**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 1. april 2009

Naloge za 1. letnik

1. Na tekmovanju je bilo 24 nalog izbirnega tipa. Če tekmovalec ni obkrožil nobenega odgovora ali je obkrožil več kot 1 odgovor, je prejel 0 točk. Za obkrožen pravilni odgovor je tekmovalec prejel 1 točko, za obkrožen napačni odgovor pa so mu odšteli $\frac{1}{4}$ točke. Pri največ koliko nalogah je obkrožil pravilni odgovor, če je zbral 13 točk?

2. Dan je trikotnik ABC, v katerem velja $|AB| = 2|AC|$. Na stranicah AB in BC ležita takšni točki D in E, da velja $\angle BAE = \angle ACD$. Daljici AE in CD se sekata v točki F, trikotnik CFE pa je enakostraničen. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

3. Dokaži, da velja neenakost
$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y)$$
za poljuben par realnih števil x in y. Kdaj velja enakost?

4. Poišči vsa racionalna števila r in vsa cela števila k, ki zadoščajo enačbi
$$r(5k - 7r) = 3.$$

5. Vsaka šola iz neke pokrajine je poslala 3 dijake na tekmovanje. Andrej, Blaž in Žan so predstavljali isto šolo. Ko so se vsi tekmovalci postavili v vrsto, da bi prevzeli svoje štartne številke, je Andrej ugotovil, da je tekmovalcev v vrsti pred njim prav toliko kot za njim. Za njim sta bila tudi oba sošolca: Blaž je bil 19. v vrsti, Žan pa 28. Koliko šol je sodelovalo na tekmovanju?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

© 2009 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 1. april 2009

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vsa naravna števila m in n, za katera velja $m^2 + n^5 = 252$.

2. Naj bo x tako realno število, da je $x + \frac{1}{x} + 1$ naravno število. Dokaži, da je tudi $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ naravno število, ki je deljivo z $x + \frac{1}{x} + 1$.

3. Diagonala BD štirikotnika $ABCD$ razdeli štirikotnik na ostrokotni trikotnik ABD in enakostranični trikotnik BCD. Naj bo O središče trikotniku ABD očrtane krožnice. Dokaži:

   (a) če sta trikotnika ABD in OCD skladna, je $AB \perp BC$;

   (b) če je $\angle CBA = 90^\circ$, sta trikotnika ABD in OCD skladna.

4. Določi taki celi števili a in b, da bo $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ rešitev kvadratne enačbe
$$x^2 + ax + b = 0.$$
   Dokaži, da pri tako določenih a in b število $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ ni rešitev dane enačbe.

5. Na neki šoli imajo dijaki na voljo dva športa: nogomet in košarko. Petina nogometašev igra košarko, sedmina košarkašev pa igra nogomet. Z natanko enim športom se ukvarja 110 dijakov. Koliko dijakov se ukvarja z obema športoma?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

© 2009 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 1. april 2009

Naloge za 3. letnik

1. Med vsemi polinomi z vodilnim koeficientom 1, ki pri deljenju z $x+1$ dajo ostanek 1, pri deljenju z x^2+1 pa ostanek 2, poišči tistega, ki ima najnižjo stopnjo.

2. Neko naravno število je zapisano samo s števkami 0, 3 in 7. Pokaži, da to število ne more biti popoln kvadrat.

3. V trikotniku ABC je točka D nožišče višine na stranico AB. Dani sta točki E na daljici AD ter F na stranici BC, da velja $\angle BAF = \angle ACE$. Daljici AF in CE se sekata v točki G, daljici AF in CD pa v točki T. Določi velikosti kotov trikotnika ABC, če je trikotnik CGF enakostraničen, trikotnik AET pa enakokrak z vrhom E.

4. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe
$$y = (x+y)(2x+3y).$$

5. Učiteljica je povabila skupino otrok, da se posedejo za okroglo mizo. Fantov je bilo trikrat toliko kot deklet. Sprehodila se je okrog mize in opazovala dvojice otrok, ki so sedeli eden poleg drugega. Ugotovila je, da je dvojic, v katerih sta oba otroka istega spola, dvakrat toliko kot dvojic, v katerih sta otroka različnega spola. Najmanj koliko otrok je sedelo za okroglo mizo?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

© 2009 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 1. april 2009

Naloge za 4. letnik

1. Naj bo (a_n) nekonstantno aritmetično zaporedje s prvim členom $a_1 = 1$. Členi a_2, a_5, a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje. Izračunaj vsoto prvih 2009 členov zaporedja (a_n).

2. Poišči vsa naravna števila n, pri katerih je vrednost izraza $[\frac{n^2}{4}]$ kvadrat celega števila.

   OPOMBA. S $[x]$ označimo celi del števila x, to je največje celo število, ki je manjše ali enako x.

3. Tetivnemu štirikotniku $ABCD$ je očrtana krožnica, ki jo simetrali kotov $\angle CAD$ in $\angle ADB$ sekata zaporedoma v P in Q. Premici AP in DQ se sekata v R, premici CQ in BP pa v S. Dokaži, da sta premici PQ in RS pravokotni.

4. Naj bo x tako realno število, da je

$$\cos(2x) + \cos(3x) = 1.$$

   Pokaži, da tedaj velja

$$2\sin(2x) + 2\sin(3x) = \sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x).$$

5. Jure je narisal pravilni 9-kotnik. Števila od 1 do 9 je želel razporediti v njegova oglišča tako, da vsota števil v poljubnih treh zaporednih ogliščih ne bi presegala nekega naravnega števila n. Za katero najmanjše število n bi mu to uspelo?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

© 2009 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 1. april 2009

Rešitve nalog

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. 1. način. Označimo s P število nalog, pri katerih je tekmovalec prejel 1 točko in z N število nalog, pri katerih so mu $\frac{1}{4}$ točke odšteli. Tedaj velja $P - \frac{1}{4}N = 13$ oziroma $N = 4P - 52$. Ker je vseh nalog 24, sledi $P + N \leq 24$ oziroma $5P - 52 \leq 24$. Torej je $5P \leq 76$ in zato $P \leq 15$. Največja vrednost P je 15 ter je možna, če je $N = 8$.

Uvedba oznak P in N (lahko tudi S za naloge, ki jih ni reševal) ....1 točka
Zapis enačbe $P - \frac{1}{4}N = 13$ .... 1 točka
Zapis ocene $P + N \leq 24$ (ali enačbe $P + N + S = 24$) .... 1 točka
Sklep $P \leq 15$ ....2 točki
Zapis primera (ali vrednosti N), ko je $P = 15$ .... 2 točki

2. način. Tekmovalec je zbral 13 točk, če je pravilno rešil 15 nalog, napačno 8 nalog, pri eni pa ni odgovarjal ali pa je obkrožil več kot en odgovor.

Če bi tekmovalec pravilno rešil vsaj 16 nalog in bi zbral 13 točk, bi moral dobiti vsaj 3 negativne točke, zato bi moral vsaj $3 \cdot 4 = 12$ nalog rešiti napačno. Ker pa je skupaj 24 nalog in je $16 + 12 = 28 > 24$, to ni možno. Zato je pravilno rešil največ 15 nalog.

Zapis primera s pravilno rešenimi 15 nalogami ....2 točki
Sklep, da iz 13 točk in vsaj 16 pravilnih odgovorov sledi vsaj 12 napačnih .....2 točki
Ugotovitev, da je tedaj nalog vsaj 28 .... 2 točki
Sklep, da je pravilno rešil največ 15 nalog .... 1 točka
(Če je obravnavan primer s 16 pravilnimi odgovori, primeri s po $17, 18, \ldots, 24$ pravilnimi odgovori pa ne, dodelite največ 4 točke.)

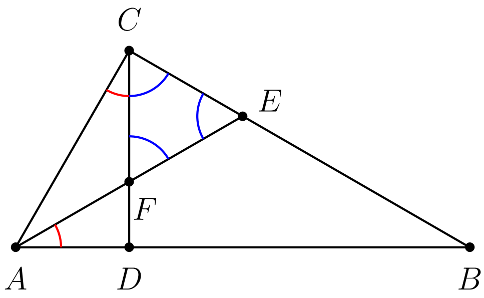
3. način. Tekmovalec je zbral 13 točk, če je pravilno rešil 15 nalog, napačno 8 nalog, pri eni pa ni odgovarjal ali pa je obkrožil več kot en odgovor.

Če bi tekmovalec pravilno rešil vsaj 16 nalog, bi jih največ $24 - 16 = 8$ rešil napačno in bi dobil vsaj $16 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 14$ točk. Ker je prejel 13 točk, to ni možno. Zato je pravilno rešil največ 15 nalog.

Zapis primera s pravilno rešenimi 15 nalogami ....2 točki
Sklep, da iz vsaj 16 pravilnih odgovorov sledi največ 8 napačnih .... 2 točki
Ugotovitev, da je tedaj prejel vsaj 14 točk .... 2 točki
Sklep, da je pravilno rešil največ 15 nalog .... 1 točka
(Če je obravnavan primer s 16 pravilnimi odgovori, primeri s po $17, 18, \ldots, 24$ pravilnimi odgovori pa ne, dodelite največ 4 točke.)

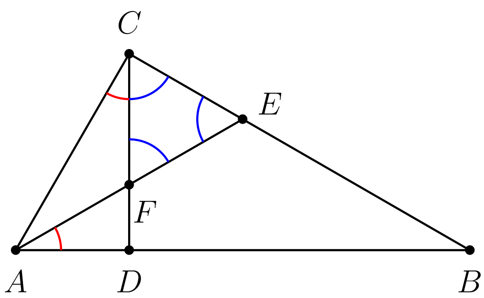
© 2009 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

I/2. **1. način.** Ker je trikotnik CEF enakostraničen, je $\angle EFC = 60°$. Od tod sledi $\angle CFA = 120°$. Zato je $\angle FAC = 180° - \angle CFA - \angle ACF = 60° - \angle ACF$ in velja $\angle BAC = \angle BAE + \angle FAC = \angle BAE + 60° - \angle ACD = 60°$.
Ker je $|AB| = 2|AC|$ in $\angle BAC = 60°$, je trikotnik ABC polovica enakostraničnega trikotnika, torej je $\angle CBA = 30°$ in $\angle ACB = 90°$.



Sklep $\angle CFA = 120°$ .... **1 točka**
Izračun $\angle FAC = 60° - \angle ACF$ .... **1 točka**
Sklep $\angle BAC = 60°$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je trikotnik ABC **polovica enakostraničnega trikotnika** .... **2 točki**
Sklep $\angle CBA = 30°$ .... **1 točka**
Sklep $\angle ACB = 90°$ .... **1 točka**

2. način. Ker je trikotnik CEF enakostraničen, je $\angle EFC = \angle CEF = 60°$. Od tod sledi $\angle CFA = \angle AEB = 120°$. Ker velja še $\angle BAE = \angle ACD = \angle ACF$, se trikotnika ABE in CAF ujemata v dveh kotih, torej sta si podobna. Zato velja $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|CF|}$ oziroma $|AE| = 2|CF|$.
Trikotnik CFE je enakostraničen, torej je $|AF| + |FE| = |AE| = 2|CF| = 2|FE|$ oziroma $|AF| = |FE| = |FC|$. Zato je trikotnik AFC enkakokrak z vrhom F in zaradi $\angle AFC = 120°$ je $\angle FAC = \angle ACF = 30°$. Od tod sledi $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$ in $\angle CBA = 30°$.



Sklep $\angle CFA = 120°$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da sta si trikotnika ABE **in** CAF **podobna** .... **1 točka**
Sklep, da je $|AF|$ **enaka eni izmed dolžin** $|CE|$, $|EF|$ **ali** $|CF|$ .... **1 točka**
Trikotnik AFC **je enakokrak** .... **1 točka**
Zapis $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$ **in** $\angle CBA = 30°$ .... **po 1 točka**

I/3. Neenakost $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y)$ preoblikujemo v neenakost $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 \geq 0$. Izraz na levi še dodatno preoblikujemo $(x-y)^2 + 2(x-y) + 1 \geq 0$ in opazimo, da je natanko popolni kvadrat $((x-y)+1)^2 \geq 0$, zato velja neenakost za vsak par realnih števil x in y. Enakost velja natanko takrat, ko je $(x-y)+1 = 0$.

Zapis $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 \geq 0$ .... **1 točka**
Ugotovitev $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ .... **2 točki**
Zapis $((x-y)+1)^2 \geq 0$ .... **2 točki**
Enakost velja pri $x - y + 1 = 0$ .... **2 točki**

I/4. Očitno je $r \neq 0$. Zapišimo r v obliki okrajšanega ulomka $r = \frac{m}{n}$ in privzemimo, da je n naravno število. Tedaj dobimo $\frac{m}{n}(5k - 7\frac{m}{n}) = 3$ oziroma $m(5kn - 7m) = 3n^2$. Zato je m delitelj $3n^2$. Ker pa sta si števili m in n tuji, $m \mid 3$. Ločimo štiri primere.

Če je $m = 1$, dobimo $5kn - 7 = 3n^2$ oziroma $n(5k - 3n) = 7$, od koder sledi, da $n \mid 7$. Ker je n naravno število, je enako 1 ali 7. Pri $n = 1$ dobimo rešitev $k = 2$ in $r = 1$, pri $n = 7$ pa protislovno enačbo $5k = 22$.

Če je $m = 3$, sledi $n(5k - n) = 21$. Spet vidimo, da $n \mid 21$, ker pa sta si m in n tuji, sledi da $n \mid 7$. Ponovno je $n = 1$ ali $n = 7$. Rešitev dobimo le v drugem primeru in sicer $k = 2$, $r = \frac{3}{7}$.

Če je $m = -1$, dobimo $n(5k + 3n) = -7$, zato ponovno $n \mid 7$. Pri $n = 1$ dobimo rešitev $k = -2$, $r = -1$, pri $n = 7$ pa rešitev ni.

Ostane še $m = -3$, ko je $n(5k + n) = -21$. Ker sta si m in n tuji, je n delitelj števila 7. Dobimo še eno rešitev in sicer $k = -2$, $r = -\frac{3}{7}$.

Vsi pari rešitev (k, r) so $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, \frac{3}{7})$ in $(-2, -\frac{3}{7})$.

Zapis r v obliki ulomka .... **1 točka**
Sklep, da $m \mid 3$ .... **1 točka**
Omejitev možnosti za število n v vseh štirih primerih (torej $n \mid 7$ ali $n \mid 21$) ... **1 točka**
Vsak par rešitev $(k, r) \in \{(2, 1), (-2, -1), (2, \frac{3}{7}), (-2, -\frac{3}{7})\}$ .... **po 1 točka**
(Če so navedene le rešitve in ni postopka, ki bi pokazal, da drugih rešitev ni, dodelite največ 4 točke.)

I/5. Označimo z x število tekmovalcev pred Andrejem. Potem je tudi za Andrejem x tekmovalcev, vseh pa je $2x + 1$, torej liho. Ker je Andrej v vrsti pred Blažem, ki je na 19. mestu, je pred Andrejem največ 17 tekmovalcev, zato je $x \leq 17$. Torej je vseh tekmovalcev največ $2x + 1 \leq 2 \cdot 17 + 1 = 35$. Ker je Žan na 28. mestu, je tekmovalcev vsaj 28. Vsaka šola je poslala 3 tekmovalce, zato je bilo število tekmovalcev deljivo s 3. Med 28 in 35 sta s 3 deljivi le števili 30 in 33, liho pa je le število 33. Na tekmovanju je sodelovalo 33 tekmovalcev, torej 11 šol.

Ugotovitev, da je vseh tekmovalcev liho .... **2 točki**
Sklep, da je pred Andrejem največ 17 tekmovalcev .... **1 točka**
Vseh tekmovalcev je največ 35 .... **1 točka**
Vseh tekmovalcev je vsaj 28 .... **1 točka**
Število tekmovalcev je deljivo s 3 .... **1 točka**
Sodelovalo je 11 šol .... **1 točka**

II/1. 1. način. Ker je $m^2 = 252 - n^5$ nenegativno število, sledi $n^5 \leq 252$, torej je $n < 4$. Če je $n = 1$ dobimo $m^2 = 251$, pri $n = 2$ sledi $m^2 = 220$ in $n = 3$ nam da $m^2 = 9$. Edina možnost je torej $m = n = 3$.

Zapis $m^2 = 252 - n^5$ ali $n^5 = 252 - m^2$ .... **1 točka**
Sklep $n^5 \leq 252$ .... **1 točka**
Sklep $n < 4$ .... **1 točka**
Obravnava primera $n = 1$ .... **1 točka**
Obravnava primera $n = 2$ .... **1 točka**
Obravnava primera $n = 3$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $m = n = 3$ edina rešitev .... **1 točka**

2. način. Ker je n naravno število, je $m^2 = 252 - n^5 \leq 252$. Zato je $m < 16$. Če vstavljamo po vrsti za m vrednosti od 1 do 15, dobimo za n^5 vrednosti 251, 248, 243, 236, 227, 216, 203, 188, 171, 152, 131, 108, 83, 56, 27. Ker je $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ in $4^5 = 1024$, dobimo rešitev le pri $m = 3$, ko je $n = 3$.

Zapis $m^2 = 252 - n^5$ **ali** $n^5 = 252 - m^2$ .... **1 točka**
Sklep $m^2 \leq 252$ .... **1 točka**
Sklep $m < 16$ .... **1 točka**
Izračun n^5 **pri** $m = 1, 2, 3, 4, 5$ .... **1 točka**
Izračun n^5 **pri** $m = 6, 7, 8, 9, 10$ .... **1 točka**
Izračun n^5 **pri** $m = 11, 12, 13, 14, 15$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $m = n = 3$ **edina rešitev** .... **1 točka**

II/2. Velja $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = (x + \frac{1}{x})^2 - 1 = (x + \frac{1}{x} + 1)(x + \frac{1}{x} - 1)$. Ker je $x + \frac{1}{x} + 1$ naravno število, je $x + \frac{1}{x} - 1$ celo število in zato je $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ celo število. Ker pa je $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 1$, je $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ res naravno število, ki je deljivo z $x + \frac{1}{x} + 1$.

Izračun $(x + \frac{1}{x})^2$ **ali** $(x + \frac{1}{x} + 1)^2$ .... **2 točki**
Razcep $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = (x + \frac{1}{x} + 1)(x + \frac{1}{x} - 1)$ .... **2 točki**
Ugotovitev, da je $x + \frac{1}{x} - 1$ **celo število** .... **1 točka**
Sklep, da $x + \frac{1}{x} + 1$ **deli** $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ .... **1 točka**
Sklep, da je $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ **naravno število** .... **1 točka**

Opomba. Nalogo je možno rešiti tudi na precej težji način in sicer z vpeljavo $n = x + \frac{1}{x} + 1$. Tedaj je $x^2 + (1 - n)x + 1 = 0$ in zato

$$x = \frac{n - 1 \pm \sqrt{(n-1)^2 - 4}}{2}.$$

Če dobljeno vstavimo v izraz $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$, po daljšem preurejanju dobimo

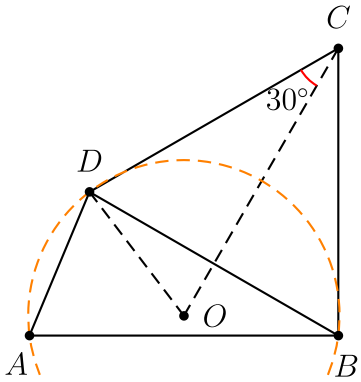
$$\frac{n(n^3 - 4n^2 + 3n + 2) \pm n(n^2 - 3n + 2)\sqrt{n^2 - 2n - 3}}{n^2 - 2n - 1 \pm (n-1)\sqrt{n^2 - 2n - 3}}$$

$$= \frac{n(n^2 - 2n - 1)(n - 2) \pm n(n-2)(n-1)\sqrt{n^2 - 2n - 3}}{n^2 - 2n - 1 \pm (n-1)\sqrt{n^2 - 2n - 3}} = n(n-2).$$

Število $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = n(n-2)$ je zagotovo celo. Očitno je pozitivno, zato je naravno in deljivo z $n = x + \frac{1}{x} + 1$.

Zapis $n = x + \frac{1}{x} + 1$ .... **1 točka**
Izražava x **z** n .... **1 točka**
Izražava $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ **z** n .... **1 točka**
Poenostavitev $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = n(n-2)$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $x + \frac{1}{x} - 1$ **celo število** .... **1 točka**
Sklep, da $x + \frac{1}{x} + 1$ **deli** $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ .... **1 točka**
Sklep, da je $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ **naravno število** .... **1 točka**

II/3. (a) Točki C in O ležita na simetrali stranice BD, zato je $\angle DCO = 30°$. Zaradi skladnosti trikotnikov ABD in OCD velja $\angle DBA = \angle DCO = 30°$. Od tod sledi $\angle CBA = \angle CBD + \angle DBA = 90°$.
(b) Če je $\angle ABC = 90°$, velja $\angle ABD = 30°$. Točki C in O ležita na simetrali stranice BD, zato je $\angle DCO = 30°$. Zaradi zveze med obodnim in središčnim kotom velja $\angle BOD = 2\angle BAD$. Toda $\angle BOD = 2\angle COD$, zato je $\angle COD = \angle BAD$. V trikotnikih ABD in OCD torej velja $\angle BAD = \angle COD$, $\angle DBA = \angle DCO$ in $|BD| = |CD|$, zato sta skladna.



Izračun $\angle DCO = 30°$ .... **1 točka**
Če sta trikotnika ABD **in** OCD **skladna, je** $\angle DBA = 30°$ .... **1 točka**
Če sta trikotnika ABD **in** OCD **skladna, je** $\angle CBA = 90°$ .... **1 točka**
Če je $\angle CBA = 90°$**, je** $\angle DBA = 30°$ .... **1 točka**
Izpeljava $\angle COD = \angle BAD$ .... **2 točki**
Če je $\angle CBA = 90°$**, sta trikotnika** ABD **in** OCD **skladna** .... **1 točka**

II/4. 1. način. Opazimo, da velja

$$\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2009} + 2009} = \sqrt{(1 + \sqrt{2009})^2} = 1 + \sqrt{2009}.$$

Podobno vidimo, da je $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} - 1$. Ker je $1 + \sqrt{2009}$ rešitev kvadratne enačbe $x^2 + ax + b = 0$, velja $2010 + 2\sqrt{2009} + a(1 + \sqrt{2009}) + b = 0$ oziroma

$$\sqrt{2009}(2 + a) = -b - 2010 - a.$$

Desna stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi leva, kar pomeni, da je $2 + a = 0$ oziroma $a = -2$. Iz $-b - 2010 - a = 0$ dobimo $b = -2008$. Kvadratna enačba $x^2 - 2x - 2008 = 0$ ima rešitvi $1 + \sqrt{2009}$ in $1 - \sqrt{2009}$, zato število $\sqrt{2009} - 1$ ne reši te enačbe.

Ugotovitev $2010 + 2\sqrt{2009} = (1 + \sqrt{2009})^2$ .... **1 točka**
Zapis $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = 1 + \sqrt{2009}$ .... **1 točka**
Izpeljava $\sqrt{2009}(2 + a) = -b - 2010 - a$ .... **1 točka**
Sklep, da sta leva in desna stran te enačbi enaki 0 .... **1 točka**
Izračun $a = -2$ .... **1 točka**
Izračun $b = -2008$ .... **1 točka**
Sklep, da $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ **ne reši kvadratne enačbe** .... **1 točka**

2. način. Število $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ poskusimo zapisati v obliki $A + \sqrt{B}$ za neko celo število A in naravno število B, torej $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = A + \sqrt{B}$. Po kvadriranju dobimo $2010 + 2\sqrt{2009} = A^2 + B + 2A\sqrt{B}$ oziroma $2010 - A^2 - B = 2A\sqrt{B} - 2\sqrt{2009}$. Leva stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi desna. To bo zagotovo izpolnjeno, kadar sta obe strani enaki 0. Tedaj je $A^2B = 2009$ in $2010 - A^2 - B = 0$. Izpeljemo lahko $A^2(2010 - A^2) = 2009$ oziroma $(A^2 - 1)(A^2 - 2009) = 0$. Ustreza le $A = 1$, ko je $B = 2009$. Torej je $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = 1 + \sqrt{2009}$.

Ker je $1+\sqrt{2009}$ rešitev kvadratne enačbe $x^2+ax+b=0$, velja $2010+2\sqrt{2009}+a(1+\sqrt{2009})+b=0$ oziroma

$$\sqrt{2009}(2+a)=-b-2010-a.$$

Desna stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi leva, kar pomeni, da je $2+a=0$ oziroma $a=-2$. Iz $-b-2010-a=0$ dobimo $b=-2008$. Kvadratna enačba $x^2-2x-2008=0$ ima rešitvi $1+\sqrt{2009}$ in $1-\sqrt{2009}$. Očitno je $1-\sqrt{2009}<0$. Ker je $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ pozitivno število in ni enako $1+\sqrt{2009}$, to število ne reši dobljene kvadratne enačbe.

Nastavek $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}=A+\sqrt{B}$ **ali** $A+B\sqrt{2009}$ **ali podoben .... 1 točka**
Zapis $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}=1+\sqrt{2009}$ **.......................... 1 točka**
Izpeljava $\sqrt{2009}(2+a)=-b-2010-a$ **.......................... 1 točka**
Sklep, da sta leva in desna stran te enačbi enaki 0 **.......................... 1 točka**
Izračun $a=-2$ **.......................... 1 točka**
Izračun $b=-2008$ **.......................... 1 točka**
Sklep, da $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ **ne reši kvadratne enačbe .... 1 točka**

3. način. Ker je dano število rešitev dane enačbe, mora veljati

$$(2010+2\sqrt{2009})+a\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}+b=0$$

oziroma

$$(2010+2\sqrt{2009})+b=-a\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}. \tag{1}$$

Po kvadriranju dobimo

$$(2010^2+4\cdot 2009+4\cdot 2010\sqrt{2009})+b^2+2b(2010+2\sqrt{2009})=a^2(2010+2\sqrt{2009}),$$

kar lahko preuredimo do

$$(2010^2+4\cdot 2009)+2\cdot 2010b+b^2-2010a^2=(2a^2-4\cdot 2010-4b)\sqrt{2009}. \tag{2}$$

Ker je leva stran enačbe celo število, mora biti tudi desna, torej sta obe enaki 0. Zato je

$$(2010^2+4\cdot 2009)+2\cdot 2010b+b^2-2010a^2=0,$$

$$4\cdot 2010+4b=2a^2.$$

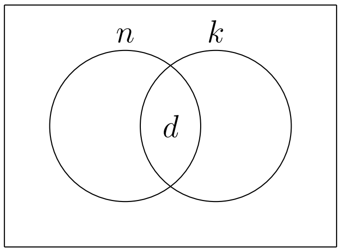
Iz druge enačbe izrazimo a^2 in vstavimo v prvo, da dobimo $b^2=2010^2-4\cdot 2009=4032064=2008^2$, oziroma $b=\pm 2008$. Zato je $a^2=2\cdot 2010\pm 2\cdot 2008=4020\pm 4016$. Ker $4020+4016=8036$ ni popolni kvadrat, je $b=-2008$ in $a^2=4$. Iz enakosti (1) sklepamo, da moramo tudi pri a vzeti negativen predznak.

Dobili smo enačbo $x^2-2x-2008=0$. Rešitvi te enačbe sta $1\pm\sqrt{2009}$, ena je pozitivna, druga negativna. Ker je $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ pozitivna rešitev, je druga rešitev negativna, torej $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ ni rešitev dobljene enačbe.

Zapis enačbe (1) **ali ekvivalentne .... 1 točka**
Zapis zveze med a **in** b**, v kateri nastopajo le cela števila in** $\sqrt{2009}$ **(kot na primer enačba** (2)**) .... 1 točka**
Sklep, da morata biti leva in desna stran enačbe (2) **enaki** 0 **.......................... 1 točka**
Zapis ene enačbe, v kateri nastopa le eno izmed števil a **oziroma** b **.......... 1 točka**

Izračun $b = -2008$ .... **1 točka**
Izračun $a = -2$ .... **1 točka**
Sklep, da $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ **ne reši kvadratne enačbe** .... **1 točka**

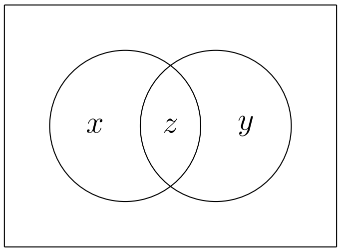
II/5. 1. način. Označimo število nogometašev z n, število košarkašev s k, število dijakov, ki se ukvarjajo z obema športoma pa z d. Petina nogometašev se ukvarja s košarko, zato je $\frac{n}{5} = d$. Sedmina košarkašev se ukvarja z nogometom, zato je $\frac{k}{7} = d$. Od tod sledi $n = 5d$ in $k = 7d$.



Košarkašev, ki se ne ukvarjajo z nogometom je $k - d$, nogometašev, ki se ne ukvarjajo s košarko pa $n - d$. Zato je $(n - d) + (k - d)$ dijakov, ki se ukvarjajo samo z enim športom, torej je $110 = n + k - 2d$. Dobimo $110 = 10d$ oziroma $d = 11$. Z obema športoma se ukvarja 11 dijakov.

Vpeljava oznak .... **1 točka**
Enačba $\frac{n}{5} = d$ .... **1 točka**
Enačba $\frac{k}{7} = d$ .... **1 točka**
Zapis $n = 5d$ **in** $k = 7d$ .... **1 točka**
Zapis enačbe $110 = n + k - 2d$ .... **2 točki**
Odgovor .... **1 točka**

2. način. Naj bo x število dijakov, ki se ukvarjajo le s košarko, y število dijakov, ki se ukvarjajo le z nogometom in z število dijakov, ki se ukvarjajo z obema športoma.



Vseh nogometašev je $y+z$. Ker petina nogometašev igra košarko, sledi $z = \frac{1}{5}(y + z)$ oziroma $y = 4z$. Vseh košarkašev je $x + z$, z nogometom pa se jih ukvarja $\frac{1}{7}$ oziroma z, torej je $z = \frac{1}{7}(x + z)$ oziroma $x = 6z$.
Ker se z natanko enim športom ukvarja $x + y$ dijakov, je $x + y = 110$, od koder sledi $110 = 6z + 4z = 10z$, torej je $z = 11$. Z obema športoma se ukvarja 11 dijakov.

Vpeljava oznak .... **1 točka**
Enačba $z = \frac{1}{5}(y + z)$ **(ali ekvivalentna)** .... **1 točka**
Enačba $z = \frac{1}{7}(x + z)$ **(ali ekvivalentna)** .... **1 točka**
Izpeljava $x = 6z$ **in** $y = 4z$ .... **1 točka**
Zapis enačbe $110 = x + y$ .... **2 točki**
Odgovor .... **1 točka**

III/1. Očitno je stopnja takega polinoma vsaj 2. Če bi bil tak polinom stopnje 2, bi bil oblike

$$p(x) = x^2 + ax + b = (x^2 + 1) + ax + (b - 1).$$

Ker je ostanek pri deljenju z $x^2 + 1$ enak 2, je $ax + (b - 1) = 2$, torej $a = 0$ in $b = 3$. Toda $p(x) = x^2 + 3 = (x - 1)(x + 1) + 4$ ne da ostanka 1 pri deljenju z $x + 1$. Slednje lahko vidimo tudi tako, da izračunamo $p(-1) = 4$, saj je $p(-1)$ ravno ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $x + 1$, ki torej ni enak 1.

Zato je tak polinom stopnje vsaj 3. Naj bo

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x + a)(x^2 + 1) + (b - 1)x + c - a.$$

Ponovno sledi $(b - 1)x + c - a = 2$ oziroma $b = 1$, $c = a + 2$. Torej je

$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + a + 2 = (x + 1)(x^2 + (a - 1)x + 2 - a) + 2a,$$

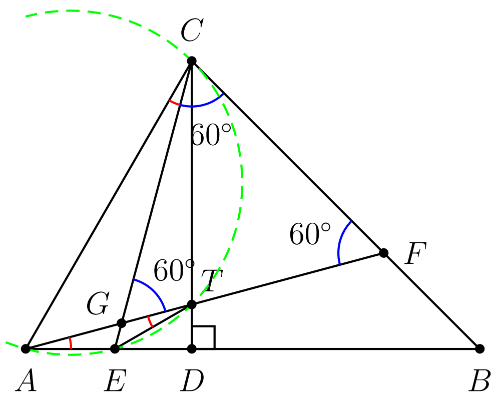
od koder sledi $2a = 1$ (kar lahko vidimo tudi iz zveze $1 = p(-1) = -1 + a - 1 + a + 2$). Iskan polinom je $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$.

Stopnja takega polinoma je vsaj 2 .... **1 točka**
Zapis $p(x) = (x^2 + 1) + ax + (b - 1)$ .... **1 točka**
Zapis $p(x) = x^2 + 3 = (x - 1)(x + 1) + 4$ **ali izračun** $p(-1) = 4$ .... **1 točka**
Polinom je vsaj stopnje 3 .... **1 točka**
Zapis $p(x) = (x + a)(x^2 + 1) + (b - 1)x + c - a$ .... **1 točka**
Zapis $p(x) = (x + 1)(x^2 + (a - 1)x + 2 - a) + 2a$ **ali** $p(-1) = 2a$ **(oziroma enakovreden, v katerem lahko nastopata tudi števili** b **in** c**)** .... **1 točka**
Tak polinom je $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$ .... **1 točka**

III/2. Zadnja števka kvadrata naravnega števila je 0, 1, 4, 5, 6 ali 9. Označimo dano število z n. Da bo n popoln kvadrat, se mora končati s števko 0. Denimo, da je zadnjih k števk števila n enakih 0, števka pred tem pa je različna od 0. Če je k liho število, $k = 2m-1$, je tudi število $\frac{n}{10^{2m-2}}$ popoln kvadrat, ki je deljiv z 10. Zato mora biti deljiv tudi s 25, kar pa ni, saj je števka desetic enaka 3 ali 7.

Torej se mora število n končati s sodo ničlami, zato je k sodo število. Tedaj je $\frac{n}{10^k}$ naravno število in popoln kvadrat, katerega zadnja števka je enaka 3 ali 7, kar pa ni možno. Zato tako število ni popoln kvadrat.

Zadnja števka popolnega kvadrata je 0**,** 1**,** 4**,** 5**,** 6 **ali** 9 .... **2 točki**
Če je n **popolni kvadrat, se konča s števko** 0 .... **1 točka**
Če se n **konča z liho ničlami, ni popolni kvadrat** .... **2 točki**
Če se n **konča s sodo ničlami, ni popolni kvadrat** .... **2 točki**



III/3. Označimo $\angle BAF = \angle ACE = \varphi$. Ker je trikotnik CGF enakostraničen, sledi $\angle CGA = 120°$. Zato je $\angle GAC = 180° - \angle CGA - \angle ACG = 60° - \varphi$ in velja $\angle BAC = \angle BAF + \angle GAC = \varphi + 60° - \varphi = 60°$.
Ker je trikotnik AET enakokrak, velja $\angle ETA = \varphi = \angle ECA$, zato so točke A, E, T in C koncikliène. Tedaj pa je $\angle ECT = \angle EAT = \varphi$. Torej je $2\varphi = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD = \frac{\pi}{2} - \angle DAC = 30°$, od koder sledi $\varphi = 15°$.
Izračunamo lahko še $\angle CBA = \angle FBA = 60° - \varphi = 45°$ in $\angle ACB = 75°$.

Izračun $\angle FAC = 60° - \varphi$ .... **1 točka**
Sklep $\angle BAC = 60°$ .... **1 točka**

Točke A, E, T in C so koncikliČne .... **1 točka**
Sklep $\angle ECT = \varphi$ .... **1 točka**
Izračun $\varphi = 15°$ .... **1 točka**
Sklep $\angle CBA = 45°$ .... **1 točka**
Sklep $\angle ACB = 75°$ .... **1 točka**

III/4. 1. način. Označimo $x + y = z$, torej $x = z - y$. Potem je $y = z(2z - 2y + 3y) = z(2z + y)$, od koder lahko izrazimo

$$y = -\frac{2z^2}{z-1} = -\frac{2z^2 - 2 + 2}{z-1} = -2(z+1) - \frac{2}{z-1}.$$

Ker je y celo število, mora $z - 1$ deliti 2, torej je $z - 1$ enako 2, 1, -1 ali -2. Dobimo po vrsti $z = 3$, $z = 2$, $z = 0$ in $z = -1$, od koder lahko izračunamo, da so pari (x, y) enaki $(12, -9)$, $(10, -8)$, $(0, 0)$ in $(-2, 1)$.

Vpeljava $x + y = z$ .... **1 točka**
Zapis $y = -\frac{2z^2}{z-1}$ ali enakovreden .... **1 točka**
Sklep, da $z - 1$ deli 2 .... **1 točka**
Rešitve $(x, y) \in \{(12, -9), (10, -8), (0, 0), (-2, 1)\}$ .... **vsaka po 1 točko**
(Če tekmovalec zapiše pare (x, y), ki ustrezajo enačbi, a ne utemelji, da drugih parov ni, priznajte največ 4 točke.)

2. način. Opazimo, da mora število $x + y$ deliti y. Torej lahko zapišemo $y = k(x + y)$ za neko celo število k. Če je $k = 0$, sledi $y = 0$ in iz prvotne enačbe tudi $x = 0$. Sicer lahko izrazimo $x = \frac{y}{k} - y$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$y = \frac{y}{k}\left(\frac{2y}{k} - 2y + 3y\right) = \frac{y^2}{k}\left(1 + \frac{2}{k}\right).$$

Primer $y = 0$ smo že obravnavali, zato naj bo $y \neq 0$. Tedaj lahko obe strani delimo z y in izrazimo

$$y = \frac{k^2}{k+2} = \frac{k^2 + 2k - 2k}{k+2} = \frac{k(k+2) - 2k - 4 + 4}{k+2} = k + \frac{-2(k+2) + 4}{k+2} = k - 2 + \frac{4}{k+2}.$$

Od tod sledi, da je $k + 2$ delitelj števila 4. Ločimo šest primerov, saj je $k + 2$ lahko ± 1, ± 2 in ± 4. Pri $k + 2 = 1$ dobimo $y = 1$ in $x = -2$, pri $k + 2 = 2$ sledi $k = 0$, kar pa smo že obravnavali posebej. Če je $k + 2 = 4$, je $y = 3$ in $x = -\frac{3}{2}$ ni celo število.

Primer $k + 2 = -1$ nam da $y = -9$ in $x = 12$, $k + 2 = -2$ pa $y = -8$ in $x = 10$. Ostane še $k + 2 = -4$, od koder sledi $y = -9$ in $x = \frac{21}{2}$, kar pa spet ni celo število.

Ugotovitev, da $x + y$ deli y .... **1 točka**
Zapis $y = \frac{k^2}{k+2}$ ali enakovreden .... **1 točka**
Sklep, da $k + 2$ deli 4 .... **1 točka**
Rešitve $(x, y) \in \{(12, -9), (10, -8), (0, 0), (-2, 1)\}$ .... **vsaka po 1 točko**
(Če tekmovalec zapiše pare (x, y), ki ustrezajo enačbi, a ne utemelji, da drugih parov ni, priznajte največ 4 točke.)

3. način. Enačbo lahko prepišemo v

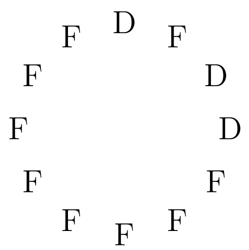
$$2x^2 + 5xy + y(3y - 1) = 0.$$

Da ima kvadratna enačba v x celoštevilsko rešitev, mora biti diskriminanta popoln kvadrat. Torej je $D = y^2 + 8y = a^2$, od koder sledi $(y+4)^2 - 16 = a^2$ oziroma $(y+4-a)(y+4+a) = 16$. Števili $y + 4 - a$ in $y + 4 + a$ sta enake parnosti, torej sta obe sodi. Privzamemo lahko, da je število a neengativno in je tako $y + 4 + a \geq y + 4 - a$. Ločimo naslednje možnosti.

Če je $y + 4 - a = 2$ in $y + 4 + a = 8$, sledi $y = 1$, $a = 3$, kvadratna enačba ima eno celoštevilsko ničlo $x = -2$. Pri $y + 4 - a = 4 = y + 4 + a$ sledi $a = y = 0$ in $x = 0$. Iz $y + 4 - a = -4 = y + 4 + a$ dobimo $a = 0$, $y = -8$ in $x = 10$. Ostane še $y + 4 - a = -8$, $y + 4 + a = -2$, kjer je $y = -9$, $a = 3$ in $x = 12$.

Zapis $2x^2 + 5xy + y(3y - 1) = 0$ **.. 1 točka**
Diskriminanta $D = y^2 + 8y$ **.. 1 točka**
Zapis $(y + 4 - a)(y + 4 + a) = 16$ **.. 1 točka**
Rešitve $(x, y) \in \{(12, -9), (10, -8), (0, 0), (-2, 1)\}$ **.................. vsaka po 1 točko**
(Če tekmovalec zapiše pare (x, y)**, ki ustrezajo enačbi, a ne utemelji, da drugih parov ni, priznajte največ 4 točke.)**

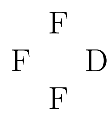
III/5. 1. način. Naj bo x število deklet in y število fantov. Potem je $y = 3x$ in zato je skupaj $4x$ otrok.



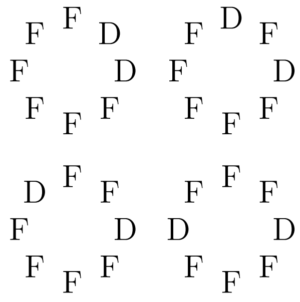
Naj bo a število dvojic v katerih sta otroka različnih spolov. Potem je število dvojic v katerih sta otroka istega spola enako $2a$. Torej je skupaj $3a$ dvojic. Število dvojic je kar enako številu vseh otrok, saj je vsak otrok v dveh dvojicah, kar nam da $2 \cdot 4x$ dvojic, pri tem pa smo vsako dvojico šteli dvakrat, torej je različnih dvojic $\frac{2 \cdot 4x}{2} = 4x$. Zato je $3a = 4x$. Najmanjše število x, pri katerem taka enačba lahko velja, je $x = 3$. Zato je za okroglo mizo sedelo vsaj 12 otrok. Če so se posedli kot prikazuje slika (z D so označena dekleta, z F pa fantje), je dvojic, v katerih sta otroka istega spola, dvakrat toliko kot dvojic, v katerih sta otroka različnega spola.

Ugotovitev, da je število vseh otrok štirikratnik števila deklet (to je $4x$**) ...... 1 točka**
Število vseh parov je trikratnih števila parov otrok različnega spola .... 1 točka
Vseh parov je toliko kot je otrok .... 1 točka
Zato je $3a = 4x$ **.. 1 točka**
Najmanjše število x **je** $x = 3$ **..................................... 1 točka**
Zapis primera 12 **otrok .... 2 točki**

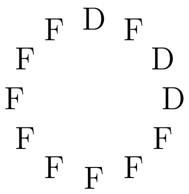
2. način. Če je za okroglo mizo sedelo samo eno dekle, so sedeli še trije fantje. Tedaj sta dve dvojici, v katerih sta otroka različnega spola in dve dvojici, v katerih sta otroka istega spola. Ker to ne zadostuje pogojem naloge, sta za mizo sedeli vsaj dve dekleti.



Preštejmo števila dvojic, če sta za mizo sedeli dve dekleti. Če sta sedeli skupaj, sta le 2 dvojici, v katerih sta fant in punca, ostalih dvojic pa je 6. Recimo, da dekleti ne sedita skupaj. Obravnavajmo primere glede na najmanjšo skupino fantov, ki sedijo skupaj. Ker je vseh fantov 6, ima najmanjša skupina največ 3 fante. V vseh treh primerih je število dvojic, v katerih sta otroka istega spola enako številu dvojic v katerih sta otroka različnega spola.



Noben izmed obravnavanih primerov ne ustreza pogojem naloge, zato so za mizo sedela vsaj 3 dekleta. Tedaj ni težko najti primerne postavitve, na primer kot prikazuje zadnja slika.



Obravnava primera, ko je za mizo eno dekle .... 1 točka
Primer, ko sta za mizo dve dekleti, ki sedita skupaj .... 1 točka
Primeri, ko sta za mizo dve dekleti, ki ne sedita skupaj .... 2 točki
Ugotovitev, da so za mizo vsaj 3 dekleta .... 1 točka
Zapis primera s tremi dekleti .... 2 točki

IV/1. Naj bo d diferenca zaporedja (a_n). Potem je $a_2 = 1+d$, $a_5 = 1+4d$ in $a_{11} = 1+10d$. Ker a_2, a_5 in a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje, velja $(1+4d)^2 = (1+d)(1+10d)$, oziroma $6d^2 = 3d$. Ker je zaporedje nekonstantno, je $d = \frac{1}{2}$, vsota prvih 2009 členov pa je enaka $2009 + \frac{2009 \cdot 2008}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1010527$.

Opomba. Pogoj, da a_2, a_5 in a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje lahko zapišemo tudi v obliki $(d+1)q^2 = (4d+1)q = 10d+1$, kjer q označuje kvocient dveh zaporednih členov tega zaporedja.

Zapis $a_2 = 1+d$**,** $a_5 = 1+4d$ **in** $a_{11} = 1+10d$ **.............................. 1 točka**
Enačba $(1+4d)^2 = (1+d)(1+10d)$ **ali** $(d+11)q^2 = (4d+1)q = 10d+1$ **......... 2 točki**
Preoblikovanje v $6d^2 = 3d$ **ali** $3dq = 6d$ **.. 1 točka**
Sklep, da je $d \neq 0$ **.. 1 točka**
Izračun $d = \frac{1}{2}$ **.. 1 točka**
Izračunana vsota 1010527 **.. 1 točka**

IV/2. Naj bo n sodo naravno število, $n = 2k$. Tedaj je $\frac{n^2}{4} = k^2$ celo število, zato je $[\frac{n^2}{4}] = k^2$ popolni kvadrat.

Če je n liho število, ga lahko zapišemo v obliki $n = 2k+1$, $k \geq 0$. Tedaj je

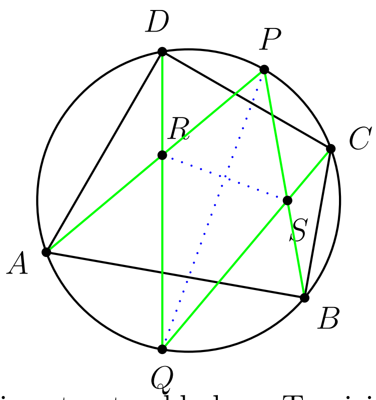
$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{4k^2+4k+1}{4}\right] = \left[k^2+k+\frac{1}{4}\right] = k^2+k = k(k+1).$$

Da bo število $k(k+1)$ popoln kvadrat, morata biti števili k in $k+1$ popolna kvadrata, saj sta si tuji, torej $k = a^2$ in $k+1 = b^2$, od koder sledi $(b-a)(b+a) = 1$. Možnosti sta dve in sicer $b-a=1=b+a$ ter $b-a=-1=b+a$. Iz obeh sledi $k=0$, torej je $n=1$ edino tako liho število.

Da je k^2+k popolni kvadrat, lahko vidimo še drugače. Kvadratna enačba $k^2+k-x^2=0$ ima rešitvi $k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2}$, zato je $1+4x^2=y^2$ oziroma $(y-2x)(y+2x)=1$. Od tod sledi $x=0$, zato je $k=0$.

Vrednost izraza $[\frac{n^2}{4}]$ je popoln kvadrat natanko takrat, ko je $n=1$ ali pa je n sodo število.

Če je n sodo naravno število, je $[\frac{n^2}{4}]$ popolni kvadrat . . . . **2 točki**
Če je $n=2k+1$, je $[\frac{n^2}{4}]=k^2+k$ . . . . **2 točki**
Sklep, da sta števili k in $k+1$ popolna kvadrata ali reševanje kvadratne enačbe $k^2+k-x^2=0$ . . . . **1 točka**
Izpeljava $k=0$ in $n=1$ . . . . **1 točka**
Odgovor . . . . **1 točka**



IV/3. Zaradi tetivnosti štirikotnika $AQPD$ velja $\angle RPQ=\angle APQ=\angle ADQ$. Ker je DQ simetrala kota ADB, je $\angle ADQ=\angle QDB$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $QBPD$ velja še $\angle QDB=\angle QPB=\angle QPS$. Torej je $\angle RPQ=\angle QPS$.
Podobno zaradi tetivnosti štirikotnika $QBPD$ dobimo $\angle PQR=\angle PQD=\angle PBD$. Ker je BP simetrala kota $\angle CBD$, je $\angle PBD=\angle CBP$, iz tetivnosti štirikotnika $QBCP$ pa sledi še $\angle CBP=\angle CQP=\angle SQP$. Torej je $\angle PQR=\angle SQP$.
Trikotnika SPQ in RPQ se ujemata v kotih in skupni stranici, zato sta skladna. Torej je štirikotnik $PRQS$ deltoid, od koder sledi, da je $PQ\perp RS$.

Enakost kotov $\angle APQ=\angle ADQ$ ali $\angle QDB=\angle QPB$ . . . . **1 točka**
Ugotovitev $\angle RPQ=\angle QPS$ . . . . **1 točka**
Enakost kotov $\angle PQD=\angle PBD$ ali $\angle CBP=\angle CQP$ . . . . **1 točka**
Ugotovitev $\angle PQR=\angle SQP$ . . . . **1 točka**
Sklep, da sta trikotnika SPQ in RPQ skladna . . . . **1 točka**
Štirikotnik $PRQS$ je deltoid . . . . **1 točka**
Zato je $PQ\perp RS$ . . . . **1 točka**

IV/4. 1. način. Iz formule za dvojne kote in iz adicijskih izrekov za sinus sledi

$$\begin{aligned}
&\sin(4x)+2\sin(5x)+\sin(6x)=\\
&\quad= 2\sin(2x)\cos(2x)+2(\sin(2x)\cos(3x)+\sin(3x)\cos(2x))+2\sin(3x)\cos(3x)\\
&\quad= 2\cos(2x)(\sin(2x)+\sin(3x))+2\cos(3x)(\sin(2x)+\sin(3x))\\
&\quad= 2(\cos(2x)+\cos(3x))(\sin(2x)+\sin(3x)),
\end{aligned}$$

slednje pa je po predpostavki enako $2(\sin(2x)+\sin(3x))$, kar je bilo treba pokazati.

Zapis $\sin(4x)=2\sin(2x)\cos(2x)$ . . . . **1 točka**
Zveza $\sin(5x)=\sin(2x)\cos(3x)+\sin(3x)\cos(2x)$ . . . . **2 točki**

Zapis $\sin(6x) = 2\sin(3x)\cos(3x)$ .... **1 točka**
Razcep $\sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x) = 2(\cos(2x) + \cos(3x))(\sin(2x) + \sin(3x))$ ... **2 točki**
Zaključek .... **1 točka**

2. način. S pomočjo adicijskih izrekov lahko $\cos(2x) + \cos(3x) = 1$ preoblikujemo v

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Podobno je

$$2\sin(2x) + 2\sin(3x) = 2\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)$$

in

$$\sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x) = 2\sin x(16\cos^5 x + 16\cos^4 x - 12\cos^3 x - 12\cos^2 x + \cos x + 1).$$

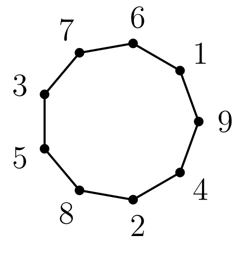
Zato je dovolj pokazati

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 16\cos^5 x + 16\cos^4 x - 12\cos^3 x - 12\cos^2 x + \cos x + 1.$$

Zapis poenostavimo z vpeljavo $\cos x = t$. Pokazati želimo $16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2 = 0$, vemo pa, da velja $4t^3 + 2t^2 - 3t - 2 = 0$. Torej je dovolj preveriti, da polinom $4t^3 + 2t^2 - 3t - 2$ deli polinom $16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2$. Res, če polinoma delimo, dobimo

$$16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2 = (4t^3 + 2t^2 - 3t - 2)(4t^2 + 2t - 1). \tag{3}$$

Zapis $\cos(2x) + \cos(3x) = 1$ **v obliki izraza, ki vsebuje le** $\sin x$ **in** $\cos x$ .... **1 točka**
Zapis $2\sin(2x) + 2\sin(3x)$ **v obliki izraza, ki vsebuje le** $\sin x$ **in** $\cos x$ .... **1 točka**
Zapis $\sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x)$ **v obliki izraza, ki vsebuje le** $\sin x$ **in** $\cos x$ .... **2 točki**
Razcep (3) .... **2 točki**
Zaključek .... **1 točka**



IV/5. Pokazali bomo, da je $n = 16$. Kot prikazuje slika, lahko števila od 1 do 9 zapišemo v oglišča pravilnega 9-kotnika tako, da je vsota treh zaporednih števil največ 16.
Dokažimo, da pri $n < 16$ števil od 1 do 9 ni mogoče razporediti tako, da je vsota števil v poljubnih treh zaporednih ogliščih največ n. Denimo, da je to možno. Če seštejemo vse vsote števil iz treh zaporednih oglišč, bomo vsako število šteli trikrat, saj nastopa v treh takšnih vsotah. Torej je dobljeno število enako $3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 135$. Po drugi strani pa je vsaka vsota števil iz treh zaporednih oglišč največ n, vseh vsot je 9, zato je vsota vseh največ $9n$. Sledi $9n \geq 135$ oziroma $n \geq 15$.
Pokažimo še, da vrednost n ne more biti 15. V tem primeru namreč v zgornji oceni velja enakost, kar pomeni, da so vse vsote števil iz treh zaporednih oglišč enake 15. Če označimo števila v štirih zaporednih ogliščih po vrsti z a_1, a_2, a_3 in a_4 to pomeni, da je $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ in $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, od koder sledi $a_1 = a_4$, kar pa ni možno, saj razvrščamo 9 različnih števil. Od tod sledi, da mora biti n vsaj 16.

Primer razporeditve, če je $n = 16$ . . . . 2 točki
(Natančno preverite, če zapisana razporeditev za $n = 16$ ustreza pogojem naloge. Možnih je več pravilnih razporeditev, na sliki je navedena le ena izmed njih.)
Vsota vseh vsot števil iz treh zaporednih oglišč je 135 . . . . 1 točka
Vsota vseh vsot števil iz treh zaporednih oglišč je največ $9n$ . . . . 1 točka
Sklep $n \geq 15$ . . . . 1 točka
Če je $n = 15$, so vse vsote števil iz treh zaporednih oglišč enake . . . . 1 točka
Sklep, da to ni možno . . . . 1 točka