**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

1. Če Živa podari sestrici Zarji pet jabolk manj, kot je polovica vseh, ki jih ima, in bratu Jakobu tretjino preostanka, ji ostane šest jabolk več, kot je sedmina vseh, ki jih je imela na začetku. Koliko jabolk dobi Jakob?
2. Poenostavi izraz $\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$.
3. Za katero število a je rešitev neenačbe $\frac{x}{4}-\frac{2(1-x)}{3}<a+\frac{3x}{2}$ vsak x z intervala $(-8,\infty)$?
4. Brez uporabe žepnega računala izračunaj vrednost izraza
$$(-5)\left(-\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{5}\right)^0\right)^{-3}+5^{-2}\cdot(2{,}4\overline{3}:10^{-1}+2\cdot 3^{-1}).$$
5. Konj in mula stopata drug poleg drugega s tovorom na hrbtu. Mula pravi: "Če bi preložila eno vrečo s tvojega na moj hrbet, bi moj tovor tehtal dvakrat toliko kot tvoje. Če pa bi z mojega na tvoj hrbet preložila eno vrečo, bi najina tovora tehtala enako." Koliko vreč je prenašal konj in koliko mula? Vse vreče tehtajo enako. Nalogo reši računsko.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

1. Za štirikotnik $ABCD$ velja: točka A ima koordinati $(-2,-3)$, točka B ima koordinati $(1,-5)$, točka C je zrcalna slika točke $E(-6,1)$ pri zrcaljenju preko koordinatnega izhodišča, abscisa točke D je rešitev enačbe $t^2-6t+9=0$, ordinata te točke pa je nasprotna vrednost polovične vsote ordinat točk A in B. Nariši skico in izračunaj dolžini diagonal štirikotnika $ABCD$.

2. Natančno izračunaj vrednost izraza $\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}$ za $x=2{,}\bar{7}$. Rezultat zapiši s koreni.

3. V paralelogramu $ABCD$ je notranji kot α ostri, stranica BC meri $4{,}5$ cm. Na stranici AB leži točka G tako, da velja $|AG|:|GB|=2:3$. Nosilka daljice CG seka nosilko daljice AD v točki P. Izračunaj dolžino daljice AP. Nariši skico.

4. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $A(1,3)$ in s koordinatnima osema tvori enakokraki trikotnik. Zapiši vse rešitve.

5. Tetiva kroga ima dolžino a in je od središča kroga oddaljena $\frac{a}{2}$. Izrazi polmer kroga z a in izračunaj velikost ostrega in topega obodnega kota nad tetivo. Nariši skico.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

1. Določi parameter m tako, da se bo graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + mx + 3$ dotikal premice $y = 2$. Poišči vse rešitve.

2. Dijaki so šli na ogled razstave in so morali za avtobusni prevoz plačati 120 EUR. Ker so trije dijaki zboleli, je moral vsak izmed preostalih dijakov za prevoz doplačati 2 EUR. Koliko dijakov se je prijavilo na ogled razstave?

3. Izračunaj na eno decimalno mesto natančno, koliko kubičnih metrov zraka je pod šotorom v obliki piramide, ki ga sestavljajo štiri šotorska krila v obliki enakokrakih trikotnikov z osnovnico dolžine 24 dm in krakom dolžine 21 dm. Osnovna ploskev te piramide je kvadrat. Nariši skico.

4. Pravokotni trapez ima osnovnici dolgi 10 cm in 2 cm ter ploščino 90 cm^2. Zavrtimo ga okrog daljše osnovnice. Natančno izračunaj površino in prostornino nastalega telesa.

5. Poišči celoštevilsko rešitev enačbe

$$\sqrt{3^x \sqrt[3]{9^x \sqrt[x]{27^{-1}}}} = 9 \cdot \sqrt[3]{3}.$$

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

9. tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških
in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

1. Poenostavi izraz $\dfrac{1-\cos^4 x}{\sin^4 x} - 2\tan^{-2} x$.

2. Polinom $p(x) = x + 3$ je skupni delitelj polinomov $r(x) = 2x^3 + 11x^2 + ax + b$ in $s(x) = x^3 - 14x^2 - 3ax$. Izračunaj a in b ter ničle polinoma r.

3. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}$. Zapiši interval na realni osi, na katerem leži graf funkcije $f(x)$ nad grafom funkcije $g(x) = 1$.

4. V brezzračnem prostoru pade vsako telo pri prostem padu v prvi sekundi približno $4{,}9$ m globoko, v vsaki naslednji sekundi pa $9{,}8$ m več kot v prejšnji.

   (a) Koliko metrov pade telo pri prostem padu v brezzračnem prostoru v 20. sekundi?

   (b) Koliko metrov pade to telo v 20 sekundah?

5. V podjetju je 22 delavcev, ki imajo vsi enako plačo. V tem podjetju sta zaposlena še dva svetovalca, ki imata medsebojno enaki plači. Povprečna plača je 775 evrov. Naslednji mesec bodo zaposlili še enega svetovalca, ki bo imel enako plačo kot že oba zaposlena svetovalca. Povprečna plača se bo tako povečala na 852 evrov. Izračunaj in zapiši plačo delavca in plačo svetovalca.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 18. april 2009

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Naj ima Živa n jabolk. Zarji podari $\frac{n}{2}-5$, Jakobu $\frac{n-(\frac{n}{2}-5)}{3}$. Ker ji ostane $\frac{n}{7}+6$, dobimo enačbo $n-(\frac{n}{2}-5)-\frac{n-(\frac{n}{2}-5)}{3}=\frac{n}{7}+6$. Rešitev enačbe je $n=14$. Jakob dobi 4 jabolka.

   Zapis števila jabolk, ki jih ima Zarja $\frac{n}{2}-5$ .... 1 točka
   Jakob ima $\frac{n-(\frac{n}{2}-5)}{3}$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $n-(\frac{n}{2}-5)-\frac{n-(\frac{n}{2}-5)}{3}=\frac{n}{7}+6$ .... 1 točka
   Reševanje enačbe .... 1 točka
   Rešitev $n=14$ .... 1 točka
   Odgovor: Jakob dobi 4 jabolka. .... 1 točka

2. Prvi ulomek kvadriramo $\frac{2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x}}{4}$, prav tako tudi drugi $\frac{2^{2x}-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x}}{4}$. Ulomka odštejemo in dobimo $\frac{4\cdot 2^x\cdot 2^{-x}}{4}=1$.

   I. način
   V izrazu nastopa razlika kvadratov, zato ga lahko razcepimo kot

$$\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}+\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}-\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right).$$

   V prvem oklepaju dobimo $\frac{2\cdot 2^x}{2}=2^x$, v drugem pa $\frac{2\cdot 2^{-x}}{2}=2^{-x}$. Vrednost izraza je zato $2^x\cdot 2^{-x}=1$.

Kvadriranje prvega oklepaja: $\frac{2^{2x}+2\cdot 2^{x}\cdot 2^{-x}+2^{-2x}}{4}$ .... 1 točka
Kvadriranje drugega oklepaja: $\frac{2^{2x}-2\cdot 2^{x}\cdot 2^{-x}+2^{-2x}}{4}$ .... 1 točka
Upoštevanje predznaka pred drugim ulomkom .... 1 točka
Odštevanje ulomkov $4\cdot 2^{x}\cdot 2^{-x}=4$ .... $1+1^{*}$ točka
Rezultat 1 .... 1 točka
II. način
Razstavljanje izrazov po pravilu vsote in razlike kvadratov za vsak faktor:
$\frac{2^{x}+2^{-x}}{2}+\frac{2^{x}-2^{-x}}{2}$ .... 1 točka
$\frac{2^{x}+2^{-x}}{2}-\frac{2^{x}-2^{-x}}{2}$ .... 1 točka
Seštevanje v vsakem oklepaju: $\frac{2\cdot 2^{x}}{2}=2^{x}$ .... 1 točka
$\frac{2\cdot 2^{-x}}{2}=2^{-x}$ .... 1 točka
Izračun $\frac{2\cdot 2^{x}}{2}\cdot\frac{2\cdot 2^{-x}}{2}=2^{x}\cdot 2^{-x}$ .... 1 točka
Rezultat 1 .... 1 točka

3. Neenačbo pomnožimo z 12 in dobimo $3x-8(1-x)<12a+18x$. Odpravimo oklepaj in uredimo $-7x<12a+18x$. Izrazimo $x>-\frac{12a+8}{7}$. Upoštevamo dani interval, torej $x>-8$. Primerjamo obe rešitvi in ugotovimo, da je $-\frac{12a+8}{7}=-8$. Iz te enakosti izračunamo $a=4$.

Odprava ulomka $3x-8(1-x)<12a+18x$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $-7x<12a+18x$ .... 1 točka
Izračun $x>-\frac{12a+8}{7}$ .... 1 točka
Upoštevanje danega intervala $x>-8, x\in\mathbb{R}$ .... 1 točka
Primerjava $-\frac{12a+8}{7}=-8$ .... 1 točka
Rešitev $a=4$ .... 1 točka

4. Upoštevamo, da je $(\frac{1}{2}+\frac{7}{5})^{0}=1$. Periodično decimalno število zapišemo z okrajšanim ulomkom $2,4\overline{3}=\frac{73}{30}$. Izračunamo $-5\cdot(-1)^{-3}=5$, zapišemo $5^{-2}=\frac{1}{25}$. Izračunamo $2,4\overline{3}:10^{-1}+2\cdot 3^{-1}=\frac{73}{30}\cdot 10+\frac{2}{3}=\frac{75}{3}$. Okrajšamo $\frac{1}{25}\cdot\frac{75}{3}=1$ in izračunamo vrednost izraza 6.

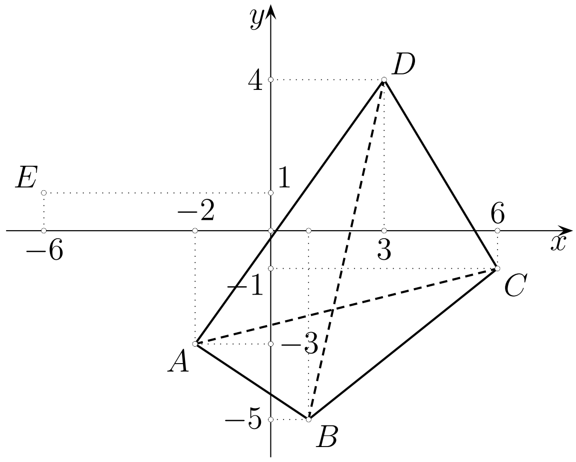
Upoštevanje $(\frac{1}{2}+\frac{7}{5})^{0}=1$ .... 1 točka
Zapis $2,4\overline{3}=\frac{73}{30}$ .... 1 točka
Izračun prvega produkta $-5\cdot(-1)^{-3}=5$ .... 1 točka
Upoštevanje $5^{-2}=\frac{1}{25}$ .... 1 točka
Izračun zadnjega oklepaja $\frac{73}{30}\cdot 10+\frac{2}{3}=\frac{75}{3}$ .... 1 točka
Rezultat .... 1 točka

5. Naj bo k število vreč konja in m število vreč mule. Če konj da muli eno vrečo, ima konj $k+1$ vreč, mula pa $m+1$ in velja $m+1=2(k-1)$. Če pa mula da konju eno vrečo, ima mula $m-1$ vreč in velja $m-1=k+1$. Rešimo nastali sistem enačb in dobimo rešitev $k=5$ in $m=7$. Konj je prenašal 5 vreč, mula pa 7.

Zapis zveze $m+1=2(k-1)$ .... 1 točka
Zapis zveze $m-1=k+1$ .... 1 točka
Postopek reševanja .... 1 točka
Rešitvi $k=5$ in in $m=7$ .... $1+1^{*}$ točka
Odgovor .... 1 točka

Drugi letnik

1. Prezrcalimo točko $E(-6,1)$ preko kordinatnega izhodišča in dobimo točko $C(6,-1)$. Rešimo enačbo $t^2-6t+9=0$ in izračunamo absciso točke D, ki je enaka 3. Ordinata točke D je $-\frac{(-3-5)}{2}=4$. Z uporabo formule za izračun razdalje med točkama izračunamo dolžini obeh diagonal in sicer $d(A,C)=\sqrt{82+22}=\sqrt{68}$ ter ?$d(B,D)=\sqrt{22+92}=\sqrt{85}$.

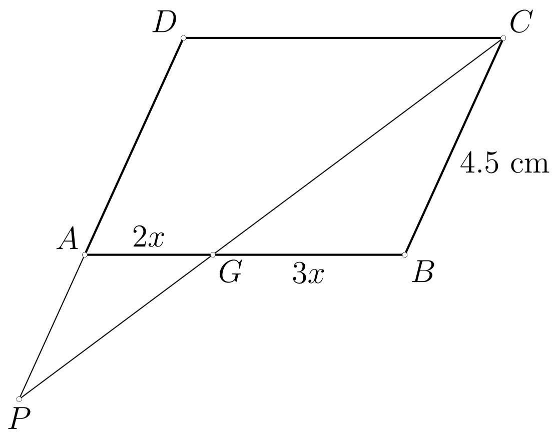


Skica .... 1 točka
Koordinati točke $C(6,-1)$ .... 1 točka
Abscisa točke D ($x_D=3$) .... 1 točka
Ordinata točke D ($y_D=4$) .... 1 točka
Izračun dolžine diagonale AC $d(A,C)=\sqrt{68}$ .... 1 točka
Izračun diagonale BD $d(B,D)=\sqrt{85}$ .... 1 točka

2. Število $2,\bar{7}$ zapišemo v obliki ulomka, ki ga vstavimo v izraz $\sqrt{\sqrt{\frac{25}{9}}+1}-\sqrt{\sqrt{\frac{25}{9}}-1}$. Poenostavimo $\sqrt{\frac{5}{3}+1}-\sqrt{\frac{5}{3}-1}=\sqrt{\frac{8}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$. Delno korenimo $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Dobimo $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ter nato še racionaliziramo. Rezultat je $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Zapis $2,\bar{7}=\frac{25}{9}$ .... 1 točka
Poenostavitev $\sqrt{\frac{8}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$ .... 1 točka
Delno korenjenje $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .... 1 točka
Izračun $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .... 1 točka
Racionalizacija .... 1 točka
Rezultat $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .... 1 točka

3. Narišemo ustrezno skico. Ugotovimo, da sta si trikotnika AGP in GBC podobna. Izrazimo dolžini $|AG|=2x$ ter $|GB|=3x$. Upoštevamo, da je kvocient istoležnih stranic konstanten: $|AG|:|GB|=|AP|:|BC|$, izrazimo in izračunamo $|AP|=\frac{|BC|\cdot|AG|}{|GB|}=\frac{4{,}5\cdot 2x}{3x}=3$.

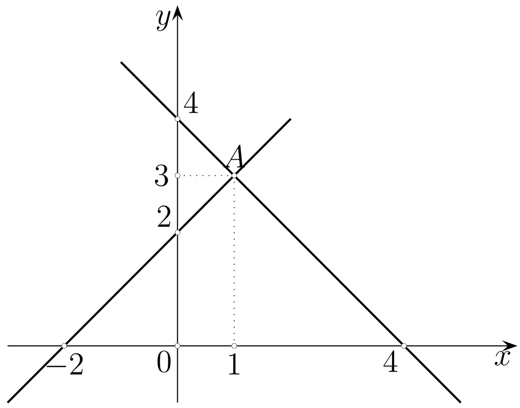


Skica paralelograma s pravilnim vnosom G1 točka
Ugotovitev ali upoštevanje, da sta trikotnika AGP in GBC podobna .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $|AG|=2x$ ter $|GB|=3x$. 1 točka

Zapis sorazmerja $|AG|:|GB|=|AP|:|BC|$ .... 1 točka

Izražen $|AP|=\frac{|BC|\cdot|AG|}{|GB|}$ .... 1 točka
Izračun $\frac{4{,}5\cdot 2x}{3x}=3$ .... 1 točka

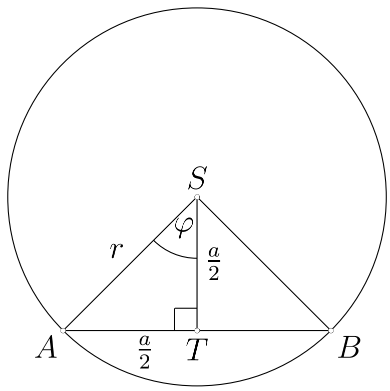
4. Ugotovimo, da sta odseka, ki ju iskana premica odreže na koordinatnih oseh, enaka. Zapišemo $k_1 = 1$ oz $k_2 = -1$. Upoštevamo še točko A v zapisu iskane premice in zapišemo njeni enačbi $y = x + 2$ ter $y = -x + 4$.



I: način
Skica .... 1 točka
Ugotovitev $k_1 = 1$ oz $k_2 = -1$ .... 1 točka
Zapis premice $y_1 = k_1x_1 + n_1$ .... 1 točka
Izračun $n_1 = 2$ .... 1 točka
Zapis premice $y = x + 2$ .... 1 točka
Zapis druge premice $y = -x + 4$ .... 1 točka
II: način
Izračunamo $n = 4$ ter zapišemo enačbo $y = -x + 4$. Uporabimo še zvezo $m = -n$ in izračunamo $n = 2$ ter zapišemo enačbo $y = x + 2$.

Ugotovitev $m = n$ ali $m = -n$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun $n = 4$ .... 1 točka
Zapis enačbe $y = -x + 4$ .... 1 točka
Izračun $n = 2$ .... 1 točka
Zapis enačbe $y = x + 2$ .... 1 točka

5. Z uporabo Pitagorovega izreka v trikotniku ATS izrazimo $r^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$. Nato korenimo ter racionaliziramo $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ker je ATS enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $\varphi = 45°$. (Kot lahko izračunamo tudi z uporabo kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku ATS in sicer: $\tan\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1$.) Izračunamo središčni kot $\varphi = 45°$. Nato izračunamo še oba obodna kota. Ostri obodni kot nad tetivo AB meri $45°$, topi pa $135°$.



Ustrezna skica .... 1 točka
Uporaba Pitagorovega izreka $r^2 = \frac{a^2}{2}$ .... 1 točka
Izračun $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .... 1 točka
Uporaba kotnih funkcij $\tan\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1$ .... 1 točka
Izračun kota $\varphi = 45°$ .... 1 točka
Izračun obodnih kotov $45°$ in $135°$ .... 1 točka

Tretji letnik

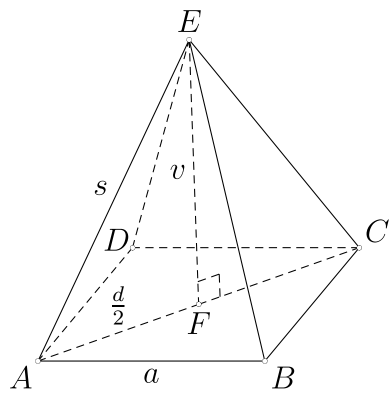
1. Ugotovimo, da teme kvadratne funkcije leži na premici $y = 2$, torej $q = 2$. Uporabimo formulo za D in q, v katero vstavimo podatke $2 = -\frac{m^2-12}{4}$, odpravimo ulomek ter dobimo $m^2 - 4 = 0$. Rešitvi nastale enačbe sta $m_1 = 2$ in $m_2 = -2$.

   Ugotovitev $q = 2$ .... 1 točka
   Izračun $D = m^2 - 12$ .... 1 točka
   Vstavitev podatkov v $q = -\frac{D}{4a}$ je $2 = -\frac{m^2-12}{4}$ .... 1 točka
   Poenostavitev enačbe $m^2 - 4 = 0$ .... 1 točka
   Izračunani rešitvi $m_1 = 2$ in $m_2 = -2$ .... $1 + 1^*$ točka

2. Po besedilu zapišemo enačbi $n \cdot c = 120$ in $(n - 3)(c + 2) = 120$. Rešimo nastali sistem enačb. Dobimo kvadratno enačbo $c^2 + 2c - 80 = 0$. Upoštevamo pozitivno rešitev $c = 8$ in izračunamo $n = 15$.

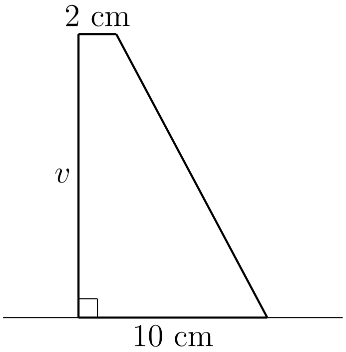
   Zapis enačbe $n \cdot c = 120$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $(n - 3)(c + 2) = 120$ .... 1 točka
   Reševanje sistema .... 1 točka
   Zapis kvadratne enačbe $c^2 + 2c - 80 = 0$ .... 1 točka
   Rešitvi $c = 8$ ali $n = 15$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

3. Ker je osnovna ploskev piramide kvadrat, so njegove stranice dolge 24 dm. (Če bi namreč bile dolge 21 dm, iz trikotnikov ne bi morali oblikovati piramide.) Izračunamo dolžino diagonale osnovne ploskve piramide; $|AC| = d = a\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ dm. S pomočjo pravokotnega trikotnika AFE s Pitagorovim izrekom izračunamo višino šotora z enačbo; $v^2 = s^2 - (\frac{d}{2})^2$. Vstavimo podatke, korenimo in izračunamo približek $v = 1{,}237$m. Podatke vstavimo v formulo za izračun prostornine pokončne štiristrane piramide $V = \frac{a^2v}{3}$. Izračunamo $V = 2,4\text{m}^3$.



   Narisana skica .... 1 točka
   Zapis ali uporaba obrazca za izračun diagonale $d = a\sqrt{2}$ .... 1 točka
   Zapis formule za izračun višine $v^2 = s^2 - (\frac{d}{2})^2$ .... 1 točka
   Izračun višine $v = 1,237$m .... 1 točka
   Uporaba obrazca za prostornino $V = \frac{a^2v}{3}$ .... 1 točka
   Izračun $V = 2,4\text{m}^3$ .... 1 točka

4. Iz obrazca za ploščino trapeza izračunamo višino trapeza $v = \frac{2 \cdot S}{a+c} = 15\text{cm}$. Izračunamo še višino stožca $v_s = a - c = 8\text{cm}$. Ugotovimo, da je $v_v = c$ in da sta polmera valja in stožca enaka višini trapeza. Izračunamo prostornino sastavljenega telesa $V = V_s + V_v = \pi r^2 (v_v + \frac{v_s}{3}) = 1050\pi\text{cm}^3$. Izračunamo površino sestavljenega telesa $P = S + S_{pl_v} + S_{pl_s} = \pi(r^2 + 2rv_v + r_s) = 540\pi\text{cm}^2$



Izračun višine trapeza $v = 15\text{cm}$ .... 1 točka
Izračun stranskega roba $s = \sqrt{r^2 + v_s^2} = 17\text{cm}$ .... 1 točka
Izračun prostornine $V = V_s + V_v = \pi r^2 (v_v + \frac{v_s}{3}) = 1050\pi\text{cm}^3$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun površine $P = S + S_{pl_v} + S_{pl_s} = \pi(r^2 + 2rv_v + r_s) = 540\pi\text{cm}^2$ .... $1 + 1^*$ točka
OPOMBA: Za napačno enoto odštejemo 1 točko.

5. Enačbo zapišemo v obliki produkta potenc, množimo potence z istimi osnovami $3^{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x}} = 3^{2 + \frac{1}{3}}$. Enačimo eksponente in dobimo enačbo $5x^2 - 14x - 3 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -\frac{1}{5}$. Izberemo celoštevilsko rešitev $x = 3$.

Zapis s potencami $3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{2x}{6}} \cdot 3^{-\frac{3}{6x}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ .... $1 + 1^*$ točka
Enačenje eksponentov $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} = 2 + \frac{1}{3}$ .... 1 točka
Ureditev kvadratne enačbe $5x^2 - 14x - 3 = 0$ .... 1 točka
Rešitev $x = 3$ .... 1 točka
Rešitev $x = -\frac{1}{5}$ ne ustreza .... 1 točka

Četrti letnik

1. V števcu prvega ulomka uporabimo obrazec za razliko kvadratov in zapišemo produkt $(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)$. Upoštevamo naslednji zvezi: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $1-\cos^2 x = \sin^2 x$. Prvi ulomek krajšamo s $\sin^2 x$ ter potenciramo drugi ulomek z eksponentom -2. Ulomka seštejemo in dobimo $\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$. V števcu ponovno upoštevamo zvezo $1-\cos^2 x = \sin^2 x$, zato je rezultat 1.

   Razstavitev $1-\cos^4 x = (1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)$ .... 1 točka
   Upoštevanje $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ .... 1 točka
   Potenciranje $\tan^{-2} x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
   Krajšanje prvega ulomka .... 1 točka
   Seštevanje ulomkov $\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
   Rezultat .... 1 točka

2. Uporabimo Hornerjev algoritem za oba polinoma, kjer upoštevamo, da je -3 ničla obeh polinomov. Dobimo enačbi $-3a+b+45=0$ in $9a-153=0$. Rešitev sistema nam da rešitvi $a=17$ in $b=6$. Upoštevamo obe rešitvi in rešimo kvadratno enačbo $2x^2+5x+2=0$. Dobimo še preostali rešitvi $x_2=-2$ in $x_3=-\frac{1}{2}$.

   Uporaba Hornerjevega algoritma in zapis enačbe $-3a+b+45=0$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $9a-153=0$ .... 1 točka
   Izračun $a=17$ .... 1 točka
   Izračun $b=6$ .... 1 točka
   Izračunani preostali ničli $x_2=-2$ in $x_3=-\frac{1}{2}$ .... $1+1^*$ točka

3. Zapis racionalne funkcije uredimo. Zapišemo racionalno neenačbo $\frac{5-x}{4x-4} > 1$. Preoblikujemo neenačbo v zapis $\frac{9-5x}{4x-4} > 0$. Izračunamo ničle števca in imenovalca ter določimo njihove stopnje. Določimo predznake ulomka na posameznih intervalih ter zapišemo rešitve neenačbe.

   Ureditev zapisa racionalne funkcije $f(x) = \frac{5-x}{4x-4}$ .... 1 točka
   Zapis neenačbe $\frac{5-x}{4x-4} > 1$ .... 1 točka
   Ureditev neenačbe $\frac{9-5x}{4x-4} > 0$ .... 1 točka
   Zapis ničle $x = \frac{9}{5}$ .... 1 točka
   Zapis pola $x=1$ .... 1 točka
   Rešitev $x \in (1, \frac{9}{5})$ .... 1 točka

4. Iz besedila naloge razberemo prvi člen $a_1 = 4,9$ in diferenco zaporedja $d = 9,8$. Po obrazcu za splošno člen aritmetičnega zaporedja izračunamo 20. člen $a_{20} = a_1 + 19d = 191,1\text{m}$. Uporabimo obrazec za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1+19d) = 1960\text{m}$.

   Zapis $a_1 = 4,8$ m .... 1 točka
   Zapis $d = 9,8$ m .... 1 točka
   Uporaba obrazca za splošni člen .... 1 točka
   Izračun $a_{20} = a_1 + 19d = 191,1\text{m}$ .... 1 točka
   Uporaba obrazca za vsoto n členov .... 1 točka
   Izračun $S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1+19d) = 1960\text{m}$ .... 1 točka

5. Upoštevamo obrazec za povprečje - aritmetično sredino $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2}{N}$ in dobimo $\frac{22 \cdot a + 2 \cdot b}{24} = 775$ in $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{25} = 852$. Odpravimo imenovalca v obeh enačbah in dobimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama: $22a + 2b = 18600$ in $22a + 3b = 21300$. Enačbi odštejemo in dobimo $b = 2700$, vstavimo v eno od enačb in dobimo $a = 600$.

Zapis ali upoštevanje $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2}{N}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{22 \cdot a + 2 \cdot b}{24} = 775$ in $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{25} = 852$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun $b = 2700$ .... 1 točka
Izračun $a = 600$ .... 1 točka
Zapis odgovora: Plača delavca je 600 evrov, svetovalca pa 2700 .... 1 točka