Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Prilepi nalepko s šifro

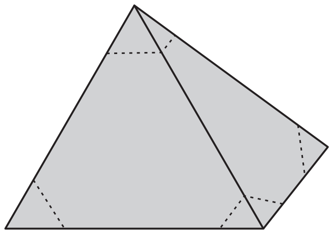
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Enakorobi piramidi z robom dolžine 5 cm odrežemo vseh pet oglišč, tako da so vsi robovih odrezanih majhnih piramid krajši od 1 cm. Kateri od naštetih večkotnikov ni mejna ploskev nastalega telesa?



(**A**) trikotnik (**B**) štirikotnik (**C**) petkotnik
(**D**) šestkotnik (**E**) osemkotnik

A2. Lili je ugotovila, da je povprečje števk letnice 2015 enako 2, saj je $\frac{2+0+1+5}{4} = 2$. Kolikokrat v 21. stoletju po letu 2015 bo imela letnica enako povprečje števk kot letnica 2015?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 9

A3. Prvo šolsko uro sta bili števili fantov in deklet v razredu v razmerju $3 : 4$. Ko so pred drugo šolsko uro v razred prišla še 4 dekleta, 4 fantje pa so razred zapustili, je to razmerje postalo $2 : 5$. Koliko več deklet kot fantov je bilo v razredu drugo šolsko uro?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 12

B1. Kvadratu s stranico dolžine a včrtamo pravilni osemkotnik tako, da ležijo 4 stranice osemkotnika na stranicah kvadrata. Izrazi dolžino stranice včrtanega osemkotnika z a.

(6 točk)

B2. Jure je na tablo zapisal naravna števila od 1 do 2015. Urška je nato po vrsti pregledovala zapisana števila od najmanjšega do največjega in pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3. Izmed števil, ki so ostala na tabli, je zatem od najmanjšega do največjega pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3^2. Izmed preostalih števil je nato od najmanjšega do največjega pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3^3, in tako dalje. Katero število je Urška pobrisala zadnje?

(6 točk)

B3. Naj bosta a in b realni števili, za kateri velja $\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} = 1$. Določi vse možne vrednosti izraza

$$(a+b)\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right).$$

(6 točk)

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 1. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

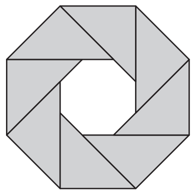
Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

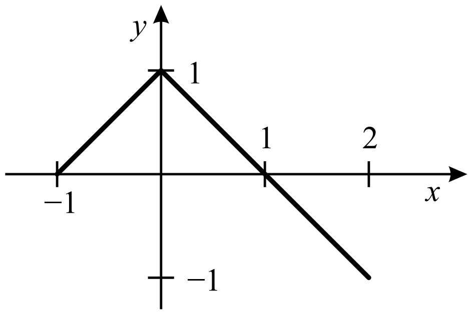
B1	B2	B3

A1. Iz osmih enakokrakih pravokotnih trikotnikov sestavimo pravilen osemkotnik z osemkotno luknjo, kot to prikazuje slika. Dolžina stranice pravilnega osemkotnika je enaka 1 cm. Koliko centimetrov je dolga stranica osemkotne luknje?



(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $2-\sqrt{2}$ **(D)** $\sqrt{2}-1$ **(E)** $\sqrt{3}$

A2. Na sliki je prikazan graf neke funkcije na intervalu $[-1, 2]$. Katera funkcija je to?



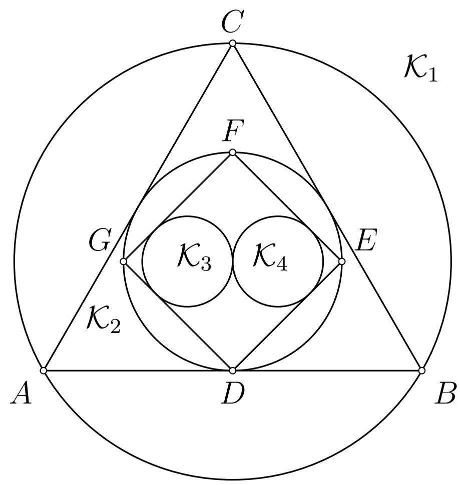
(A) $f(x) = x - 1$ **(B)** $f(x) = |x| - 1$
(C) $f(x) = |x - 1|$ **(D)** $f(x) = -|x| + 1$
(E) $f(x) = ||x| - 1|$

A3. Koliko je vrednost izraza $\sqrt{0.04^3}$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{25}$ **(C)** $\frac{1}{125}$ **(D)** 0.04 **(E)** 0.016

B1. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ na sliki sta očrtana in včrtana krožnica enakostraničnega trikotnika ABC. Krožnici $\mathcal{K}_2$ je včrtan kvadrat $DEFG$, pri čemer točka D leži na stranici AB. Krožnici $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$ sta enako veliki in se med seboj dotikata, vsaka od njiju pa se dotika še dveh stranic kvadrata $DEFG$. Določi razmerje dolžin polmerov krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_4$.

(6 točk)



B2. Koliko četveric naravnih števil (a, b, c, d) zadošča neenakostim

$$a > b > c > d \quad \text{in} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 2?$$

(6 točk)

B3. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi

$$\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2.$$

(6 točk)

Prilepi nalepko s šifro

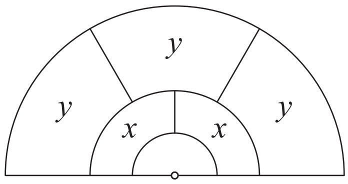
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Slika prikazuje tri koncentrične polkroge s polmeri 1, 2 in 4. Območji, označeni z X, imata ploščino x, območja, označena z Y, pa ploščino y. Kolikšno je razmerje med ploščinama x in y?



(**A**) $1:3$ (**B**) $1:2$ (**C**) $2:3$ (**D**) $3:8$ (**E**) $4:9$

A2. Za katero celo število n velja

$$(n-1)(n-3)\dots(n-2015) = n(n+2)(n+4)\dots(n+2014)?$$

(**A**) -4028 (**B**) -2014 (**C**) 2015 (**D**) 4030 (**E**) Nobeno.

A3. Dan je polinom $p(x) = 2015x^{2013} - 2$ in realno število h, za katerega velja $p(h) = -2015$. Koliko je vrednost $p(-h)$?

(**A**) 2011 (**B**) 2012 (**C**) 2013 (**D**) 2014 (**E**) 2015

B1. Če polinom p delimo s polinomom $2-x$, dobimo količnik $2x^2-x+3$. Določi ostanek tega deljenja, če veš, da je zmnožek vseh ničel polinoma p enak $\frac{11}{2}$.

(6 točk)

B2. Koliko je naravnih števil, manjših od $100\,000$, katerih vsota števk je deljiva z 9 ali s 5?

(6 točk)

B3. Simetrala kota pri A ter višina in težiščnica iz oglišča A trikotnika ABC razdelijo kot pri A na 4 enake dele. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

(6 točk)

dMFA

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 1. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

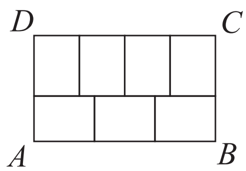
A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Na nogometnem turnirju je sodelovalo n ekip. Vsaka ekipa je z vsako drugo odigrala natanko eno tekmo. Skupaj je bilo na turnirju odigranih $2015n$ tekem. Koliko ekip je sodelovalo na turnirju?

(**A**) 2015 (**B**) 4029 (**C**) 4030 (**D**) 4031
(**E**) Nemogoče je določiti.

A2. Pravokotnik $ABCD$ na sliki je razdeljen na 7 skladnih pravokotnikov. Koliko znaša razmerje $|BC| : |AB|$?



(**A**) $2 : 3$ (**B**) $4 : 5$ (**C**) $7 : 12$ (**D**) $8 : 15$
(**E**) Razmerje je odvisno od velikosti pravokotnikov.

A3. Sara išče trimestno naravno število $\overline{xyz}$ (z so enice, y desetice in x stotice), za katerega velja $1 \leq x < y < z$ in da je vsota števil $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ in $\overline{zxy}$ trimestno število, ki ima vse števke enake. Največ koliko takih trimestnih števil lahko Sara najde?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) 11

B1. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo neenakosti

$$2\sin^2 2x \geq 3\cos 2x.$$

(6 točk)

B2. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetično zaporedje. Za poljubno naravno število k značimo $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Dokaži, da za vsaki naravni števili m in n velja

$$S_n - S_m = \frac{n-m}{n+m} S_{n+m}.$$

(6 točk)

B3. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica, I pa središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Razpolovišče tistega loka BC krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke A, označimo z D, razpolovišče tistega loka CA krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke B, pa označimo z E. Naj bo F zrcalna slika točke I pri zrcaljenju čez stranico AB in denimo, da F leži na krožnici $\mathcal{K}$. Koliko je velik kot $\sphericalangle DFE$?

(6 točk)

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 1. april 2015

Rešitve za 1. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
C	C	E

Utemeljitve:

A1. Tista stranska ploskev, ki je bila prej osnovna ploskev piramide, je sedaj osemkotnik. Ploskve, ki so bile prej stranske ploskve piramide, so sedaj šestkotniki. Pri oglišču, ki je bilo prej vrh piramide, nastane ploskev, ki je štirikotnik, pri ostalih ogliščih piramide pa nastanejo ploskve, ki so trikotniki. Nobena od stranskih ploskev nastalega telesa ni petkotnik.

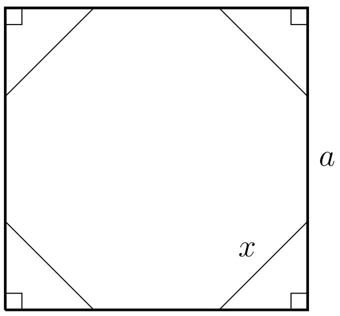
A2. Vsota števk take letnice mora biti 8. Ker gre za letnico v $21.$ stoletju, sta prvi dve števki 2 in 0. Vsota zadnjih dveh števk mora zato biti enaka 6. Takih letnic po letu 2015 je pet, to so $2024, 2033, 2042, 2051$ in 2060.

A3. Označimo število fantov v razredu prvo šolsko uro z f število deklet pa z d. Potem je $\frac{f}{d} = \frac{3}{4}$. Drugo šolsko uro je v razredu $f-4$ fantov in $d+4$ deklet, zato je razmerje enako $\frac{f-4}{d+4} = \frac{2}{5}$. Iz prve enačbe izrazimo $f = \frac{3}{4}d$ in vstavimo v drugo enačbo, da dobimo

$$\frac{\frac{3}{4}d - 4}{d+4} = \frac{2}{5}.$$

Enačbo preuredimo do $\frac{7}{4}d = 28$, torej je $d = 16$ in $f = 12$. Drugo šolsko uro je torej v razredu 8 fantov in 20 deklet, kar pomeni, da je 12 deklet več kot fantov.

B1.



Označimo z x dolžino stranice včrtanega osemkotnika. Štirje trikotniki, ki nastanejo ob ogliščih kvadrata, so enakokraki pravokotni trikotniki. Ker je njihova hipotenuza dolga x, so njihovi kraki dolgi $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Torej velja $a = x + 2\frac{x}{\sqrt{2}} = x + x\sqrt{2} = x(\sqrt{2}+1)$. Iz zapisane enačbe izrazimo

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2-1} = \sqrt{2}a - a.$$

Pregledno narisana in označena skica .... 1 točka
Izračun dolžine kraka trikotnika v oglišču kvadrata ($\frac{x}{\sqrt{2}}$) .... 1 točka
Zapis enačbe $a = x + 2\frac{x}{\sqrt{2}}$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe v $a = x(\sqrt{2} + 1)$ .... 1 točka
Odgovor $x = \sqrt{2}a - a$ .... 2 točki

B2. Po tem, ko je Urška prvič pregledala vsa zapisana števila, so na tabli ostala le števila deljiva s 3. Ko je skozi števila šla drugič, so ostala le števila deljiva s 3^2. Po tretjem pregledu so ostala le števila deljiva s 3^3, in tako dalje. Največja potenca števila 3, ki je manjša od 2015, je $3^6 = 729$, saj je $3^7 = 2187$. Ko je torej Urška šestič pregledala števila, so ostala na tabli le števila deljiva s 729, to sta 729 in 1458. V naslednjem pregledu je pobrisala obe ti dve števili, saj nista deljivi z 2187. Kot zadnje je Urška pobrisala število 1458.

Ugotovitev, da so po prvem pregledu ostala zapisana le števila, deljiva s 3 .... 1 točka
Ugotovitev, da so po tretjem pregledu ostala zapisana le števila, deljiva s 3^3 .... 1 točka
Utemeljen sklep, da je največja potenca števila 3, manjša od 2015, število $3^6 = 729$ .... 2 točki
Ugotovitev, da sta po šestem pregledu ostali zapisani le še števili 729 in 1458 .... 1 točka
Pravilen odgovor .... 1 točka
(Če tekmovalec zapiše samo pravilno rešitev brez argumentov, se mu prizna le 1 točka.)

B3. Dano enakost pomnožimo z $(1 + a^2)(1 + b^2) \neq 0$ in poenostavimo, da dobimo ekvivalentno enakost $a^2b^2 = 1$. Torej je $ab = \pm 1$. Tudi dani izraz poenostavimo

$$(a+b)\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right) = (a+b)\frac{a + ab^2 + b + a^2b}{(1+a^2)(1+b^2)} = (a+b)\frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \\ = \frac{(a^2+b^2+2ab)(1+ab)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}.$$

Če je $ab = -1$, je vrednost tega izraza enaka 0, če pa je $ab = 1$, je vrednost tega izraza enaka

$$\frac{(a^2+b^2+2)\cdot 2}{a^2+b^2+2} = 2.$$

Poračunamo lahko, da sta ti dve vrednosti tudi dejansko doseženi. Vrednost 0 je na primer dosežena, ko je $a = 1$ in $b = -1$, vrednost 2 pa, ko je $a = b = 1$.

Zapis ekvivalentne enakosti $a^2b^2 = 1$ .... 1 točka
Zapis ekvivalentnih enakosti $ab = \pm 1$ .... 1 točka
Poenostavljen zapis izraza ($\frac{(a^2+b^2+2ab)(1+ab)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}$) .... 2 točki
Izračunana vrednost izraza v primeru, ko je $ab = -1$ .... 1 točka
Izračunana vrednost izraza v primeru, ko je $ab = 1$ .... 1 točka

Rešitve za 2. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

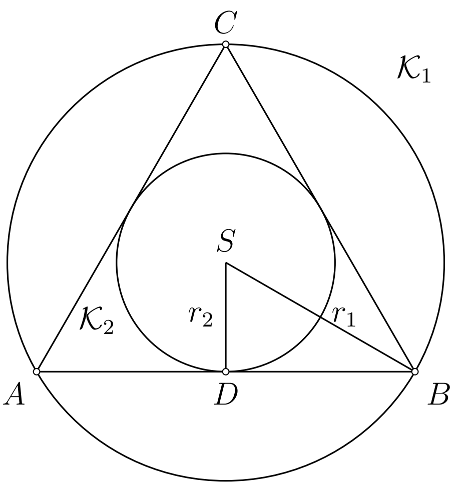
1	2	3
D	D	C

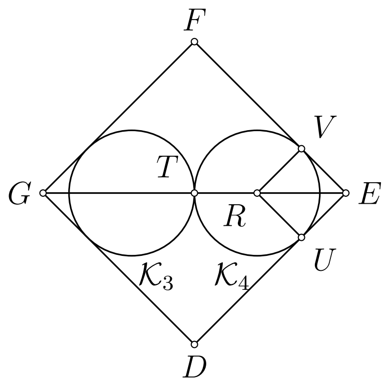
Utemeljitve:

A1. Kateti posameznega pravokotnega trikotnika sta dolgi 1 cm, njegova hipotenuza pa $\sqrt{2}$ cm. Stranica osemkotne luknje je torej dolga $\sqrt{2}-1$ cm.

A2. To je funkcija $f(x) = -|x| + 1$. Vse preostale funkcije imajo v točki 2 vrednost 1.

A3. Poračunamo $\sqrt{0.04^3} = \sqrt{\left(\frac{4}{100}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{4}{100}}\right)^3 = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.





B1.

Označimo z r_1, r_2, r_3 in r_4 polmere krožnic $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$, pri čemer vemo, da velja $r_3 = r_4$. Ker je trikotnik ABC enakostraničen, imata krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ skupno središče, ki ga označimo z S. Trikotnik BSD je polovica enakostraničnega trikotnika, zato velja $r_1 = |SB| = 2|SD| = 2r_2$. Ker je GE premer krožnice $\mathcal{K}_2$, je $|GE| = 2r_2 = r_1$. Izrazimo dolžino $|GE|$ še na drug način z r_4. Naj bo T dotikališče krožnic $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$. Središče krožnice $\mathcal{K}_4$ označimo z R, njeni dotikališči s stranicama DE in EF kvadrata $DEFG$ pa z U in V. Ker sta krožnici $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$ enako veliki, je T središče kvadrata $DEFG$, torej velja $|GE| = 2|TE|$. Štirikotnik $RUEV$ je kvadrat s stranico dolžine r_4, zato je njegova diagonala dolga $|RE| = \sqrt{2}r_4$. Od tod izrazimo $|GE| = 2|TE| = 2(|TR| + |RE|) = 2(r_4 + \sqrt{2}r_4) = (2 + 2\sqrt{2})r_4$. Iz obeh izražav dolžine $|GE|$ sledi $r_1 = (2 + 2\sqrt{2})r_4$, torej je $\frac{r_1}{r_4} = (2 + 2\sqrt{2})$.

Utemeljen sklep, da je $r_1 = 2r_2$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $|GE| = r_1$ .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice $|RE|$ .... 1 točka
Z r_4 izražena dolžina daljice $|GE|$ .... 2 točki
Zapisano razmerje $\frac{r_1}{r_4}$ .... 1 točka

B2. Če je $d \geq 2$, potem je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq 4 \cdot \frac{1}{2}=2$, kar je protislovje. Torej je $d=1$. Če je $c \geq 3$, potem je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq 3 \cdot \frac{1}{3}+1=2$, kar je spet protislovje. Torej je $c=2$. Podobno sledi, da mora biti $b=3$, saj bi sicer imeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq 2 \cdot \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=2$. Torej mora biti $\frac{1}{a}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}>2$, oziroma $\frac{1}{a}>\frac{1}{6}$. Ker je $a>b=3$, je lahko le $a=4$ ali $a=5$. Neenakostim zadoščata dve četverici, $(4,3,2,1)$ in $(5,3,2,1)$.

Utemeljena ugotovitev, da je $d=1$ .... 2 točki
Ugotovitev, da je $c=2$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $b=3$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba neenakosti $\frac{1}{a}>\frac{1}{6}$ .... 1 točka
Sklep, da je $a=4$ ali $a=5$ .... 1 točka
(Če tekmovalec obe rešitvi samo zapiše, se mu priznata le 2 točki.)

B3. Enačbo potenciramo na tretjo potenco, da dobimo

$$(2x+13)-3\left(\sqrt[3]{2x+13}\right)^2\sqrt[3]{2x-13}+3\sqrt[3]{2x+13}\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2-(2x-13)=8.$$

Nato jo preuredimo

$$26-3\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}\left(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x+13}\right)=8$$

in upoštevamo, da je $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x+13}=2$, da dobimo

$$26-6\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}=8.$$

Enačbo spet preuredimo do $\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}=3$ in potenciramo na tretjo potenco, da dobimo $(2x+13)(2x-13)=27$ oziroma $4x^2-169=27$. Od tod sledi $x^2=49$ in zato $x=\pm 7$.

Pravilno potenciranje enačbe .... 1 točka
Preureditev enačbe v $26-6\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}=8$ .... 2 točki
Potenciranje enačbe $\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}=3$ .... 1 točka
Zapis enačbe $4x^2-169=27$ .... 1 točka
Zapis obeh rešitev .... 1 točka

2. način. Enačbo preuredimo v $\sqrt[3]{2x+13}=\sqrt[3]{2x-13}+2$ in nato potenciramo na tretjo potenco, da dobimo

$$2x+13=2x-13+6\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2+12\sqrt[3]{2x-13}+8.$$

Vse člene nesemo na eno stran in poenostavimo do

$$6\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2+12\sqrt[3]{2x-13}-18=0.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y=\sqrt[3]{2x-13}$ in enačbo delimo s 6 dobimo kvadratno enačbo $y^2+2y-3=0$ oziroma $(y+3)(y-1)=0$, ki ima dve rešitvi, $y=-3$ in $y=1$. Iz enačbe za novo spremenljivko izrazimo $x=\frac{y^3+13}{2}$. Ko je $y=-3$, je $x=-7$, ko pa je $y=1$, je $x=7$. Začetna enačba ima torej dve rešitvi, $x=-7$ in $x=7$.

Potenciranje enačbe .... 1 točka
Poenostavitev enačbe v $6\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2+12\sqrt[3]{2x-13}-18=0$ .... 1 točka

Uvedba nove spremenljivke .... 1 točka
Zapisani rešitvi y_1 in y_2 .... 1 točka
Zapisani rešitvi začetne enačbe .... 2 točki
(Tekmovalec dobi vse točke tudi v primeru, če je enačbo korektno rešil brez uvedbe nove spremenljivke.)

Rešitve za 3. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
D	E	A

Utemeljitve:

A1. Ploščine treh polkrogov so enake $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}$ in $\frac{16\pi}{2}$. Ploščina območja x je zato enaka $\frac{\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$, ploščina območja y pa $\frac{\frac{16\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}}{3} = 2\pi$. Iskano razmerje je torej $\frac{3\pi}{4} : 2\pi = 3 : 8$.

A2. Če je n liho celo število, je leva stran enakosti soda, desna pa liha. Za liha cela števila torej enakost ni izpolnjena. Podobno sklepamo, če je n sodo celo število. V tem primeru je leva stran enakosti liha, desna pa soda. Torej nobeno celo število ne ustreza enakosti.

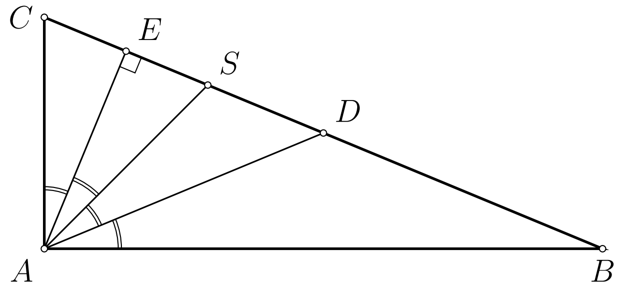
A3. Iz podatkov sledi $2015h^{2013} - 2 = -2015$ oziroma $2015h^{2013} = -2013$. Zato je $p(-h) = 2015(-h)^{2013} - 2 = -2015h^{2013} - 2 = -(-2013) - 2 = 2011$.

B1. Po izreku o deljenju je $p(x) = (2x^2 - x + 3)(2 - x) + o$, kjer je o ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $2 - x$. Ker smo delili s polinomom stopnje 1, je ostanek o neka konstanta. Torej je prosti člen polinoma $p(x) = -2x^3 + 5x^2 - 5x + (6 + o)$ enak $6 + o$, vodilni koeficient pa -2. Po Vietovem pravilu je produkt vseh ničel polinoma $p(x)$ torej enak $-\frac{6+o}{-2} = \frac{11}{2}$. Od tod izračunamo ostanek $o = 5$.

Zapis polinoma p kot $(2x^2 - x + 3)(2 - x) + o$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je o konstanta .... 1 točka
Zapis prostega člena polinoma p .... 1 točka
Uporaba Vietovega pravila .... 2 točki
Izračun ostanka .... 1 točka

B2. Naravna števila, katerih vsota števk je deljiva z 9, so natanko tista, ki so deljiva z 9. Takih števil, manjših od $100\,000$, je torej $\frac{99\,999}{9} = 11\,111$. Vsako naravno število manjše od $100\,000$ je oblike $\overline{abcde}$, kjer je vsaj ena od števk a, b, c, d in e različna od 0. Če zadnje štiri števke fiksiramo in označimo njihovo vsoto s k, potem moramo a izbrati tako, da bo $k + a$ deljivo s 5. Neglede na to, kaj je k, imamo za a natanko 2 možnosti; $a = 0, 5$, če je k deljivo s 5, $a = 4, 9$, če ima k ostanek 1 pri deljenju s 5, $a = 3, 8$, če ima k ostanek 2 pri deljenju s 5, $a = 2, 7$, če ima k ostanek 3 pri deljenju s 5, in $a = 1, 6$, če ima k ostanek 4 pri deljenju s 5. Torej zadnje štiri števke lahko izberemo poljubno, za prvo števko pa nam ostaneta dve možnosti. Takih števil je zato $10^4 \cdot 2 - 1 = 19\,999$, saj smo šteli tudi število $0 = \overline{00000}$. Prešteti moramo še števila, katerih vsota števk je deljiva s 5 in 9, torej s 45. Toda vsota števk števila manjšega od $100\,000$ je kvečjemu $5 \cdot 9 = 45$ in to le takrat, ko so vse števke enake 9. Tako število je zato eno samo, tj. $99\,999$. Števil, po katerih sprašuje naloga je torej $11\,111 + 19\,999 - 1 = 31\,109$.

Pravilno prešteta števila, katerih vsota števk je deljiva z 9 .... 1 točka
Ugotovitev, da za deljivost s 5 zadošča opazovati le eno števko .... 1 točka
Zapisane vse možnosti za opazovano števko .... 1 točka
Pravilno prešteta števila, katerih vsota števk je deljiva s 5 .... 1 točka
Pravilno prešteta števila, katerih vsota števk je deljiva s 45 .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka



B3.

Naj bo D razpolovišče stranice BC, E nožišče višine iz A, S pa presečišče simetrale kota pri A s stranico BC. Ker simetrala razdeli kot na dva enaka dela, mora simetrala nujno ležati med višino in težiščnico. Torej točka S leži med točkama E in D. Imamo dve možnosti, bodisi D leži med B in S ter E med S in C ali pa E leži med B in S ter D med S in C. Zaradi simetrije lahko obravnavamo le prvi primer.

Označimo kot $\sphericalangle BAC$ s 4α, pri čemer motra biti $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Potem je

$$|BE| = |AE| \operatorname{tg} 3\alpha, \qquad |DE| = |AE| \operatorname{tg} 2\alpha \qquad \text{in} \qquad |CE| = |AE| \operatorname{tg} \alpha.$$

Od tod izpeljemo

$$|BD| = |BE| - |DE| = |AE|(\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)$$

in

$$|CD| = |CE| + |DE| = |AE|(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha).$$

Ker je D razpolovišče stranice BC, sledi $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$ oziroma

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 0.$$

Levo stran lahko preuredimo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha}{\cos \alpha \cos 3\alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 3\alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos 3\alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = -\frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha}, \end{aligned}$$

kjer smo pri četretem enačaju upoštevali adicijski izrek za sinus

$$\sin 2\alpha = \sin(3\alpha - \alpha) = \sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha,$$

pri zadnjem enačaju pa formulo za produkt kosinusov

$$2\cos \alpha \cos 3\alpha = \cos(3\alpha + \alpha) + \cos(3\alpha - \alpha) = \cos 4\alpha + \cos 2\alpha.$$

Iz izpeljanega sledi $\sin 2\alpha = 0$ ali $\cos 4\alpha = 0$, torej je $2\alpha = k\pi$ ali $4\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker mora biti $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, je edina možnost $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Torej je $\sphericalangle BAC = 4\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{\pi}{8}$.

Z upoštevanjem obeh simetričnih primerov smo ugotovili, da so koti trikotnika ABC bodisi $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{3\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{\pi}{8}$ ali pa $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{3\pi}{8}$.

Pregledno narisana in označena skica .... 1 točka
S kotom α in $|AE|$ izražene dolžine daljic $|BE|, |DE|$ in $|CE|$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 0$ .... 1 točka
Preureditev enačbe v $-\frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha}$ .... 2 točki
Zapisana rešitev z utemeljitvijo, da je edina možna .... 1 točka

Rešitve za 4. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
D	C	C

Utemeljitve:

A1. Na turnirju je bilo odigranih $\binom{n}{2}$ tekem, torej velja $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 2015n$. Od tod izračunamo $n = 4031$.

A2. Označimo dolžino daljše stranice 7 skladnih pravokotnikov z a, dolžino krajše stranice pa z b. Potem je $|AB| = |DC| = 4b = 3a$ oziroma $b = \frac{3}{4}a$. Iskano razmerje je tako enako

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a+b}{4b} = \frac{a+\frac{3}{4}a}{3a} = \frac{\frac{7}{4}}{3} = \frac{7}{12}.$$

A3. Vsota števil $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ in $\overline{zxy}$ je enaka $100(x+y+z)+10(y+z+x)+(z+x+y)$. Ker mora biti to trimestno število, je $x+y+z<10$ in v tem primeru so vse števke tega števila avtomatično enake. Iščemo torej število trojic štvk (x, y, z), za katere velja $1 \leq x < y < z$ in $x+y+z < 10$. Takih trojic je natanko 7, to so $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$ in $(2,3,4)$. Sara ima na izbiro 7 takih trimestnih števil.

B1. Upoštevamo formule za kotne funkcije dvojnih kotov, da dobimo

$$8\sin^2 x\cos^2 x \geq 3\cos^2 x - 3\sin^2 x.$$

Z upoštevanjem zveze $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ neenakost preuredimo do

$$8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 3 \leq 0.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y = \sin^2 x$, dobimo neenačbo $8y^2 - 14y + 3 \leq 0$ oziroma $(4y-1)(2y-3) \leq 0$. Ker je $0 \leq y \leq 1$, je člen $(2y-3)$ avtomatično negativen. Dana neenakost je zato ekvivalentna neenakosti $4y - 1 \geq 0$ oziroma $\sin^2 x \geq \frac{1}{4}$. Slednja neenakost velja takrat, ko je bodisi $\sin x \geq \frac{1}{2}$, torej $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ali pa $\sin x \leq -\frac{1}{2}$, torej $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Skupna reštev so torej vsa števila x, ki zadoščajo neenakosti $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$ za neko celo število k.

Zapis ekvivalentne neenačbe z enojnimi koti .... 1 točka
Zapis neenačbe $8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 3 \leq 0$ .... 1 točka
Sklep, da je faktor $2\sin^2 x - 3$ negativen .... 1 točka
Zapis ekvivalentnih neenačb $\sin x \geq \frac{1}{2}$ ali $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapis rešitev .... 2 točki

B2. Označimo z d razliko dveh zaporednih členov tega aritmetičnega zaporedja. Po formuli za vsoto členov aritmetičnega zaporedja velja

$$S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d.$$

S pomočjo te zveze izračunamo

$$S_{n+m} = (n+m)a_1 + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2}d = (n+m)\left(a_1 + (n+m-1)\frac{d}{2}\right)$$

in

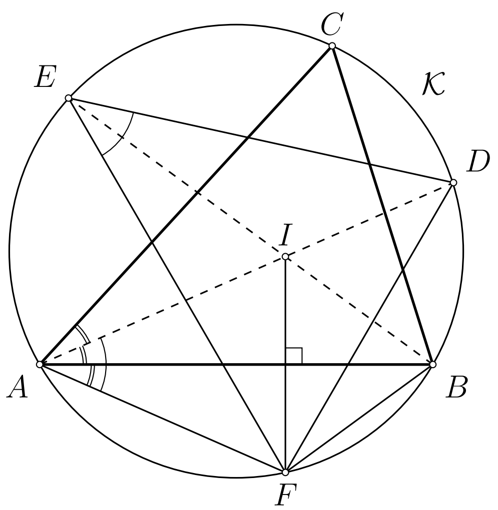
$$S_n - S_m = (n-m)a_1 + \Big(n(n-1) - m(m-1)\Big)\frac{d}{2} = (n-m)a_1 + (n-m)(n+m-1)\frac{d}{2} =$$
$$= (n-m)\left(a_1 + (n+m-1)\frac{d}{2}\right)$$

V obeh rezultatih je drugi faktor enak, zato velja

$$(n+m)(S_n - S_m) = (n-m)S_{n+m},$$

od koder sledi željena enakost, saj je $n + m \neq 0$.

Zapis formule za S_k .... 1 točka
Izračun S_{n+m} .... 2 točki
Izračun $S_n - S_m$ .... 2 točki
Utemeljitev zveze .... 1 točka



B3.

Ker sta točki D in E razpolovišči ustreznih lokov krožnice $\mathcal{K}$, ležita na simetralah kotov $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$. Zaradi zrcaljenja je $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, torej je $\sphericalangle FED = \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAC$. Podobno dobimo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CBA$. Sledi $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ACB$. Izračunajmo torej velikost kota $\sphericalangle ACB$. Točke F, B, C in A so koncikličine, zato je $\sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle BFA$. Ker je F zrcalna slika točke I, velja

$$\sphericalangle BFA = \sphericalangle AIB = \pi - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA) =$$
$$= \pi - \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle ACB) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Torej je $\sphericalangle ACB = \pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, od koder sledi $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{3}$ in zato tudi $\sphericalangle DFE = \frac{\pi}{3}$.

Pregledno narisana in označena skica .... 1 točka
Ugotovitev, da ležita točki D in E na simetralah kotov .... 1 točka
Utemeljeni sklepi, da je $\sphericalangle FED = \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CBA$
in $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ACB$ .... 1 točka
Zapis zveze $\sphericalangle BFA = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ .... 2 točki
Izračunana velikost kota $\sphericalangle DFE$ .... 1 točka