**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

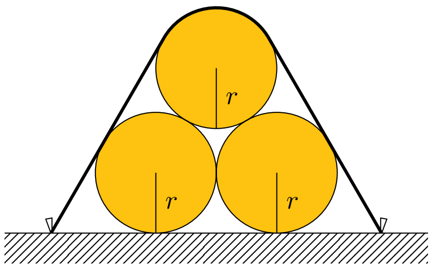
Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vse pare naravnih števil a in b, ki zadoščajo enačbi $a^2 - 5ab + 24 = 0$.

B2. Kmet Martin je pri baliranju sena izdelal 3 enake bale sena. Prečni prerez vsake bale sena je krog s polmerom r. Bale sena je postavil v piramido, tako da so se dotikale druga druge, in čez njih napel vrv, ki jo je na obeh koncih pritrdil v tla. Zgornji del vrvi je napet po obodu zgornje bale sena, stranska dela vrvi pa sta ravna in se dotikata spodnjih dveh bal sena (glej sliko). Izrazi dolžino vrvi s polmerom r.



66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi $\sqrt{x^2 - 2x + 17} = 3\sqrt{3} - 1$, in jih zapiši v obliki $x = m + n\sqrt{3}$, kjer sta m in n celi števili.

B2. Dana je kocka $ABCDEFGH$. Na stranici GH leži točka K, tako da velja $|GK| : |KH| = 1 : 3$, na stranici HE leži točka L, tako da velja $|HL| : |LE| = 1 : 1$, na stranici CG pa leži točka M. Kakšno mora biti razmerje $|CM| : |MG|$, da se bosta premici AK in LM sekali?

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Za katere kote α z lastnostjo $0 < \alpha < 2\pi$ velja neenakost

$$\frac{5\sin\alpha - 2}{\sin\alpha} \geq 2\sin\alpha?$$

B2. Poišči vse pare kompleksnih števil z in w, ki rešijo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
w^2 &= 63 + 16i, \\
2z - i|z| &= w.
\end{aligned}
$$

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Naj bosta F_1 in F_2 gorišči elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ in K taka točka na tej elipsi, da je $|KF_1| : |KF_2| = 2 : 1$. Izračunaj ploščino trikotnika KF_1F_2.

B2. Naj bo x tako realno število, da je $x + \frac{1}{x}$ celo število. Dokaži, da je tedaj za vsako naravno število n tudi $x^n + \frac{1}{x^n}$ celo število.

dMFA

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

16. marec 2006

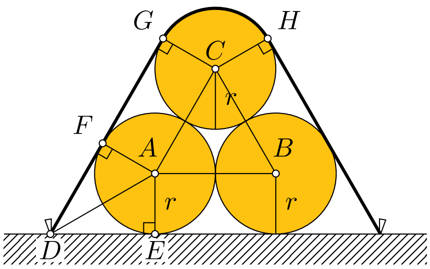
Rešitve nalog za Naloge za 1. letnik

1. Enačbo preoblikujemo v $a(a-5b)=-24$ in jo pomnožimo z -1, da dobimo $a(5b-a)=24$. Ker sta a in $5b-a$ celi števili, je a pozitiven delitelj števila 24. Torej imamo naslednje možnosti: $a=1$ in $5b-a=24$, $a=2$ in $5b-a=12$, $a=3$ in $5b-a=8$, $a=4$ in $5b-a=6$, $a=6$ in $5b-a=4$, $a=8$ in $5b-a=3$, $a=12$ in $5b-a=2$ ter $a=24$ in $5b-a=1$. Pri vaski možnosti izračunamo še b in po vrsti dobimo $b=5$, $b=\frac{14}{5}$, $b=\frac{11}{5}$, $b=2$, $b=2$, $b=\frac{11}{5}$, $b=\frac{14}{5}$ ter $b=5$. Le v štirih primerih je b naravno število. Pari naravnih števil, ki zadoščajo dani enačbi, so torej $a=1$ in $b=5$, $a=4$ in $b=2$, $a=6$ in $b=2$ ter $a=24$ in $b=5$.

2. način. Iz enačbe izrazimo $b=\frac{a^2+24}{5a}$. Ker sta a in b naravni števili, mora a deliti 24 in 5 deliti a^2+24. Pozitivni delitelji števila 24 so 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 in 24, toda število a^2+24 je deljivo s 5 le, ko je a enak 1, 4, 6 ali 24. V teh primerih je b po vrsti enak 5, 2, 2 in 5. Pari naravnih števil, ki zadoščajo dani enačbi, so torej $a=1$ in $b=5$, $a=4$ in $b=2$, $a=6$ in $b=2$ ter $a=24$ in $b=5$.

Preoblikovanje enačbe v $a(5b-a)=24$ .... 4 točke
Ugotovitev, da je a pozitiven delitelj števila 24 in zapis deliteljev .... 4 točke
Sistematičen pregled vseh možnih parov (za vsak preverjen par 1 točka) .... 8 točk
Zapis vseh parov rešitev (za vsak zapisan par 1 točka) .... 4 točke

2. način. Preoblikovanje enačbe v $b=\frac{a^2+24}{5a}$ .... 4 točke
Ugotovitev, da je a pozitiven delitelj števila 24 in zapis deliteljev .... 4 točke
Ugotovitev, da je 5 delitelj izraza a^2+24 .... 4 točke
Sklep, da je a enak 1, 4, 6 ali 24 .... 4 točke
Zapis vseh parov rešitev (za vsak zapisan par 1 točka) .... 4 točke



2. Označimo nekaj točk kot je prikazano na sliki. Točke A, B in C so središča bal sena, točka D je enden od koncev vrvi, točki E in F sta dotikališči leve bale sena s tlemi in z vrvjo, točki G in H pa sta skrajni točki, kjer se vrv še dotika zgornje bale sena. Trikotnik ABC je enakostraničen z dolžino stranice $2r$, zato je $\angle BAC=60°$. Štirikotnik $FACG$ pa je pravokotnik, zato je $\angle CAF=90°$ in podobno je tudi $\angle EAB=90°$. Od tod sledi

$$\angle FAE = 360° - \angle EAB - \angle BAC - \angle CAF = 360° - 90° - 60° - 90° = 120°$$

in posledično je $\angle FAD=\angle DAE=60°$. Torej sta trikotnika AFD in DEA polovici enakostraničnega trikotnika, zato je $|DF|=\sqrt{3}|FA|=\sqrt{3}r$. Ker je $FACG$ pravokotnik, je $|FG|=|AC|=2r$. Hkrati je tudi $\angle HCG=120°$, zato je dolžina krožnega loka $\widehat{GH}$ vrvi enaka $|\widehat{GH}|=\frac{2\pi r}{3}$. Dolžina vrvi je torej enaka $d=2(|DF|+|FG|)+|\widehat{GH}|=2\sqrt{3}r+4r+\frac{2\pi}{3}r$.

Ugotovitev, da je trikotnik ABC enakostraničen z dolžino stranice $2r$ .... 2 točki
Jasno in pregledno dopolnjena skica z vsemi potrebnimi polmeri in pravimi koti .... 4 točke
Izračun kota $\angle FAE=120°$ .... 2 točki

Sklep, da je $\angle FAD = \angle DAE = 60^\circ$ .... 2 točki
Utemeljen sklep, da sta trikotnika AFD in DEA polovici enakostraničnega trikotnika oz. da je $|DA| = 2r$ .... 3 točke
Izračun $|DF| = \sqrt{3}r$ .... 2 točki
Zapis $|FG| = |AC| = 2r$ .... 2 točki
Izračun dolžine krožnega loka $|\widehat{GH}| = \frac{2\pi r}{3}$ .... 2 točki
Zapis izraza dolžine vrvi s polmerom $2\sqrt{3}r + 4r + \frac{2\pi}{3}r$ .... 1 točka

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

16. marec 2006

Rešitve nalog za Naloge za 2. letnik

1. Ker sta obe strani enačbe pozitivni, lahko enačbo kvadriramo in dobimo

$$x^2 - 2x + 17 = 27 - 6\sqrt{3} + 1 = 28 - 6\sqrt{3}.$$

Nato levo stran dopolnimo do popolnega kvadrata

$$(x-1)^2 + 16 = 28 - 6\sqrt{3}$$

in enačbo preuredimo do

$$(x-1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}.$$

Od tod po korenjenju dobimo $x - 1 = \pm\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ oziroma $x = 1 \pm \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$. Da bomo rešitvi lahko zapisali v predpisani obliki, preoblikujmo izraz pod korenom v popoln kvadrat

$$x = 1 \pm \sqrt{9 - 6\sqrt{3} + 3} = 1 \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} = 1 \pm (3 - \sqrt{3}).$$

Rešitvi sta torej $x = 1 + (3 - \sqrt{3}) = 4 - \sqrt{3}$ in $x = 1 - (3 - \sqrt{3}) = -2 + \sqrt{3}$. To sta tudi res rešitvi, ker je izraz pod korenom dane enačbe avtomatično pozitiven, saj je enak $28 - 6\sqrt{3}$.

2. način. Ker sta obe strani enačbe pozitivni, lahko enačbo kvadriramo in dobimo

$$x^2 - 2x + 17 = 27 - 6\sqrt{3} + 1 = 28 - 6\sqrt{3}.$$

Pišimo $x = m + n\sqrt{3}$, kjer sta m in n celi števili. Ko slednje vstavimo v enačbo, dobimo

$$m^2 + 2mn\sqrt{3} + 3n^2 - 2m - 2n\sqrt{3} + 17 = 28 - 6\sqrt{3}.$$

Enačbo preoblikujemo do

$$(m^2 - 2m + 3n^2 + 17) - (2n - 2mn)\sqrt{3} = 28 - 6\sqrt{3}.$$

Ker sta m in n celi števili, od tod sledi

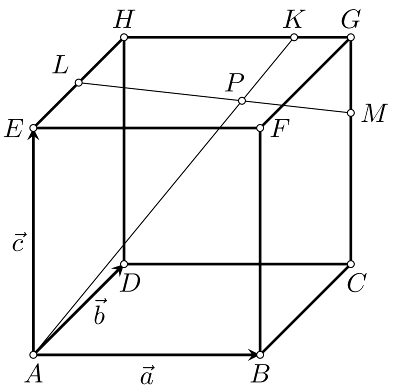
$$\begin{aligned} m^2 - 2m + 3n^2 + 17 &= 28, \\ 2n - 2mn &= 6. \end{aligned}$$

Drugo enačbo preoblikujemo v $n(1 - m) = 3$. Ker sta m in n celi števili, so edine možne rešitve $n = 1$ in $m = -2$, $n = -1$ in $m = 4$, $n = 3$ in $m = 0$ ter $n = -3$ in $m = 2$. Zlahka preverimo, da je le pri prvih dveh možnostih izpolnjena tudi prva enačba sistema. Torej dobimo rešitvi $x = -2 + \sqrt{3}$ in $x = 4 - \sqrt{3}$. To sta tudi res rešitvi, ker je izraz pod korenom dane enačbe avtomatično pozitiven, saj je enak $28 - 6\sqrt{3}$. Ker ima vsaka kvadratna enačba največ dve realni rešitvi, sta dobljeni dve rešitvi hkrati edini rešitvi.

Kvadriranje enačbe .... 2 točki
Preoblikovanje enačbe v $(x-1)^2 + 16 = 28 - 6\sqrt{3}$ .... 3 točke
Zapis enačbe $(x-1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}$ .... 1 točka
Korenjenje enačbe in zapis $x = 1 \pm \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ .... 4 točke
Zapis $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$ .... 4 točke

Izračun $x = 1 \pm (3 - \sqrt{3})$ ....2 točki
Zapis obeh rešitev ....2 točki
Utemeljitev, da sta rešitvi ustrezni ....2 točki.

2. način. Kvadriranje enačbe ....2 točki
Zapis $x = m + n\sqrt{3}$ ....1 točka
Preoblikovanje enačbe v $m^2 + 2mn\sqrt{3} + 3n^2 - 2m - 2n\sqrt{3} + 17 = 28 - 6\sqrt{3}$ ....2 točki
Preoblikovanje enačbe v $(m^2 - 2m + 3n^2 + 17) - (2n - 2mn)\sqrt{3} = 28 - 6\sqrt{3}$ ....1 točka
Zapis sistema dveh enačb ....4 točke
Preoblikovanje druge enačbe v $n(1 - m) = 3$ ....2 točki
Zapis vseh štirih rešitev za m in n (vsak urejeni par 1 točko) ....4 točke
Zapis rešitev $x = -2 + \sqrt{3}$ in $x = 4 - \sqrt{3}$ ....2 točki
Utemeljitev, da sta rešitvi ustrezni ....2 točki.



2.

Naj bo P presečišče premic AK in LM. Označimo vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Naj bo $\overrightarrow{AP} = \alpha\, \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{LP} = \beta\, \overrightarrow{LM}$ in $\overrightarrow{GM} = \gamma\, \overrightarrow{GC} = -\gamma\vec{c}$, kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Izrazimo vektor $\overrightarrow{AP}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ na dva različna načina. Po eni strani je

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\, \overrightarrow{AK} = \alpha\Big(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK}\Big) = \alpha\Big(\vec{c} + \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\Big) = \frac{3}{4}\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c},$$

po drugi strani pa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{LP} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + \beta\, \overrightarrow{LM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + \beta\Big(\overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM}\Big)\\ &= \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + \beta\Big(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} - \gamma\vec{c}\Big) = \beta\vec{a} + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\Big)\vec{b} + (1 - \beta\gamma)\vec{c}.\end{aligned}$$

Ker so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni, sledi $\frac{3}{4}\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}$ in $\alpha = 1 - \beta\gamma$. Iz prvih dveh enačb sledi $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha$ oziroma $\frac{5}{8}\alpha = \frac{1}{2}$. Torej je $\alpha = \frac{4}{5}$ in zato $\beta = \frac{3}{5}$. Iz zadnje enačbe izrazimo še $\gamma = \frac{1-\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$. Torej je $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$ in zato je $|CM| : |MG| = 2 : 1$.

Pregledno narisana in označena skica ....3 točke
Zapis $\overrightarrow{AP} = \alpha\, \overrightarrow{AK}$ ....1 točka
Zapis $\overrightarrow{LP} = \beta\, \overrightarrow{LM}$ ....1 točka
Zapis $\overrightarrow{GM} = \gamma\, \overrightarrow{GC}$ ....1 točka
Izražen vektor $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$ ....2 točki
Izražen vektor $\overrightarrow{AP} = \beta\vec{a} + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\Big)\vec{b} + (1 - \beta\gamma)\vec{c}$ ....4 točke
Zapis sistema enačb $\frac{3}{4}\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}$ in $\alpha = 1 - \beta\gamma$ ....2 točki
Izračun $\alpha = \frac{4}{5}$ ....2 točki

Izračun $\beta = \frac{3}{5}$ . . . . 1 točka
Izračun $\gamma = \frac{1}{3}$ . . . . 1 točka
Zapis $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$ . . . . 1 točka
Zapis razmerja . . . . 1 točka.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

16. marec 2006

Rešitve nalog za Naloge za 3. letnik

1. Očitno mora biti $\alpha \neq \pi$, saj sicer ulomek na levi strani neenakosti ne bi bil dobro definiran. Obravnavajmo dva primera.

Če je $0 < \alpha < \pi$, tedaj je $\sin\alpha > 0$. Torej če neenakost pomožimo s $\sin\alpha$, se neenačaj ohrani in dobimo $5\sin\alpha - 2 \geq 2\sin^2\alpha$. Neenakost preuredimo do $2\sin^2\alpha - 5\sin\alpha + 2 \leq 0$ in levo stran razstavimo $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha - 2) \leq 0$. Ker je $\sin\alpha - 2 < 0$, mora biti $2\sin\alpha - 1 \geq 0$ oziroma $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$. Od tod sledi $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$ in vsak tak α ustrezajo tudi pogoju $0 < \alpha < \pi$.

Če pa je $\pi < \alpha < 2\pi$, tedaj je $\sin\alpha < 0$. Pri množenju neenakosti s $\sin\alpha$ se neenačaj obrne, zato po preureditvi dobimo $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha - 2) \geq 0$. Ker je $\sin\alpha < 0$, je $2\sin\alpha - 1 < 0$ in $\sin\alpha - 2 < 0$, torej je neenakost v tem primeru avtomatično izpolnjena.

Rešitev naloge je torej $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup (\pi, 2\pi)$.

Ugotovitev, da $\alpha \neq \pi$ .... 1 točka
Ugotovitev, če je $0 < \alpha < \pi$, tedaj je $\sin\alpha > 0$ .... 2 točki
Preoblikovanje neenačbe v $5\sin\alpha - 2 \geq 2\sin^2\alpha$ .... 1 točka
Razcep enačbe $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha - 2) \leq 0$ .... 2 točki
Ugotovitev, da je $\sin\alpha - 2 < 0$ .... 2 točki
Sklep, da je zato $2\sin\alpha - 1 \geq 0$ .... 1 točka
Zapis $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapis rešitve neenačbe $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$ .... 2 točki
Ugotovitev, če je $\pi < \alpha < 2\pi$, tedaj je $\sin\alpha < 0$ .... 2 točki
Preoblikovanje neenačbe v $(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha - 2) \geq 0$ .... 2 točki
Sklep, ker je $\sin\alpha < 0$, je $2\sin\alpha - 1 < 0$ in $\sin\alpha - 2 < 0$ .... 2 točki
Zapis skupne rešitve .... 2 točki

2. Naj bo $z = a + bi$ in $w = c + di$. Iz prve enačbe sledi

$$c^2 + 2icd - d^2 = 63 + 16i.$$

S primerjavo realnih in imaginarnih delov dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} c^2 - d^2 &= 63, \\ 2cd &= 16. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe izrazimo $d = \frac{8}{c}$ in vstavimo v prvo enačbo, da dobimo $c^2 - \frac{64}{c^2} = 63$. Enačbo preuredimo do $c^4 - 63c^2 - 64 = 0$ in levo stran razstavimo $(c^2 + 1)(c^2 - 64) = 0$. Od tod sledi $c^2 = 64$ oziroma $c = \pm 8$ in posledično $d = \pm 1$. Torej je $w = 8 + i$ ali $w = -8 - i$. Obravnavajmo oba primera.

Če je $w = 8 + i$, iz druge enačbe v nalogi sledi

$$2(a + bi) - i\sqrt{a^2 + b^2} = 8 + i.$$

Zopet primerjamo realna in imaginarna dela in dobimo

$$\begin{aligned} 2a &= 8 \\ 2b - \sqrt{a^2 + b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Od tod najprej izračunamo $a = 4$, nato pa slednje vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $2b - \sqrt{16+b^2} = 1$. Enačbo preoblikujemo v $\sqrt{16+b^2} = 2b-1$ in jo kvadriramo, da dobimo $16+b^2 = 4b^2-4b+1$. Enačbo sedaj uredimo $3b^2-4b-15 = 0$ in levo stran razstavimo $(3b+5)(b-3) = 0$. Rešitvi enačbe sta $b = -\frac{5}{3}$ in $b = 3$, od katerih pa le druga ustreza enačbi $\sqrt{16+b^2} = 2b-1$. Torej je $b = 3$ in $z = 4+3i$.

Če je $w = -8-i$, na enak način kot v prvem primeru pridemo do sistema enačb

$$\begin{aligned} 2a &= -8 \\ 2b - \sqrt{a^2+b^2} &= -1. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izračunamo $a = -4$, zato iz druge enačbe dobimo $2b - \sqrt{16+b^2} = -1$. Po preoblikovanju tokrat dobimo $\sqrt{16+b^2} = 2b+1$, po kvadriranju pa $16+b^2 = 4b^2+4b+1$. Enačbo uredimo $3b^2+4b-15 = 0$ in levo stran spet razstavimo $(3b-5)(b+3) = 0$. Rešitvi enačbe sta $b = \frac{5}{3}$ in $b = -3$, od katerih le prva ustreza enačbi $\sqrt{16+b^2} = 2b+1$. Sledi $b = \frac{5}{3}$ in $z = -4+\frac{5}{3}i$.

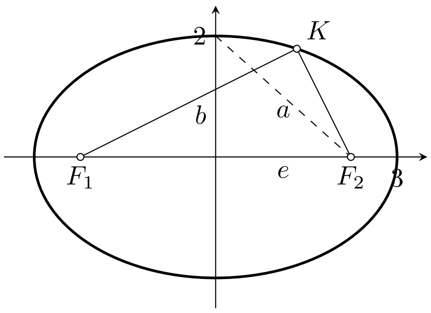
Sistem enačb ima torej dve rešitvi, to sta $w = 8+i$, $z = 4+3i$ ter $w = -8-i$, $z = -4+\frac{5}{3}i$.

Ureditev prve enačbe do $c^2+2icd-d^2 = 63+16i$ .... 1 točka
Zapis sistema enačb $c^2-d^2 = 63, 2cd = 16$ .... 2 točki
Rešitev sistema enačb .... 1 točka
Zapis rešitve $w = 8+i$ ali $w = -8-i$ .... 2 točki
Zamenjava $w = 8+i$ v drugi enačbi .... 1 točka
Zapis sistema enačb $2a = 8, 2b - \sqrt{a^2+b^2} = 1$ .... 2 točki
Rešitev sistema enačb .... 2 točki
Izločitev rešitve $b = -\frac{5}{3}$ .... 1 točka
Zapis rešitve $z = 4+3i$ .... 1 točka
Zamenjava $w = -8-i$ v drugi enačbi .... 1 točka
Zapis sistema enačb $2a = -8, 2b - \sqrt{a^2+b^2} = -1$ .... 2 točki
Rešitev sistema enačb .... 2 točki
Izločitev rešitve $b = -3$ .... 1 točka
Zapis rešitve $z = -4+\frac{5}{3}i$ .... 1 točka

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

16. marec 2006

Rešitve nalog za Naloge za 4. letnik



1.

Enačbo elipse delimo s 36, da dobimo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Dana elipsa je v središčni legi, njena velika polos je enaka $a = 3$, njena mala polos pa $b = 2$. Ker točka K leži na elipsi, velja $|KF_1| + |KF_2| = 2a = 6$. Ker pa je $|KF_1| : |KF_2| = 2$, sledi $|KF_1| = 4$ in $|KF_2| = 2$. Linearna ekscentričnost elipse je enaka $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, zato je $|F_1F_2| = 2e = 2\sqrt{5}$. Opazimo, da velja $|KF_1|^2 + |KF_2|^2 = 20 = |F_1F_2|^2$, torej je trikotnik KF_1F_2 pravokoten s pravim kotom pri K. Njegova ploščina je zato enaka $p = \frac{1}{2} \cdot |KF_1| \cdot |KF_2| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

2. način. Postopamo enako kot v prvi rešitvi, ploščino trikornika KF_1F_2 pa izračunamo po Heronovem obrazcu $p = \sqrt{s(s-a_1)(s-b_1)(s-c_1)}$, kjer je $s = \frac{a_1+b_1+c_1}{2}$ in $a_1 = |F_1F_2| = 2\sqrt{5}$, $b_1 = |KF_2| = 2$, $c_1 = |KF_1| = 4$. Torej je $s = 3 + \sqrt{5}$ in zato je ploščina trikotnika enaka

$$p = \sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{(9-5)(5-1)} = 4.$$

Zapis središča, velike in male polosi elipse . . . . 2 točki
Pregledno narisana in označena skica . . . . 2 točki
Utemeljena ugotovitev $|KF_1| + |KF_2| = 2a = 6$ . . . . 2 točki
Izračun $|KF_1| = 4$ in $|KF_2| = 2$ . . . . 1 točka
Izračun $e = \sqrt{5}$ ali $|F_1F_2| = 2e = 2\sqrt{5}$ . . . . 1 točka
Utemeljena ugotovitev trikotnik KF_1F_2 pravokoten s pravim kotom pri K . . . . 8 točk
Izračun ploščine . . . . 4 točke.

2. način. Zapis središča, velike in male polosi elipse . . . . 2 točki
Pregledno narisana in označena skica . . . . 2 točki
Utemeljena ugotovitev $|KF_1| + |KF_2| = 2a = 6$ . . . . 2 točki
Izračun $|KF_1| = 4$ in $|KF_2| = 2$ . . . . 1 točka
Izračun $e = \sqrt{5}$ ali $|F_1F_2| = 2e = 2\sqrt{5}$ . . . . 1 točka
Zapis Heronovega obrazca in izračun $s = 3 + \sqrt{5}$ . . . . 4 točke
Izračun ploščine . . . . 8 točk.

2. Trditev bomo dokazali z matematično indukcijo. V bazi indukcije preverimo primera $n = 1$ in $n = 2$. Števili

$$x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x}$$

in

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

sta celi števili, saj je $x + \frac{1}{x}$ po predpostavki naloge celo število. V indukcijski predpostavki predpostavimo, da za neko naravno število $n \geq 2$ velja, da je $x^k + \frac{1}{x^k}$ celo število za vsa naravna števila $k \leq n$. V indukcijskem koraku moramo pokazati, da je tedaj tudi $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ celo število. Opazimo, da velja

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Ker je $n \geq 2$, sta n in $n-1$ naravni števili, zato so po indkukcijski predpostavki števila $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ in $x + \frac{1}{x}$ cela števila. Od tod sledi, da je tudi $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ celo število, saj so cela števila zaprta za množenje in odštevanje. S tem je indukcija zaključena in trditev dokazana.

Baza indukcije ($n = 1$ in $n = 2$) .... 6 točk
Zapis indukcijske predpostavke .... 2 točki
Preoblikovanje $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ v $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$ .... 8 točk
Argumentiran končni sklep indukcije .... 4 točke.