1 točka

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	C	E	D	B	A	E

A1. Izračunamo vrednost produkta $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{(\sin\frac{\pi}{3})^2}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{1-(\frac{1}{2})^2} = 1.$

A2. Upoštevamo $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, pa je $\sin(\alpha+\beta) = 1$.

A3. Izračunajmo količnik $q = \frac{3}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{3}{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{6})} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

II. DEL

B1. Izračunati je treba vsoto členov aritmetičnega zaporedja z diferenco 4. Prvi člen je 531, zadnji (n-ti) pa 987. Iz enačbe za splošni člen aritmetičnega zaporedja izračunamo $n = 115$. Uporabimo obrazec za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja in dobimo vsoto 87285.

Sklep: $d = 4$ .... 1 točka
Sklep: $a_1 = 531,\ a_n = 987$ .... 1 točka
Zapis enačbe: $987 = 531 + (n-1)\cdot 4$ .... 1 točka
Rezultat $n = 115$ .... 1 točka
Uporaba obrazca za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja .... 1 točka
Rezultat: $S_{115} = 87285$ .... 1 točka

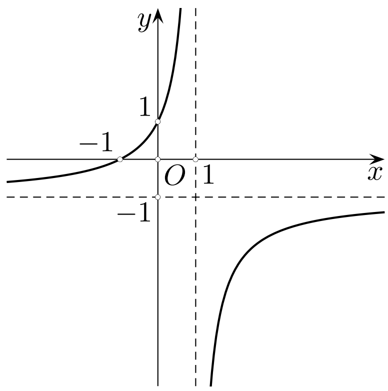
B2. Enačbi premic zapišemo v eksplicitni obliki: $y = -\frac{2x}{a} - \frac{3}{a}$ in $y = \frac{3x}{2} - 1$. Smerna koeficienta sta $k_1 = \frac{-2}{a}$ in $k_2 = \frac{3}{2}$. Uporabimo zvezo $\tan\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ in dobimo enačbo $\left|\frac{3a+4}{2a-6}\right| = 1$. Iz $\frac{3a+4}{2a-6} = 1$ in $\frac{3a+4}{2a-6} = -1$ dobimo $a_1 = -10$ oziroma $a_2 = \frac{2}{5}$.

Zapis koeficientov $k_1 = \frac{-2}{a},\ k_2 = \frac{3}{2}$ .... $1+1$ točka
Zapis ali uporaba $\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| = \tan\alpha$ .... 1 točka
Odprava absolutne vrednosti in zapis enačb: $\frac{3a+4}{2a-6} = 1,\ \frac{3a+4}{2a-6} = -1$ .... 1 točka
Rezultat: $a_1 = -10,\ a_2 = \frac{2}{5}$ .... $1+1$ točka

B3. Vrednost izraza $3p(-2) + 2q(3)$ izračunamo tako, da vstavimo izbrane vrednosti v $p(x)$ in $q(x)$. Dobimo -97. Vodilni člen polinoma $2(p(x))^2$ je $18x^6$. Produkt $p(x)\cdot q(x)$ je enak $3x^5 + 4x^4 - x^3 - 5x^2 - 6x - 3$. Po osnovnem izreku o deljenju zapišemo $p(x) = (3x^2 - 5x + 5)(x+1) - 8$.

Izračunana vrednost: $3p(-2)+2q(3)=-97$ .... 1 točka
Zapisan vodilni člen: $18x^6$ .... 1 točka
Pravilno izračunan produkt $3x^5+4x^4-x^3-5x^2-6x-3$ .... 2 točki
Pravilno opravljeno deljenje in rezultat $p(x)=(3x^2-5x+5)(x+1)-8$ .... 2 točki

B4. Ničla racionalne funkcije je $x=-1$, pol $x=1$, asimptota $y=-1$ in presečišče z ordinatno osjo $(0,1)$. S pomočjo teh ugotovitev lahko narišemo graf.



Hitro se prepričamo, da velja $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ za $x\neq\pm1$, saj je $f(-x)=\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}=\dfrac{1-x}{1+x}$ in $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1-x}{1+x}$.

Izračunana ničla $x=-1$ in pol $x=1$ .... 1 točka
Zapisana asimptota $y=-1$ .... 1 točka
Pravilno narisan graf (vsaka veja 1 točka) ...... $1+1$ točka
Preverjanje: $f(-x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ in $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1-x}{1+x}$ ... $1+1$ točka