Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

5. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Postojna, 16. april 2005

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Dedek in babica sta pripravila lizike, da bi jih razdelila vsem svojim vnukom, ko so ju le-ti obiskali. Če bi dala vsakemu vnuku štiri lizike, bi jima pet lizik ostalo. Če bi želela dati vsakemu vnuku pet lizik, bi jima dve zmanjkali. Izračunajte, koliko vnukov imata dedek in babica ter koliko lizik sta pripravila.

2. Natančno izračunajte ploščino kvadrata, katerega nasprotni oglišči sta točki $A(3,-8)$ in $C(3,-2)$.

3. Dokažite, da velja enakost:

$$\left(a^{-2}+b^{-2}+2(a+b)^{-1}\cdot(a^{-1}+b^{-1})\right):\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{2}=1.$$

4. Dvomestno število ima desetice za 60 % večje od enic. Če to število delite z vsoto njegovih števk, dobite kvocient 6 in ostanek 7. Izračunajte to število.

5. Natančno izračunajte vrednost izraza:

$$\left(-3+\frac{172\cdot 3^{4x-2}}{12\cdot 3^{4x-3}}\right)\left(4{,}1\overline{6}+0{,}5\overline{3}\cdot 1\frac{9}{16}\right)^{-1}.$$

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

5. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Postojna, 16. april 2005

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Dana je družina premic $x + mx + y - 2m = 0,\ m \in \mathbf{R}$. Katera premica iz te družine gre skozi točko $T(1, 2)$? Zapišite odsekovno obliko njene enačbe in narišite njen graf.

2. Dane so enačbe premic $x - 3y + 1 = 0$, $9x - 2y - 41 = 0$ in $7x + 4y + 7 = 0$. Izračunajte ploščino trikotnika, ki ga določajo te premice.

3. Poenostavite izraz
$$\frac{(1 - (\frac{x}{y})^{-2})x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}}.$$

4. Eden izmed notranjih kotov trikotnika meri toliko kot $\frac{3}{5}$ drugega in kot $\frac{1}{4}$ tretjega kota. Izračunajte, koliko meri vsak notranji kot tega trikotnika.

5. Število 13 zapišite kot vsoto dveh seštevancev tako, da bo vsota kvadratnih korenov teh seštevancev enaka 5.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

5. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Postojna, 16. april 2005

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Petra je na balkonu, ki je 8 m nad tlemi, in vrže v zrak žogo. Višino h, na kateri se nahaja žoga od tedaj, ko jo Petra izpusti, do tedaj, ko pade na tla, opisuje formula $h(t) = -1{,}2\,t^2 + 2{,}4\,t + 9{,}6$. Pri tem je t čas v sekundah, h pa višina v metrih. Izračunajte, po kolikšnem času pade žoga na tla. Koliko metrov nad tlemi je najvišja točka, ki jo doseže žoga?

2. Mihov akvarij je dolg 65 cm, širok 40 cm in visok 40 cm. Da bi se ohranilo biološko ravnovesje v akvariju, mora vsa količina vode v njem vsako uro trikrat preteči skozi akvarijski filter. Do kolikšne višine lahko Miha napolni akvarij, če ima filter zmogljivost 273 litrov na uro? Koliko je dolga najdaljša palica, ki jo lahko potopi v tako napolnjen akvarij?

3. Rešite enačbo $3x^2 - 6x - 2\log_{\frac{1}{4}} a = 0$ za vrednost parametra $a = 8$.

4. Čokolado prodajajo v škatli, ki ima obliko pravilne tristrane prizme. Osnovni rob škatle je dolg 3 cm, stranski pa 20 cm. Izračunajte, koliko kvadratnih metrov lepenke potrebujemo za 1000 takšnih škatel, če zaradi rezanja in lepljenja porabimo 5 % lepenke več, kot je površina škatle. Rezultat zaokrožite na celo število.

5. Rešite enačbo $\sqrt{3^x \sqrt[3]{9^x \sqrt[x]{27^{-1}}}} = 9\sqrt[3]{3}$.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

5. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Postojna, 16. april 2005

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. Kvader ima enako osnovno ploskev kot kocka (ploskvi sta skladni). Kvader je nižji od kocke, njegova višina meri 3,8 m. Vsota prostornin obeh teles je 7,2 m^3. Koliko meri stranica osnovne ploskve teh dveh teles?

2. Dana je funkcija $f(x) = 2\log(\frac{-x-2}{x-2})$. Določite definicijsko območje funkcije.

3. Poenostavite izraz
$$4(1+\tan^2 x)\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x} + \frac{\sin^2 2x}{1-\sin^4 x}.$$

4. Dokažite, da velja $x^{b-c} \cdot y^{c-a} \cdot z^{a-b} = 1$, če števila a, b in c oblikujejo aritmetično zaporedje, števila x, y in z pa geometrijsko zaporedje.

5. Povprečna vrednost spremenljivke je enaka 2,5. Spremenljivka je zavzela vrednosti 1, 2, 3, 4 in 5 s pripadajočimi frekvencami 5, 4, 3, 2 in x. Izračunajte x.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

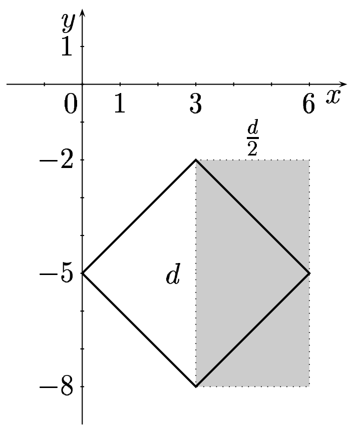
Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Naj bo x število vnukov. Ker bi 5 lizik ostalo, če bi vsak vnuk dobil 4, je število vseh lizik enako $4x+5$. Število lizik je enako tudi $5x-2$, saj bi 2 liziki zmanjkali, če bi dedek in babica želela dati vsakemu vnuku 5 lizik. To pomeni, da je $4x+5=5x-2$, od koder izračunamo $x=7$. Dedek in babica imata 7 vnukov, pripravila pa sta 33 lizik.

Sklep in zapis: $4x+5$ .... 1 točka
Sklep in zapis: $5x-2$ .... 1 točka
Nastavitev enačbe: $4x+5=5x-2$ .... 1 točka
Rešitev enačbe: $x=7$ .... 1 točka
Odgovor: 7 vnukov in 33 lizik .... $1+1$ točka

2. Nasprotni oglišči sta krajišči diagonale kvadrata. Njeno dolžino izračunamo po obrazcu $d(A,C)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$. Dolžina diagonale meri 6 enot. Med dolžino a stranice in dolžino $d(A,C)$ diagonale kvadrata velja zveza $d^2(A,C)=a^2+a^2$, od koder izrazimo $a^2=\frac{d^2(A,C)}{2}$. Izračunamo $a^2=18$, kar je tudi ploščina kvadrata.
Do rezultata pridemo hitreje, če opazimo, da imata nasprotni oglišči kvadrata enaki abscisi. Tedaj je razdalja med njima enaka razliki ordinat: $d=-2-(-8)=6$. S slike razberemo, da je kvadrat ploščinsko enak pravokotniku s stranicama dolžine d in $\frac{d}{2}$. Ploščina kvadrata je torej enaka $d\cdot\frac{d}{2}=6\cdot 3=18$.



Uporaba obrazca $d(A,C)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$ .... 1 točka
Izračun razdalje $d(A,C)=6$ .... 1 točka
Zapis zveze $d^2(A,C)=a^2+a^2$ .... 1 točka
Izražena neznanka $a^2=\frac{d^2(A,C)}{2}$ .... 1 točka
Izračunan $a^2=18$ ali $a=3\sqrt{2}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $a^2=18$ ploščina kvadrata .... 1 točka

3. V izrazu na levi strani enakosti upoštevamo pomen negativnih eksponentov in ga ustrezno preoblikujemo v $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\cdot\frac{1}{a+b}\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\right):\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$. Nato poiščemo skupni imenovalec in množimo $\left(\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}+\frac{2(a+b)}{(a+b)ab}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. Krajšamo in dobimo $\frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. Števec razstavimo $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$, krajšamo in dobimo rezultat 1.

Upoštevanje negativnih eksponentov: $a^{-2}+b^{-2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ .... 1 točka
in $2\cdot(a+b)^{-1}=\frac{2}{a+b}$ .... 1 točka
Ureditev ulomka do oblike $\frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$ .... 1 točka
Razstavitev števca $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$ .... 1 točka
Krajšanje .... 1 točka
Rezultat 1 .... 1 točka

4. Dvomestno število, zapisano v desetiškem zapisu, je oblike $10a+b$. Iz besedila naloge razberemo, da velja $a=1{,}6b$ in $10a+b=6(a+b)+7$. Rešimo nastali sistem. Rešitev je $a=8$ in $b=5$. Iskano število je 85.

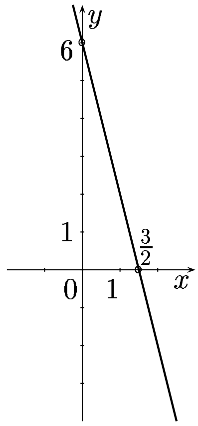
Destiški zapis števila $10a+b$ .... 1 točka
Nastavljen sistem dveh enačb z dvema neznankama: $a=1{,}6b$ .... 1 točka
$10a+b=6(a+b)+7$ .... 1 točka
Uporaba ustrezne metode za rešitev sistema .... 1 točka
Rešitev: $b=5$, $a=8$ .... 1 točka
Odgovor: Iskano število je 85 .... 1 točka

5. Če okrajšamo ulomek $\frac{172\cdot3^{4a-2}}{12\cdot3^{4x-3}}$, dobimo 43. Periodični decimalni števili zapišemo v obliki ulomka $4{,}1\overline{6}=\frac{25}{6}$ in $0{,}5\overline{3}=\frac{8}{15}$. Tako je izraz enak $(-3+43)(\frac{25}{6}+\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{16})^{-1}=40(\frac{25}{6}+\frac{5}{3\cdot2})^{-1}$. Vsota ulomkov v oklepaju je enaka 5, kar pomeni da število 40 pomnožimo z $\frac{1}{5}$. Dobimo rezultat 8.

Krajšanje ulomka: $\frac{172\cdot3^{4a-2}}{12\cdot3^{4x-3}}$ .... 1 točka
Rezultat krajšanja: 43 .... 1 točka
Zapis periodičnega decimalnega števila z ulomkom: $4{,}1\overline{6}=\frac{25}{6}$ .... 1 točka
in $0{,}5\overline{3}=\frac{8}{15}$ .... 1 točka
Izračun $(\frac{56}{6}+\frac{5}{6})^{-1}=\frac{1}{5}$ .... 1 točka
Rezultat 8 .... 1 točka

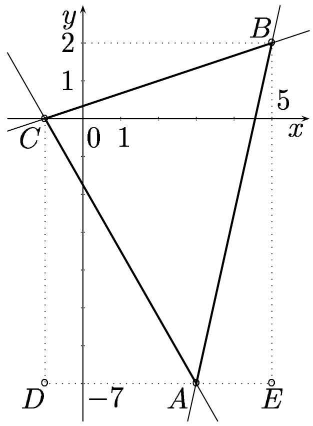
Drugi letnik

1. Če koordinati točke vstavimo v enačbo družine premic, dobimo $1+m\cdot 1+2-2m=0$, od koder izračunamo $m=3$. Izračunani m vstavimo v enačbo, pa dobimo enačbo premice $4x+y-6=0$, ki se v odsekovni obliki zapiše: $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{6}=1$. Narišemo še graf.



Oblikovanje enačbe: $1+m\cdot 1+2-2m=0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe: $m=3$ .... 1 točka
Vstavljen m in poenostavitev: $4x+y=6$ .... 1 točka
Enačba premice v odsekovni obliki: $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{6}=1$ .... 1 točka
Pravilno narisan graf .... 2 točki

2. Najprej izračunamo presečišča posameznih parov premic, ki predstavljajo oglišča trikotnika: $A(3,-7)$, $B(5,2)$ in $C(-1,0)$. Nato uporabimo formulo z determinanto za izračun ploščine trikotnika. Ploščina je 25.
Nalogo lahko rešimo drugače. S slike razberemo, da je ploščina trikotnika ABC enaka razliki med ploščino trapeza $DEBC$ in vsoto ploščin pravokotnih trikotnikov DAC in AEB. Ploščina trapeza $DEBC$ je $\frac{9+7}{2}\cdot 6=48$, ploščina trikotnika DAC je $\frac{4\cdot 7}{2}=14$, ploščina trikotnika AEB pa $\frac{2\cdot 9}{2}=9$. Tako je ploščina trikotnika ABC enaka $48-(14+9)=25$.



Izračun koordinat oglišč trikotnika................ $1+1+1$ točka
Zapis točk: $A(3,-7), B(5,2)$ in $C(-1,0)$ .... 1 točka
Uporaba determinante: $S=\frac{|D|}{2}$ .... 1 točka
Izračunana ploščina: 25 .... 1 točka

3. Števec poenostavimo in opravimo kvadriranje v imenovalcu: $\frac{(1-(\frac{y}{x})^2)x^2}{(\sqrt{x})^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}}$. To preoblikujemo v $\frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}\cdot x^2}{x+y}$. Nato dobimo $\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}$ in končno $x-y$.

Poenostavitev: $1-(\frac{x}{y})^{-2}=1-\frac{y^2}{x^2}$ .... 1 točka
Razširitev zgornjega na skupni imenovalec $\frac{x^2-y^2}{x^2}$ .... 1 točka
Kvadriranje v imenovalcu: $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=(\sqrt{x})^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2$ .... 1 točka
Ureditev ulomka do oblike $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ .... 1 točka
Razstavitev števca $\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}$ .... 1 točka
Rezultat: $x-y$ .... 1 točka

4. Denimo, da je $\alpha = \frac{3}{5}\beta = \frac{1}{4}\gamma$. Tedaj je $\gamma = \frac{12}{5}\beta$. Upoštevamo, da je $\alpha+\beta+\gamma = \frac{3}{5}\beta+\beta+\frac{12}{5}\beta = 180°$. Enačbo množimo s skupnim imenovalcem, uredimo in dobimo rešitev $\beta = 45°$. Ostala kota merita $\alpha = 27°$ in $\gamma = 108°$.

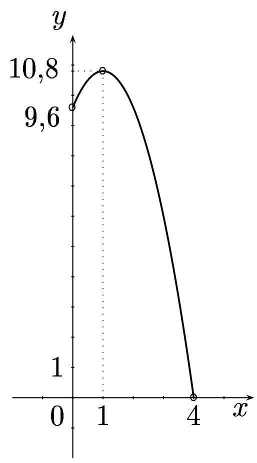
Zapis zveze med koti: $\alpha = \frac{3}{5}\beta$ .... 1 točka
in $\gamma = \frac{12}{5}\beta$ .... 1 točka
Zapis enačbe: $\frac{3}{5}\beta + \beta + \frac{12}{5}\beta = 180°$ .... 1 točka
Rešitev: $\beta = 45°$, $\alpha = 27°$ in $\gamma = 108°$........ $1+1+1$ točka

5. Število 13 zapišemo kot vsoto dveh seštevancev, npr. $13 = x + y$. Upoštevamo besedilo naloge: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$. Iz prve zveze izrazimo $y = 13 - x$ in vstavimo v drugo enačbo: $\sqrt{x} + \sqrt{13-x} = 5$. Enačbo uredimo v $\sqrt{13-x} = 5 - \sqrt{x}$ in kvadriramo. Dobimo $13 - x = 25 - 10\sqrt{x} + x$, kar preuredimo v $10\sqrt{x} = 2x + 12$. Po deljenju z 2 dobimo $5\sqrt{x} = x + 6$ in ponovno kvadriramo: $25x = x^2 + 12x + 36$. Uredimo v $x^2 - 13x + 36 = 0$, razstavimo $(x-9)(x-4) = 0$ in odčitamo rešitvi $x = 9$ in $x = 4$. Iskana seštevanca sta 9 in 4.

Zapis enačbe: $\sqrt{x} + \sqrt{13-x} = 5$ .... 1 točka
Pravilno kvadriranje: $13 - x = 25 - 10\sqrt{x} + x$ .... 1 točka
Ureditev enačbe do oblike: $5\sqrt{x} = x + 6$ .... 1 točka
Kvadriranje in ureditev enačbe do oblike: $x^2 - 13x + 36 = 0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe: $x = 9$ in $x = 4$........ 1 točka
Odgovor .... 1 točka

Tretji letnik

1. Graf funkcije $h(t)$ je kvadratna parabola, ki ima teme v točki $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$. Diskriminanto D izračunamo po formuli $D = b^2 - 4ac = 51{,}84$. Tako je $h_{max} = -\frac{D}{4a} = 10{,}8$ m. Ko žoga pade na tla, je njena višina enaka 0 m. Tedaj je $h = 0 = -1{,}2\,t^2 + 2{,}4\,t + 9{,}6$. Rešitvi te enačbe sta $t_1 = 4$ in $t_2 = -2$. Smiselna rešitev je $t = 4$ sekunde.



Ugotovitev: $h_{max} = -\frac{D}{4a}$ .... 1 točka
Izračun višine: 10,8 m. .... 1 točka
Določitev pogoja: $h = 0 = -1{,}2\,t^2 + 2{,}4\,t + 9{,}6$........ 1 točka
Rešitvi enačbe: $t_1 = 4$, $t_2 = -2$ .... 1 točka
Rešitev: $t = 4$ sekunde .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

2. Ker filter lahko na uro prečrpa 273 litrov vode, je lahko v akvariju največ $\frac{273}{3} = 91$ litrov. Nato lahko izračunamo, do kolikšne višine lahko Miha napolni akvarij: $v = \frac{V}{ab} = \frac{91}{6{,}5 \cdot 4} = 3{,}5$ dm. Najdaljša palica, ki jo lahko položimo v akvarij, je enako dolga kot telesna diagonala kvadra z razsežnostmi 65 cm, 40 cm in 35 cm, to je $\sqrt{65^2 + 40^2 + 35^2} = 84$ cm.

Izračun količine vode v akvariju: $273 : 3 = 91\ \ell$........ 1 točka
Izračunana višina vode v akvariju $c = \frac{V}{ab} = 3{,}5$ dm .... 1 točka

Ugotovitev, da je najdaljša palica enako dolga kot telesna diagonala .... 1 točka
Uporaba formule za telesno diagonalo .... 1 točka
Izračun dolžine telesne diagonale: $D = 84$ cm .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka
OPOMBA: Če manjkajo enote, odbijemo eno točko.

3. Upoštevamo vrednost parametra a: $3x^2 - 6x - 2\log_{\frac{1}{4}} 8 = 0$. To preoblikujemo v $3x^2 - 6x - \log_{\frac{1}{4}} 8^2 = 0$. Ker je $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$, dobimo enačbo $3x^2 - 6x + 3 = 0$. Iz $3(x-1)^2 = 0$ vidimo, da je njena edina rešitev $x = 1$.

Pravilno vstavljena vrednost parametra a: $3x^2 - 6x - 2\log_{\frac{1}{4}} 8 = 0$ .... 1 točka
Upoštevanje pravila za logaritmiranje: $3x^2 - 6x - \log_{\frac{1}{4}} 8^2 = 0$ .... 1 točka
Poenostavljena enačba do oblike: $3x^2 - 6x - \log_{\frac{1}{4}} 64 = 0$ .... 1 točka
Urejena enačba: $3x^2 - 6x + 3 = 0$ .... 1 točka
Pravilno reševanje kvadratne enačbe .... 1 točka
Rešitev: $x = 1$ .... 1 točka

4. Površina škatle je $P = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av$, kjer je a dolžina osnovnega roba, v pa dolžina stranskega roba pravilne tristrane prizme. Tako je $P = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{2} + 180$. Za 1000 škatel potrebujemo zaradi rezanja in lepljenja $1,05 \cdot 1000P \doteq 197183,94$ cm^2, kar je $19,7$ m^2. Zaokrožimo na celo število: 20 m^2.

Izražena površina škatle: $P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki: $P = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 180$ .... 1 točka
Izračunana površina za 1000 škatel: $1000 \cdot P \doteq 187794,23$ cm^2 .... 1 točka
Upoštevanje 5 % dodatka: $1,05 \cdot 1000 \cdot P$ .... 1 točka
Izračun: $197183,94$ cm$^2 \doteq 19,7$ m^2 .... 1 točka
Odgovor: Potrebujemo 20 m^2 lepenke. .... 1 točka

5. Uporabimo pravila za računanje s koreni $\sqrt[6x]{3^{x\cdot 3\cdot x} \cdot 3^{2\cdot x\cdot x} \cdot 3^{-3}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$. Nato zapis spremenimo v zapis s potencami z racionalnimi eksponenti in enačbo preuredimo v: $3^{\frac{5x^2-3}{6x}} = 3^{\frac{7}{3}}$. Upoštevamo pravilo za reševanje eksponentnih enačb in enačimo eksponenta: $\frac{5x^2-3}{6x} = \frac{7}{3}$. To enačbo preuredimo v $5x^2 - 14x - 3 = 0$. Rešitvi sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -\frac{1}{5}$.

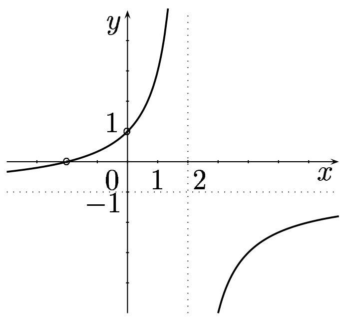
Uporaba pravila za računanje s koreni: $\sqrt[6x]{3^{x\cdot 3\cdot x} \cdot 3^{2\cdot x\cdot x} \cdot 3^{-3}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ .... 1 + 1 točka
Uporaba potenc z racionalnimi eksponenti: $3^{\frac{5x^2-3}{6x}} = 3^{\frac{7}{3}}$ .... 1 točka
Enačenje eksponentov: $\frac{5x^2-3}{6x} = \frac{7}{3}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe: $5x^2 - 14x - 3 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi: $x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{5}$ .... 1 točka

Četrti letnik

1. Obe telesi imata enako osnovno ploskev, to je kvadrat s ploščino a^2. Iz besedila naloge nastavimo zvezo $a^3 + 3{,}8\,a^2 = 7{,}2$. Decimalna števila zapišemo v obliki okrajšanih ulomkov, nato pa enačbo preuredimo v $5a^3 + 19a^2 - 36 = 0$. Takoj ugotovimo, da 1 in -1 nista rešitvi enačbe, s Hornerjevim algoritmom pa preverimo, da je rešitev $a = -2$. Preostali ničli dobimo z reševanjem ustrezne kvadratne enačbe. Tako imamo rešitve -2, -3 in $\frac{6}{5}$. Edina smiselna rešitev je $a = 1{,}2$ m.

Zapis prostornine kvadra $3{,}8\,a^2$ .... 1 točka
Zapis vsote prostornin: $a^3 + 3{,}8\,a^2 = 7{,}2$ .... 1 točka
Zapis urejene enačbe: $5a^3 + 19a^2 - 36 = 0$ .... 1 točka
Ugotovitev ene ničle s Hornerjevim algoritmom, npr. -2 .... 1 točka
Izračunani ostali ničli, npr. -3 in $\frac{6}{5}$ .... 1 točka
Odgovor: Stranica osnovne ploskve meri 1,2 m .... 1 točka

2. Funkcija je definirana za $\frac{-x-2}{x-2} > 0$. Nastalo racionalno neenačbo rešimo grafično. Poiščemo ničlo $x = -2$ in pol $x = 2$. Na številski premici označimo intervale, kjer je funkcija pozitivna in kjer je negativna. Odčitamo rešitev $(-2, 2)$.



Zapis pogoja za definicijsko območje: $\frac{-x-2}{x-2} > 0$ .... 1 točka
Zapisana ničla: $x = -2$ .... 1 točka
Zapisan pol: $x = 2$ .... 1 točka
Na številski premici označeni predznaki .... 1 točka
Odčitana rešitev $(-2, 2)$ .... 2 točki
OPOMBA: Če oklepaji (ali znaki neenakosti) niso pravilni, odštejemo eno točko.

3. Vsak člen poenostavimo. Tako je prvi člen enak $4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} = \frac{4}{1+\sin^2 x}$. Drugi člen je enak $\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}\frac{4\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$. Ko ju seštejemo, dobimo $\frac{4(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} = 4$.

Poenostavitev prvega člena: $4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$ .... 1 točka
Krajšanje v prvem členu: $= \frac{4}{1+\sin^2 x}$ .... 1 točka
Ureditev drugega člena: $\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}$ .... 1 točka
Krajšanje v drugem členu: $\frac{4\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$ .... 1 točka
Zapis vsote obeh členov: $\frac{4(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}$ .... 1 točka
Rezultat: 4 .... 1 točka

4. Ugotovimo, da za aritmetično zaporedje velja $b = \frac{a+c}{2}$, za geometrijsko pa $y = \sqrt{xz}$. Uporabimo prejšnji zvezi v dani levi strani enačbe, pa imamo $x^{\frac{a+c}{2}-c} \cdot (\sqrt{xz})^{c-a} \cdot z^{a-\frac{a+c}{2}}$. Kvadratni koren zapišemo v obliki potence: $x^{\frac{a+c}{2}-c} \cdot (xz)^{\frac{c-a}{2}} \cdot z^{a-\frac{a+c}{2}}$. Upoštevamo pravila za množenje potenc in dobimo $x^0 \cdot z^0 = 1$.

Upoštevanje zveze za aritmetično zaporedje: $b = \frac{a+c}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje zveze za geometrijskego zaporedje: $y = \sqrt{xz}$ .... 1 točka
Vstavitev zvez v levo stran enačbe: $x^{\frac{a+c}{2}-c} \cdot (\sqrt{xz})^{c-a} \cdot z^{a-\frac{a+c}{2}}$ .... 1 točka
Zamenjava kvadratnega korena s potenco: $x^{\frac{a+c}{2}-c} \cdot (xz)^{\frac{c-a}{2}} \cdot z^{a-\frac{a+c}{2}}$ .... 1 točka

Razčlenitev osnov: $x^{\frac{a-c}{2}} \cdot x^{\frac{c-a}{2}} \cdot z^{\frac{c-a}{2}} \cdot z^{a-\frac{a+c}{2}}$ .... 1 točka
Izračun: $x^0 \cdot z^0 = 1$ .... 1 točka

5. Povprečno vrednost spremenljivke izračunamo po formuli $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} f_i y_i$. Če upoštevamo dane podatke, imamo $2{,}5 = \frac{5+8+9+8+5x}{5+4+3+2+x}$, kar preuredimo v $2{,}5\,(x+14) = 5x+30$. Rešitev je $x = 2$.

Zapisana ali pravilno uporabljena formula: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} f_i y_i$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $r = 5$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki v formulo: $2{,}5 = \frac{5+8+9+8+5x}{5+4+3+2+x}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe: $2{,}5\,(x+14) = 5x+30$ .... 1 točka
Pravilno reševanje enačbe .... 1 točka
Rešitev: $x = 2$ .... 1 točka