**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

**57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije**
**Regijsko tekmovanje, 4. april 2013**

Prilepi nalepko s šifro

# Naloge za 1. letnik

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.*

| A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|
| | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

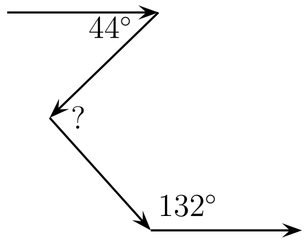
**A1.** V tovarni so posodobili opremo in produktivnost je zrasla za 25 %. Ko so odpustili nekaj delavcev, se je produktivnost zmanjšala za 20 %. Za koliko % se je po obeh spremembah spremenila produktivnost v tej tovarni?

(**A**) Zmanjšala za 5 % (**B**) Zmanjšala za 2,5 % (**C**) Zmanjšala za 2 %
(**D**) Se ni spremenila (**E**) Povečala za 5 %

**A2.** Kolikšna je vrednost zmnožka $x \cdot y$, če je $3^x = a$ in $a^y = 81$?

(**A**) $4$ (**B**) $3$ (**C**) $12$ (**D**) $0$ (**E**) $1$

**A3.** Na sliki je narisano, kako je tekel zajec, ko ga je v megli lovil volk. Najprej je tekel proti vzhodu, potem se je obrnil desno, čez nekaj časa je zavil levo in kmalu še enkrat levo. Po zadnjem zavoju je zajec zopet tekel proti vzhodu. Koliko je velik kot pri drugem zavoju?

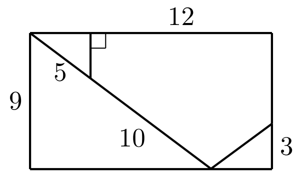



(**A**) $98^\circ$ (**B**) $96^\circ$ (**C**) $88^\circ$ (**D**) $90^\circ$ (**E**) $92^\circ$

**B1.** Naj bosta $a$ in $b$ pozitivni realni števili, katerih zmnožek je $1$, vsota njunih kvadratov pa je $4$. Izračunaj vrednost izraza $a^{-3} + b^{-3}$. Rezultat naj bo natančen.

*(6 točk)*

**B2.** Pravokotnik smo s tremi daljicami razdelili na štiri dele, tako kot je prikazano na sliki. Nato smo nastale štiri like na novo zložili v kvadrat. Koliko je obseg nastalega kvadrata? *(6 točk)*



**B3.** Ko je tretješolec Benjamin računal vsoto $1+2+3+\ldots+2012$, je izpustil nekaj členov in dobil napačno vsoto, ki je bila deljiva z 2011. Anika je pri računanju vsote $A = 1+2+3+\ldots+2013$ izpustila povsem enake člene kot Benjamin in dobila napačno vsoto $N$, ki je bila deljiva z 2014. Kolikšno je razmerje vsot $\frac{N}{A}$?

*(6 točk)*

57. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 4. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

# Naloge za 2. letnik

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.*

| A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|
| | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** Če so na blagajni kina odprte tri blagajne, morajo obiskovalci za nakup vstopnic čakati 15 min. Za koliko minut se skrajša čakalni čas, če odprejo še dve blagajni?

(**A**) $3$ (**B**) $5$ (**C**) $6$ (**D**) $7$ (**E**) $10$

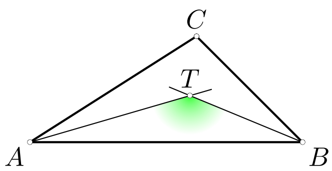
**A2.** Naj bo $x = 2^{2013}$. Koliko je vrednost izraza

$$x - \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}?$$

enaka

(**A**) $-1$ (**B**) $0$ (**C**) $1$ (**D**) $2^{2013}$ (**E**) $2$

**A3.** V trikotniku $ABC$ se simetrali kota $\sphericalangle BAC$ in kota $\sphericalangle CBA$ sekata v točki $T$. Označimo z $\gamma$ velikost kota $\sphericalangle ACB$. Koliko je velik kot $\sphericalangle ATB$?




(**A**) $2\gamma$ (**B**) $180^\circ - \gamma$ (**C**) $360^\circ - 4\gamma$
(**D**) $60^\circ + \gamma$ (**E**) $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$

**B1.** Poišči vsa naravna števila $n$ oblike $n = \overline{23ab16c}$, ki imajo same različne števke in so deljiva z $9$ in $11$. Tu so $a, b$ in $c$ števke.

*(6 točk)*

**B2.** Naj bo $O$ izhodišče koordinatnega sistema. Točko $A(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$ zavrtimo okoli $O$ za $2013\pi$ v točko $B$. Točko $B$ prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov v točko $C$. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle AOC$.

*(6 točk)*

**B3.** Dokaži, da za poljubni realni števili $a$ in $b$ velja neenakost

$$(a+ab-b^2)^2+ab^2(a+2)\geq 0.$$

Kdaj velja enakost?

*(6 točk)*

# 57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
### Regijsko tekmovanje, 4. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

## Naloge za 3. letnik

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.*

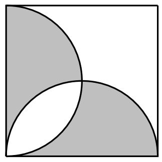
| A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|
| | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** Za funkcijo $f$ je $3f(x)+f(-x) = 4\sin x\cos x$ za vsako realno število $x$. Poišči pravilni zapis funkcije $f$.

(**A**) $\sin x$ (**B**) $\cos x$ (**C**) $\cos x \sin x$ (**D**) $\sin 2x$ (**E**) $\cos 2x$

**A2.** V kvadrat s stranico 2 narišemo dva polkroga, katerih premera sta stranici kvadrata, kot kaže slika. Kolikšna je ploščina neosenčenega dela kvadrata?



(**A**) $\frac{\pi}{2}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}$ (**D**) $\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{3\pi}{4}$

**A3.** V čredi so jeleni in košute. Košute predstavljajo $55\ \%$ črede, njihova masa pa predstavlja $45\ \%$ mase celotne črede. Kolikšno je razmerje med povprečno maso jelena in povprečno maso košute?

(**A**) $\frac{81}{40}$ (**B**) $\frac{3}{2}$ (**C**) $\frac{121}{81}$ (**D**) $\frac{11}{9}$ (**E**) $\frac{6}{5}$

**B1.** Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $m^4 + 2n^2 = 9mn$.

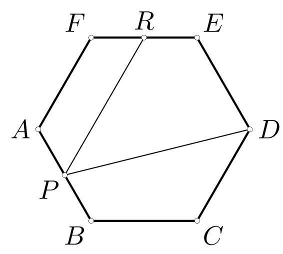
*(6 točk)*

**B2.** Poišči vsa realna števila $x$, ki zadoščajo enačbi

$$\log_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2.$$

*(6 točk)*

**B3.** Naj bo $ABCDEF$ pravilni šestkotnik, $P$ razpolovišče stranice $AB$ in $R$ razpolovišče stranice $EF$, kot je prikazano na sliki. Kolikšno je razmerje med ploščino štirikotnika $APRF$ in ploščino štirikotnika $BCDP$? *(6 točk)*



**57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije**
**Regijsko tekmovanje, 4. april 2013**

Prilepi nalepko s šifro

## Naloge za 4. letnik

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.*

| A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|
| | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** V posodi imamo 10 kroglic, treh različnih barv: modre, rumene in zelene. V vrsto jih lahko postavimo na 360 različnih načinov. Največ koliko modrih kroglic je lahko v posodi?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

**A2.** Za funkcijo $f$ vemo, da je $f(x) = x^2 + 1$. Koliko je $\frac{f(f(x)+x)}{f(x)}$?

(**A**) $x^2 + x + 1$ (**B**) $x^2 + 2x + 2$ (**C**) $x^2 + 1$
(**D**) $x^2 + 2x + 1$ (**E**) $x^2 + x$

**A3.** Poltraka iz oglišča $A$ enotskega kvadrata $ABCD$ razdelita pravi kot na tri enako velike kote. Eden izmed poltrakov seka stranico $BC$ v točki $T$. Koliko je dolga daljica $BT$?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (**E**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**B1.** Poišči vse četverice neničelnih števk $a$, $b$, $c$ in $d$, za katere velja $\overline{ab20} - \overline{13cd} = \overline{cdab}$.

*(6 točk)*

**B2.** Dokaži, da je vsak tangenten štirikotnik, katerega diagonali se sekata pod pravim kotom, deltoid.

*(6 točk)*

**B3.** Žan je zapisal zaporedje štirih pozitivnih realnih števil. Prvi člen zaporedja je bilo število $3$, zadnji člen pa število $9$. Prvi trije členi so oblikovali geometrijsko zaporedje, zadni trije členi pa aritmetično zaporedje. Določi vse štiri člene Žanovega zaporedja.

*(6 točk)*

# 57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Regijsko tekmovanje, 4. april 2013

## Rešitve za 1. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| D | A | E |

*Utemeljitve:*

**A1.** Če so na začetku v tovarni izdelali $x$ izdelkov, potem so po posodobitvi opreme izdelali $\frac{125}{100} \cdot x$ izdelkov, po odpuščanju pa $\frac{80}{100} \cdot \frac{125}{100} \cdot x = x$ izdelkov. Število končnih izdelkov se torej ni spremenilo. Pravilen odgovor je $D$.

**A2.** Ker je $81 = a^y = (3^x)^y = 3^{xy}$, je $xy = 4$. Pravilen odgovor je torej $A$.

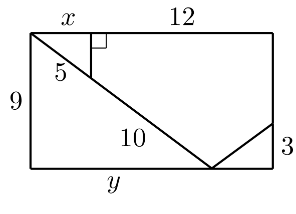
**A3.** Prvi in zadnji del poti zajca sta si vzporedni. Če dorišemo vzporednico še skozi drugi zavoj, je zaradi vzporednosti $\alpha = 44°$ in $\beta = 180° - 132° = 48°$. Kot pri drugem zavoju je torej enak $\alpha + \beta = 92°$. Pravilen odgovor je $E$.

**B1.** Ker je $a^2 + b^2 = 4$ in $ab = 1$, je $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2 = 6$ oziroma $a + b = \sqrt{6}$, saj sta $a$ in $b$ pozitivni števili. Sledi

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 b^3} = \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{a^3 b^3} = \frac{6\sqrt{6} - 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{6}}{1} = 3\sqrt{6}.$$

**Ugotovitev, da je $a + b = \sqrt{6}$** .................................................. **2 točki**
**Preoblikovanje izraza v $\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}$** .................................... **1 točka**
**Zapis števca v obliki $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$** ................................. **2 točki**
**Vstavljeni podatki in izračunan končni rezultat** .......................... **1 točka**

**B2.** Privzemimo oznake s skice. Po Pitagorovem izreku je $y = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$. Iz podobnosti obeh levih pravokotnih trikotnikov sledi $\frac{x}{5} = \frac{y}{15}$ oziroma $x = \frac{y}{3} = 4$. Pravokotnik ima torej stranici dolgi $9$ in $16$, torej je njegova ploščina $144$. Torej bo tudi ploščina kvadrata enaka $144$. Zato bo stranica kvadrata dolga $12$, obseg kvadrata pa bo $48$.




**Izračunan $y = 12$** ............................................................ **1 točka**
**Izračunan $x = 4$** ............................................................. **2 točki**
**Ugotovitev, da sta stranici pravokotnika dolgi 9 in 16** .................. **1 točka**
**Izračunana ploščina kvadrata** ............................................... **1 točka**
**Izračunan obseg kvadrata** .................................................... **1 točka**

**B3.** Označimo vsoto členov, ki jih Benjamin izpustil z $x$. Ker je $1+2+3+\ldots+2012=\frac{2012\cdot 2013}{2}=1006\cdot 2013$, je Benjamin za rezultat dobil $1006\cdot 2013-x$. Torej obstaja nenegativno celo število $m$, da je $1006\cdot 2013-x=2011m$. Ker je $A=1+2+3+\ldots+2013=\frac{2013\cdot 2014}{2}=2013\cdot 1007$, je Anika za rezultat dobila $N=2013\cdot 1007-x$. Torej obstaja nenegativno celo število $n$, da je $2013\cdot 1007-x=2014n$. Če iz obeh enakosti izrazimo $x$ in rezultata izenačimo, dobimo $1006\cdot 2013-2011m=2013\cdot 1007-2014n$ oziroma $2014n-2011m-2013=0$. Slednjo enakost lahko preuredimo v $2011(n-m)=2013-3n$. Ker je $2014n=2013\cdot 1007-x\leq 2013\cdot 1007$, je $n\leq\frac{2013\cdot 1007}{2014}<1007$. Torej je $-1008<2013-3n\leq 2013$. Hkrati je $2013-3n$ deljivo s 3 in iz enakosti sledi, da je deljivo tudi z 2011. Edina možnost je torej $2013-3n=0$ oziroma $n=671$. Od tod izračunamo $\frac{N}{A}=\frac{2014n}{2013\cdot 1007}=\frac{2014\cdot 671}{2013\cdot 1007}=\frac{2}{3}$.

**Zapis Benjaminovega rezultata kot večkratnika števila 2011 ............. 2 točki**
**Zapis Anikinega rezultata kot večkratnika števila 2014 .................. 1 točka**
**Zapis enačbe $2014n-2011m-2013=0$ .................................. 1 točka**
**Ugotovitev, da je $n=671$ ................................................ 1 točka**
**Izračunano razmerje vsot $\frac{N}{A}=\frac{2}{3}$ ........................................ 1 točka**
**(Če tekmovalec razmerje le zapiše, se mu priznata 2 točki.)**

# Rešitve za 2. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| C | B | E |

*Utemeljitve:*

**A1.** Če so odprte $3$ blagajne je čakalni čas $15$ min. Če je odprta $1$ blagajna je čakalni čas 3-krat daljši, torej $45$ min. Če je odprtih $5$ blagajn, je čakalni čas $\frac{45}{5} = 9$ min. Če odprejo še dve blagajni se torej čakalni čas skrajša za $15 - 9 = 6$ min. Pravilen odgovor je $C$.

**A2.** Ko izraz damo na skupni imenovalec in preuredimo, dobimo

$$\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})+1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(x^2-(x^2+1))+1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Pravilen odgovor je $B$.

**A3.** Velja $\sphericalangle ATB = 180^\circ - \sphericalangle BAT - \sphericalangle TBA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Ker je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, je $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Torej je $\sphericalangle ATB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Pravilen odgovor je $E$.

**B1.** Število $n$ je deljivo z $99$. Zapišemo lahko

$$\begin{aligned}
n &= \overline{23ab1}\cdot 100 + 60 + c = \overline{23ab1}\cdot 99 + \overline{23ab1} + 60 + c = \\
&= \overline{23ab1}\cdot 99 + \overline{23a}\cdot 100 + 10b + 1 + 60 + c = \\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99 + \overline{23a})\cdot 99 + \overline{23a} + 10b + c + 61 = \\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99 + \overline{23a})\cdot 99 + 230 + a + 10b + c + 61 = \\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99 + \overline{23a} + 2)\cdot 99 + a + 10b + c + 93,
\end{aligned}$$

torej $99$ deli $a + 10b + c + 93$. Ker so $a, b$ in $c$ različne števke, ki niso enake $1, 2, 3$ ali $6$, je $a+10b+c \geq 4+0+5 = 9$ in $a+10b+c \leq 7+90+8 = 105$, torej je $102 \leq a+10b+c+93 \leq 198$. Ker pa je $a + 10b + c + 93$ deljivo z $99$, mora biti $a + 10b + c + 93 = 198$, od koder sledi $b = 9$ in $\{a, c\} = \{7, 8\}$. Imamo torej dve rešitvi, $n = 2379168$ in $n = 2389167$.

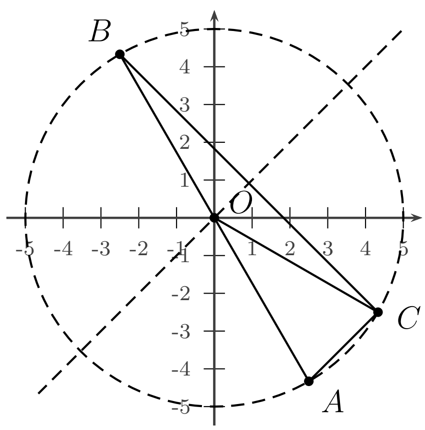
**Ugotovitev, da je število $n$ deljivo z 99 .................................. 1 točka**
**Zapis števila $n$ kot $k \cdot 99 + a + 10b + c + 93$ ............................. 2 točki**
**Ocena $102 \leq a + 10b + c + 93 \leq 198$ ali uporaba ocene pri zapisu rešitev .. 2 točki**
**Zapis obeh rešitev ....................................................... 1 točka**
**(Če tekmovalec le zapiše obe rešitvi, dobi 1 točko.)**

**2. način.** Z uporabo kriterija za deljivost z $9$ in $11$, dobimo, da mora biti $2 + 3 + a + b + 1 + 6 + c = a + b + c + 12$ deljivo z $9$ in $2 - 3 + a - b + 1 - 6 + c = a - b + c - 6$ deljivo z $11$. Ker so $a, b$ in $c$ različne števke, ki niso enake $1, 2, 3$ ali $6$, je $a + b + c + 12 \leq 9 + 8 + 7 + 12 = 36$ in

$a+b+c+12 \geq 0+4+5+12 = 21$, torej je $a+b+c+12$ lahko enako le $27$ ali $36$. Podobno je $a-b+c-6 \leq 9-0+8-6 = 11$ in $a-b+c-6 \geq 0-9+4-6 = -11$, torej je $a-b+c-6$ lahko enako le $-11, 0$ ali $11$. Od tod sledi, da je $(a+b+c+12)-(a-b+c-6) = 2b+18$ lahko enako le $16, 25, 27, 36, 38, 47$. Ker pa je $2b+18$ sodo število med $18$ in $36$, mora biti enako $36$, hkrati pa od tod sledi $a+b+c+12 = 36$ in $a-b+c-6 = 0$. Torej je $b = 9$ in $a+c = 15$. Ker sta $a$ in $c$ različni od $b$, mora biti $\{a, c\} = \{7, 8\}$. Imamo torej dve rešitvi, $n = 2379168$ in $n = 2389167$.

**Up. kriterija za deljivost z 9 in ugotovitev, da je $a+b+c+12$ deljivo z 9 . 1 točka**
**Up. kriterija za deljivost z 11 in ugotovitev, da je $a-b+c-6$ je deljivo z 11 ... 1 točka**
**Ugotovitev, da je $a+b+c+12$ lahko le $27$ ali $36$ ........................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $a-b+c-6$ lahko le $-11$, $0$ ali $11$ .................. 1 točka**
**Sklep, da je $b=9$ in $a+c=15$ ........................................ 1 točka**
**Zapis obeh rešitev ........................................................ 1 točka**
**(Če tekmovalec le zapiše obe rešitvi, dobi 1 točko.)**

**B2.** Koordinati točke $B$ sta $(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$, koordinati točke $C$ pa $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2})$. Vse tri točke ležijo na krožnici s središčem v $O$ in polmerom $5$. Iz vrednosti kotnih funkcij $\sin(-30°) = -\frac{1}{2}$ in $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ razberemo, da $OC$ oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot $30°$. Podobno iz $\sin(-60°) = -\frac{1}{2}$ in $\cos(-60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sledi, da $OA$ oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot $60°$. Od tod izračunamo $\sphericalangle AOC = 30°$.




**Zapis koordinat točke $B$ ................................................ 1 točka**
**Zapis koordinat točke $C$ ................................................ 1 točka**
**Ugotovitev, da ležijo točke $A, B$ in $C$ na krožnici s središčem $O$ in polmerom 5 ........................................................ 1 točka**
**Utemeljena ugotovitev, da oklepa poltrak $OC$ s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot $30°$ ........................................ 1 točka**
**Utemeljena ugotovitev, da oklepa poltrak $OA$ s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot $60°$ ........................................ 1 točka**
**Izračunan kot $\sphericalangle AOC$ ............................................ 1 točka**

**2. način.** Po formuli za razdaljo med dvema točkama izračunamo $|OA| = 5$, $|OC| = 5$ in $|AC| = \sqrt{25(2-\sqrt{3})}$. Od tod po kosinusnem izreku sledi

$$\cos(\sphericalangle AOC) = \frac{|OA|^2 + |OC|^2 - |AC|^2}{2|OA||OC|} = \frac{25+25-25(2-\sqrt{3})}{100} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

torej je $\sphericalangle AOC = 30°$.

**Izračunani razdalji $|OA|$ in $|OC|$ .......... 1 točka**
**Izračunana razdalja $|AC|$ .......... 1 točka**
**Zapisan kosinusni izrek .......... 1 točka**
**Izračunan $\cos(\sphericalangle AOC)$ .......... 2 točki**
**Izračunan kot $\sphericalangle AOC$ .......... 1 točka**

**B3.** Levo stran neenakosti zmnožimo, da dobimo $a^2 + a^2b^2 + b^4 + 2a^2b - 2ab^3 + a^2b^2$. Ta izraz lahko preoblikujemo v $a^2(1+b)^2 + b^2(b-a)^2$, od koder željena neenakost očitno sledi. Hkrati vidimo, da enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b = 0$ ali $a = b = -1$.

**Zmnožena leva stran neenakosti .......... 1 točka**
**Zapis leve strani neenakosti v $a^2(1+b)^2 + b^2(b-a)^2$ .......... 2 točki**
**Sklep, da neenakost velja .......... 1 točka**
**Sklep, da enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b = 0$ ali $a = b = -1$ .......... 2 točki**
**(Če tekmovalec le zapiše obe možnosti veljavne enakosti, dobi 1 točko.)**

## Rešitve za 3. letnik

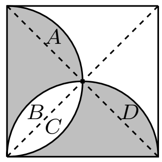
V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| D | B | C |

*Utemeljitve:*

**A1.** Iz enakosti izrazimo $f(x) = \frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(-x)$. Če v enakost vstavimo $-x$ namesto $x$ in upoštevamo, da je sinus liha funkcija, cosinus pa soda funkcija, dobimo $f(-x) = \frac{4}{3}\sin(-x)\cos(-x) - \frac{1}{3}f(x) = -\frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(x)$. Ko slednje vstavimo v prvo enakost, dobimo $f(x) = \frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}(-\frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(x)) = (\frac{4}{3} + \frac{4}{9})\sin x\cos x + \frac{1}{9}f(x)$. Enakost preuredimo v $\frac{8}{9}f(x) = \frac{16}{9}\sin x\cos x$. Od tod sledi $f(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$. Pravilen odgovor je $D$.

**A2.** Če na skici dorišemo obe diagonali, opazimo, da imajo kosi $A, B, C$ in $D$ enake ploščine. Ploščina neosenčenega dela kvadrata je zato enaka polovici ploščine kvadrata, to je $\frac{4}{2} = 2$. Pravilen odgovor je $B$.




**A3.** Denimo, da je v čredi skupaj $x$ živali s skupno težo $y$. Potem je v čredi $\frac{55}{100}x$ košut s skupno težo $\frac{45}{100}y$ in $\frac{45}{100}x$ jelenov s skupno težo $\frac{55}{100}y$. Povprečna teža košute je torej $\frac{45}{100}y : \frac{55}{100}x = \frac{9y}{11x}$, povprečna teža jelena pa $\frac{55}{100}y : \frac{45}{100}x = \frac{11y}{9x}$. Povpreča teža jelena je torej $\frac{11y}{9x} : \frac{9y}{11x} = \frac{121}{81}$-krat večja od povprečne teže košute. Pravilen odgovor je $C$.

**B1.** Če je par $(m, n)$ rešitev enačbe, potem je rešitev enačbe tudi par $(-m, -n)$, zato lahko predpostavimo, da je $m$ nenegtiven. Enačbo preoblikujemo v $2n^2 - 9mn + m^4 = 0$ in jo pogledamo kot kvadratno enačbo v $n$. Njena diskriminanta je $81m^2 - 8m^4$. Če naj ima kvadratna enačba celoštevilsko rešitev, mora biti njena diskriminanta popoln kvadrat. Torej je $81 - 8m^2$ popoln kvadrat. V posebnem mora biti $81 - 8m^2 \geq 0$, torej je $m \leq 3$. Preverimo lahko, da je $81 - 8m^2$ popoln kvadrat za $m = 0$, $m = 2$ in $m = 3$. Pri $m = 0$ je rešitev kvadratne enačbe $n = 0$, pri $m = 2$ sta rešitvi $n = 1$ in $n = 8$, pri $m = 3$ pa je edina celoštevilska rešitev $n = 9$. Vse celoštevilske rešitve enačbe so torej pari $(-3, -9)$, $(-2, -8)$, $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 8)$ in $(3, 9)$.

**Ugotovitev, da zraven para $(m, n)$ enačbo reši tudi par $(-m, -n)$ ......... 1 točka**
**Preoblikovanje enačbe v $2n^2 - 9mn + m^4$ .................................. 1 točka**
**Reševanje kvadratne enačbe glede na spremenljivko $n$ in izračun diskriminante ........................................................ 1 točka**
**Ugotovitev, da mora biti diskriminanta nenegativna in popoln kvadrat .. 1 točka**
**Izračunane vse tri možnosti za število $m$ ............................ 1 točka**
**Zapisanih vseh 7 parov rešitev ........................................ 1 točka**
**(Če tekmovalec samo zapiše vsaj 3 pare rešitev (in ne vseh rešitev), dobi 1 točko. Če tekmovalec samo zapiše vseh 7 parov rešitev, dobi 2 točki.)**

**B2.** Ker mora biti osnova logaritma pozitivna in različna od 1, je $\sin x > 0$ in $\sin x \neq 1$. Poleg tega mora biti $\frac{1}{2}\sin 2x > 0$, saj je logaritem definiran le za pozitivna števila. Če to velja, lahko z upoštevanjem definicije logaritma enačbo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$ oziroma $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$. Ker mora biti $\sin x > 0$, sledi $\sin x - \cos x = 0$. Če bi bil $\cos x = 0$, bi moral biti tudi $\sin x = 0$, kar pa ni mogoče. Torej lahko delimo s $\cos x$, da dobimo $\tan x = 1$. Od tod dobimo rešitve $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ in $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k$ celo število. Toda $\sin(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, torej so rešitve enačbe le $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k$ celo število.

**Ugotovitvi $\sin x > 0$ in $\sin x \neq 1$ ........ 1 točka**
**Ugotovitev, da mora biti $\frac{1}{2}\sin 2x > 0$ ........ 1 točka**
**Preoblikovanje enačbe v $\sin^2 x = \sin x \cos x$ ........ 1 točka**
**Sklep, da je $\sin x - \cos x = 0$ oz. $\tan x = 1$ ........ 1 točka**
**Zapis samo pravilne rešitve enačbe ........ 2 točki**
**(Če tekmovalec nepravilne rešitve ne izključi, mu pri zapisu rešitev priznamo le 1 točko.)**

**B3.** Označimo dolžino stranice pravilnega šestkotnika z $a$. Štirikotnik $APRF$ je trapez z višino $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, torej je njegova ploščina enaka $P_{APRF} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{|PR|+|AF|}{2} = \frac{a\sqrt{3}(\frac{3}{2}a+a)}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^2}{16}$. Trikotnik $PBD$ ima stranico dolgo $|BD| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$ in višino $|PB| = \frac{a}{2}$, torej je njegova ploščina enaka $P_{PBD} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Trikotnik $BCD$ ima stranico dolgo $|BD| = \sqrt{3}a$ in višino $\frac{a}{2}$, torej je njegova ploščina spet enaka $P_{BCD} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Ploščina štirikotnika $BCDP$ je torej $P_{BCDP} = P_{PBD} + P_{BCD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. Razmerje med ploščinama je enako $\frac{P_{APRF}}{P_{BCDP}} = \frac{5}{8}$.

**Izračunana ploščina trapeza $APRF$ ........ 2 točki**
**Izračunana dolžina stranice $BD$ ........ 1 točka**
**Izračunana ploščina trikotnika $PBD$ ........ 1 točka**
**Izračunana ploščina štirikotnika $BCDP$ ........ 1 točka**
**Izračunano razmerje ploščin ........ 1 točka**

## Rešitve za 4. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

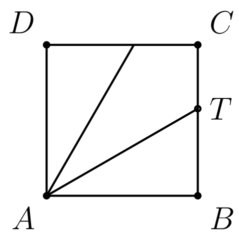
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| D | B | D |

*Utemeljitve:*

**A1.** Označimo število modrih, rumenih in zelenih kroglic po vrsti z $m$, $r$ in $z$, kjer je $m + r + z = 10$. Te kroglice lahko v vrsto postavimo na $\frac{10!}{m!r!z!}$ različnih načinov. Torej je $\frac{10!}{m!r!z!} = 360$. Slednjo enakost lahko preuredimo v $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (m+1) = 360 \cdot r! \cdot z!$. Od tod sledi $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (m+1) \geq 360 = 10 \cdot 9 \cdot 4$, torej mora biti $m + 1 \leq 8$ oziroma $m \leq 7$. Če imamo na primer $m = 7$, $r = 2$ in $z = 1$, potem je $\frac{10!}{m!r!z!} = \frac{10!}{7!2!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} = 360$. V posodi je lahko največ 7 modrih kroglic. Pravilen odgovor je $D$.

**A2.** Če upoštevamo predpis funkcije $f$, dobimo $\frac{f(f(x)+x)}{f(x)} = \frac{(x^2+1+x)^2+1}{x^2+1} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+1}$. Ko polinoma zdelimo, dobimo rezultat $x^2 + 2x + 2$. Pravilen odgovor je torej $B$.

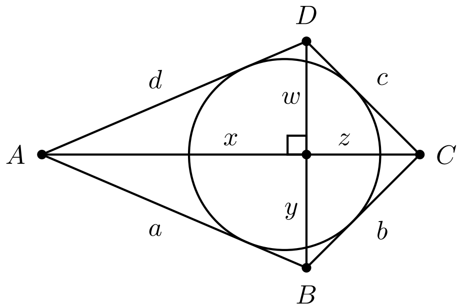
**A3.** Iz podatkov naloge izračunamo $\sphericalangle BAT = 30^\circ$. Ker je $\tan(\sphericalangle BAT) = \frac{|TB|}{|AB|}$, sledi $|TB| = |AB| \tan 30^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pravilen odgovor je $D$.




**B1.** Enačbo prepišemo v $\overline{cdab} + \overline{13cd} = \overline{ab20}$. Ker sta $b$ in $d$ neničelni števki, iz enačbe za enice dobimo $b + d = 10$. Slednje odštejemo na obeh straneh enačbe, da dobimo $\overline{cda0} + \overline{13c0} = \overline{ab10}$, in nato enačbo delimo z 10, da dobimo $\overline{cda} + \overline{13c} = \overline{ab1}$. Ker sta $a$ in $c$ neničelni števki, njuna vsota ne more biti enaka 1, zato iz enačbe za enice sledi $a + c = 11$. Slednje spet odštejemo na obeh straneh enačbe in enačbo delimo z 10, da dobimo $\overline{cd} + \overline{13} = \overline{a(b-1)}$, saj je $b - 1 \geq 0$. Obravnavamo dve možnosti. Če je $d \leq 6$, potem mora biti $d + 3 = b - 1$ in $c + 1 = a$. Iz vseh dobljenih enačb poračunamo, da je $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$ in $d = 3$. Če pa je $d \geq 7$, potem mora biti $d + 3 = 10 + (b - 1)$ in $c + 1 = a - 1$. Toda v tem primeru iz enačb poračunamo $c = \frac{9}{2}$, kar pa je protislovje. Edina rešitev enačbe je torej $(a, b, c, d) = (6, 7, 5, 3)$.

**Ugotovitev, da je $b + d = 10$ .............................................. 1 točka**
**Ugotovitev, da je $a + c = 11$ .............................................. 1 točka**
**Zapis enačbe $\overline{cd} + \overline{13} = \overline{a(b-1)}$ ........................................ 1 točka**
**Obravnava možnosti $d \leq 6$ in zapis zvez med števkami ................. 1 točka**
**Zapis rešitev $a = 6, b = 7, c = 5$ in $d = 3$ .................................. 1 točka**
**Obravnava možnosti $d \geq 7$ in ugotovitev, da rešitev ni ................... 1 točka**
**(Če tekmovalec rešitev samo zapiše, dobi 1 točko.)**

**B2.** Privzemimo oznake s skice. Po Pitagorovem izreku velja $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + w^2$ in $d^2 = w^2 + x^2$. Od tod sledi $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Ker pa je štirikotnik tangenten, velja $a + c = b + d$. Če to enakost kvadriramo in upoštevamo enakost s kvadrati, dobimo $2ac = 2bd$ oziroma $ac = bd$. Ko v to enakost vstavimo $a = b + d - c$, dobimo $c^2 - (b + d)c + bd = 0$, kar lahko razstavimo kot $(c - b)(c - d) = 0$. Torej je $c = b$ in zato $a = d$ ali pa $c = d$ in zato $a = b$. V obeh primerih je štirikotnik deltoid.




**Pregledno narisana in označena skica ..................................... 1 točka**
**Zapisan Pitagorov izrek za stranice $a, b, c$ in $d$ ............................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ........................................ 1 točka**
**Sklep, da je $a + c = b + d$, ker je štirikotnik tangenten ..................... 1 točka**
**Ugotovitev, da je $ac = bd$ ........................................................ 1 točka**
**Utemeljen sklep, da je štirikotnik deltoid ...................................... 1 točka**

**B3.** Označimo drugi in tretji člen Žanovega zaporedja z $x$ in $y$. Potem je $3, x, y$ geometrijsko zaporedje, zato velja $x^2 = 3y$. Hkrati je $x, y, 9$ aritmetično zaporedje, zato je $2y = x + 9$. Iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{x+9}{2}$. Ko slednje vstavimo v prvo enačbo in enačbo preuredimo, dobimo $2x^2 - 3x - 27 = 0$ oziroma $(2x - 9)(x + 3) = 0$. Ker je $x$ pozitiven, je $x = \frac{9}{2}$. Od tod izračunamo še $y = \frac{27}{4}$. Žanovo zaporedje je torej $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 9$.

**Zapis enačbe $x^2 = 3y$ ........................................................ 2 točki**
**Zapis enačbe $2y = x + 9$ ...................................................... 1 točka**
**Preureditev prve enačbe v $2x^2 - 3x - 27 = 0$ ................................ 1 točka**
**Izračunan $x$ ....................................................................... 1 točka**
**Zapisano zaporedje ................................................................. 1 točka**
**(Če tekmovalec ni izključil rešitve $x = -3$, se mu 1 točka odšteje.)**