Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dokaži, da je za vsako naravno število n število $7^{2018} + 9^{2020n}$ deljivo s 5. *(20 točk)*

B2. Naj bosta a in b realni števili, za kateri velja $\frac{3a}{a+b} + \frac{2b}{a+2b} = 1$. Določi vse možne vrednosti izraza $\frac{2a-3b}{2a+b}$. *(20 točk)*

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Nad stranicami trikotnika ABC konstruiramo pozitivno orientirane rombe BAA_1B_2, CBB_1C_2 in ACC_1A_2. Dokaži, da lahko iz daljic A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 z vzporednimi premiki sestavimo trikotnik, če te daljice niso vzporedne. *(20 točk)*

B2. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki rešijo sistem enačb

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,$$

$$\sqrt{8x+7}-\sqrt{8y+7}=2.$$

(20 točk)

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B2. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo neenačbo $3^{\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}} > 27$. *(20 točk)*

B1. Za notranja kota α in β trikotnika ABC z obsegom 24 velja $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ in $\cos\beta = \frac{2}{7}$. Izračunaj ploščino trikotnika ABC. *(20 točk)*

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B2. 8 prijateljev, od tega 3 dekleta, se bo v zabaviščnem parku peljalo z velikim razglednim kolesom. Vseh 8 prijateljev se bo naključno razporedilo v 4 proste kabine razglednega kolesa, v vsako kabino po 2 prijatelja. Kolikšna je verjetnost, da nobeni 2 dekleti ne bosta sedeli v isti kabini? *(20 točk)*

B1. Zapiši enačbo stožnice, na kateri ležijo središča vseh tistih krožnic, ki se hkrati dotikajo krožnice $x^2 + y^2 = 9$ in krožnice $x^2 + (y - 4)^2 = 1$, a ne vsebujejo točke $T(0, 3)$. Enačbo stožnice zapiši v standardni obliki. *(20 točk)*

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 1. letnik

B1. Število $9^{2020n} = 9^{2\cdot 1010n} = 81^{1010n}$ ima pri deljenju s 5 ostanek 1, saj je njegova zadnja števka v desetiškem zapisu enaka 1, neglede na to, koliko je vrednost naravnega števila n. Število $7^{2018} = 7^{4\cdot 504+2} = 2401^{504} \cdot 49$ pa ima pri deljenju s 5 ostanek 4, saj je njegova zadnja števka v desetiškem zapisu enaka 9. Ker je vsota obeh ostankov $4+1=5$ deljiva s 5, je tudi število $7^{2018}+9^{2020n}$ deljivo s 5 za vsako naravno število n.

2. način. Zadnje števke potenc števila 9 v desetiškem zapisu so enake: 9 za 9^{2k+1} in 1 za 9^{2k}, kjer je k poljubno nenegativno celo število. Zadnja števka števila 9^{2020n} je torej 1. Podobno so zadnje števke potenc števila 7 v desetiškem zapisu enake: 7 za 7^{4m+1}, 9 za 7^{4m+2}, 3 za 7^{4m+3} in 1 za 7^{4m}, kjer je m poljubno nenegativno celo število. Ker je $2018 = 4\cdot 504+2$, je zadnja števka števila 7^{2018} enaka 9. Za vsako naravno število n je torej zadnja števka števila $7^{2018}+9^{2020n}$ v desetiškem zapisu enaka 0, kar pomeni, da je to število deljivo s 5.

Ugotovitev, da so enice števila 9^{2020n} enake 1 .... 7 točk
Sklep, da je ostanek pri deljenju števila 9^{2020n} s 5 enak 1 .... 1 točka
Ugotovitev, da so enice števila 7^{2018} enake 9 .... 9 točk
Sklep, da je ostanek pri deljenju števila 7^{2018} s 5 enak 4 .... 1 točka
Sklep, da je število $7^{2018}+9^{2020n}$ deljivo s 5 za vsako naravno število n .. 2 točki

B2. V dani enakosti odpravimo ulomke, da dobimo $3a(a+2b)+2b(a+b)=(a+b)(a+2b)$ oziroma $3a^2+6ab+2ab+2b^2=a^2+2ab+ab+2b^2$. Enakost nato preoblikujemo do $2a^2+5ab=0$ in levo stran razstavimo $a(2a+5b=0)$. Če je $a=0$, tedaj mora biti $b \neq 0$, sicer ulomka $\frac{3a}{a+b}$ in $\frac{2b}{a+2b}$ ne bi bila definirana, in zato je $\frac{2a-3b}{2a+b}=\frac{-3b}{b}=-3$. Če pa je $a \neq 0$, mora veljati $2a+5b=0$ oziroma $2a=-5b$. Tedaj je tudi $b \neq 0$ in zato je $\frac{2a-3b}{2a+b}=\frac{-5b-3b}{-5b+b}=\frac{-8b}{-4b}=2$. Možni vrednosti izraza $\frac{2a-3b}{2a+b}$ sta -3 in 2.

Preoblikovanje izraza v $3a(a+2b)+2b(a+b)=(a+b)(a+2b)$ **.............. 2 točki**
Zapis ekvivalentne enačbe $2a^2+5ab=0$ **.............. 2 točki**
Razcep v produkt $a(2a+5b)=0$ **.............. 1 točka**
Zapis prve rešitve $a=0$ **.............. 2 točki**
Utemeljen sklep, da je $b \neq 0$ **v primeru, ko je** $a=0$ **.............. 2 točki**
Izračun $\frac{2a-3b}{2a+b}=-3$**, ko je** $a=0$ **.............. 2 točki**
Zapis pogojev za drugo rešitev:
$a \neq 0$ **.............. 1 točka**
$2a=-5b$ **.............. 2 točki**
$b \neq 0$ **.............. 1 točka**
Izračun $\frac{2a-3b}{2a+b}=2$ **.............. 3 točke**
Zapis končne rešitve .... 2 točki

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 2. letnik

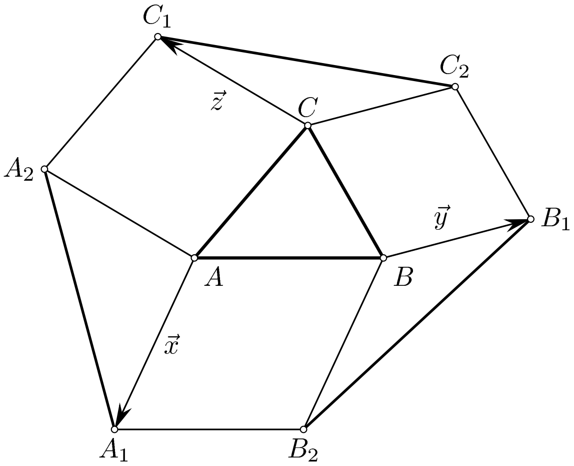
B1. Vpeljimo vektorje $\vec{x} = \vec{AA_1}$, $\vec{y} = \vec{BB_1}$ in $\vec{z} = \vec{CC_1}$. Tedaj je $\vec{AA_2} = \vec{z}$, $\vec{BB_2} = \vec{x}$ in $\vec{CC_2} = \vec{y}$, saj sta nasprotni stranici vsakega romba vzporedni in enako dolgi. Sledi

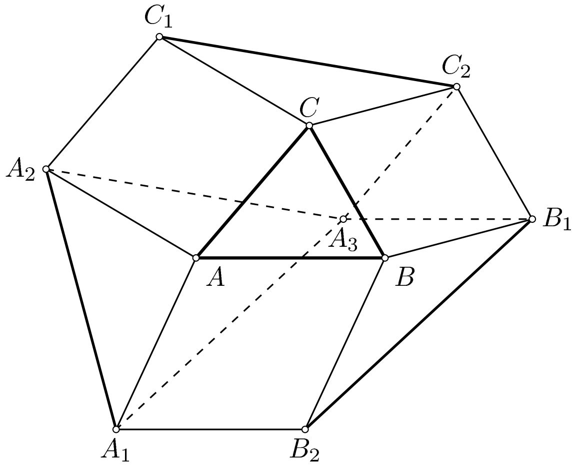
$$\vec{A_1A_2} = \vec{z} - \vec{x}, \quad \vec{B_1B_2} = \vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{C_1C_2} = \vec{y} - \vec{z}.$$

Opazimo, da je vsota vektorjev $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2}$ enaka $\vec{0}$. To pomeni, da če daljice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 vzporedno premaknemo tako, da krajišče B_1 postavimo na krajišče A_2 in nato krajišče C_1 postavimo na krajišče B_2, tedaj krajišči C_2 in A_1 sovpadeta. Tedaj premaknjene daljice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 tvorijo nov trikotnik, če niso vzporedne, oziroma, če na začetku niso bile vzporedne.

Opomba. Trikotnik lahko sestavimo tudi tako, da krajišče C_1 postavimo na krajišče A_2 in nato krajišče B_1 postavimo na krajišče C_2. V tem primeru krajišči B_2 in A_1 sovpadeta.

2. način. Naj bo A_3 taka točka, da je $A_2A_3C_2C_1$ paralelogram. Tedaj so daljice AC, A_2C_1 in A_3C_2 enako dolge in vzporedne, saj sta nasprotni stranici vsakega paralelograma enako dolgi in vzporedni. Prav tako sta enako dolgi in vzporedni tudi daljici BC in B_1C_2. Sledi, da sta trikotnika ABC in $A_3B_1C_2$ skladna, saj imata dva para enako dolgih vzporednih stranic, in zato sta tudi daljici AB in A_3B_1 enako dolgi in vzporedni. Posledično je tudi $A_1B_2B_1A_3$ paralelogram, torej sta tudi daljici B_1B_2 in A_3A_1 enako dolgi in vzporedni. Če torej daljice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 niso vzporedne, tedaj lahko iz njih z vzporednimi premiki sestavimo trikotnik $A_1A_3A_2$, tako da premaknemo C_1C_2 na A_2A_3 ter B_1B_2 na A_3A_1.





Narisana in označena skica (vključno z izbranimi vektorji $\vec{x}, \vec{y}$ in $\vec{z}$) .... 5 točk
Zapis $\vec{AA_2} = \vec{z}$, $\vec{BB_2} = \vec{x}$ in $\vec{CC_2} = \vec{y}$ .... 2 točki
Zapis $\vec{A_1A_2} = \vec{z} - \vec{x}$, $\vec{B_1B_2} = \vec{x} - \vec{y}$, $\vec{C_1C_2} = \vec{y} - \vec{z}$ .... 3 točke

Izračun $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = 0$ .... 4 točke
Utemeljen sklep, da lahko iz daljic A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 z ustreznimi vzporednimi premiki tvorimo nov trikotnik .... 6 točk

2. način

Narisana in označena skica (vključno z izbrano točko A_3) .... 5 točk
Utemeljena ugotovitev, da so daljice AC, A_2C_1 in A_3C_2 vzporedne in skladne .. 2 točki
Utemeljena ugotovitev, da sta daljici BC in B_1C_2 vzporedni in skladni ... 2 točki
Utemeljen sklep, da sta trikotnika ABC in $A_3B_1C_2$ skladna .... 3 točke
Ugotovitev, da sta daljici AB in A_3B_1vzporedni in skladni .... 1 točka
Ugotovitev, da je $A_1B_2B_1A_3$ paralelogram .... 2 točki
Utemeljena ugotovitev, da sta daljici B_1B_2 in A_3A_1 vzporedni in skladni .. 2 točki
Utemeljena ugotovitev, da lahko iz daljic A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 z ustreznimi vzporednimi premiki sestavimo trikotnik $A_1A_3A_2$ .... 3 točke

B2. Enačbi preoblikujemo v ekvivalentni enačbi $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{y}$ in $\sqrt{8x+7} = 2 + \sqrt{8y+7}$ ter ju nato kvadriramo, da dobimo

$$x = 1 + 2\sqrt{y} + y \qquad \text{in}$$

$$8x + 7 = 4 + 4\sqrt{8y+7} + 8y + 7.$$

Od spodnje enačbe odštejemo 8-kratnik zgornje enačbe in dobljeno enačbo poenostavimo, da dobimo $1 + 4\sqrt{y} = \sqrt{8y+7}$. Enačbo kvadriramo in poenostavimo do $4\sqrt{y} = 3 - 4y$. Ko enačbo še enkrat kvadriramo, dobimo kvadratno enačbo $16y^2 - 40y + 9 = 0$, katere levo stran lahko razstavimo kot $(4y-1)(4y-9) = 0$. Dobimo dve rešitvi, $y_1 = \frac{1}{4}$ in $y_2 = \frac{9}{4}$. Iz enačbe $x = 1 + 2\sqrt{y} + y$ izračunamo še $x_1 = \frac{9}{4}$ in $x_2 = \frac{25}{4}$. Preverimo lahko, da par (x_1, y_1) reši začetni sistem enačb, par (x_2, y_2) pa ne, saj je

$$\sqrt{8 \cdot \frac{25}{4} + 7} - \sqrt{8 \cdot \frac{9}{4} + 7} = \sqrt{57} - 5,$$

kar ni celo število in zato ne more biti enako 2. Torej je edina rešitev naloge par $x = \frac{9}{4}$ in $y = \frac{1}{4}$.

Preoblikovanje v ekvivalentni enačbi $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{y}$ **in** $\sqrt{8x+7} = 2 + \sqrt{8y+7}$ **....2 točki**
Kvadriranje enačb ....3 točke
Zapis enačbe z eno samo neznanko .... 5 točk
Kvadriranje enačbe $1 + 4\sqrt{y} = \sqrt{8y+7}$ **......................................2 točki**
Zapis kvadratne enačbe $16y^2 - 40y + 9 = 0$ **................................ 2 točki**
Izračunani rešitvi y_1 **in** y_2 **..2 točki**
Izračunana x_1 **in** x_2 **..2 točki**
Izključitev rešitve $(\frac{25}{4}, \frac{9}{4})$ **..2 točki**

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Rešitve za 3. letnik

B1. Najprej opazimo, da mora biti $x \neq -1$, sicer ulomek v eksponentu ni definiran. Ker je $27 = 3^3$ in je eksponentna funkcija z osnovo 3 naraščajoča, je dana neenačba ekvivalentna neenačbi $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$. Neenačbo pomnožimo z $(x+1)^2$ (neenačaj se pri tem ohrani), da dobimo $-x^2 - 2x + 3 > 3(x+1)^2$. Neenačbo sedaj poenostavimo do $4x^2 + 8x < 0$ in levo stran razstavimo $4x(x+2) < 0$. Rešitve te neenačbe so $x \in (-2, 0)$, saj je kvadratna funkcija s pozitivnim vodilnim koeficientom negativna na intervalu med svojima ničlama. Z upoštevanjem pogoja $x \neq -1$ je torej končna rešitev naloge $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$.

2. način. Kot v prvi rešitvi opazimo, da mora biti $x \neq -1$ in sklepamo, da je dana neenačba ekvivalentna neenačbi $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$. Neenačbo sedaj preuredimo v $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} - 3 > 0$ in levo stran postavimo na skupni imenovalec $\frac{-x^2-2x+3-3x^2-6x-3}{(x+1)^2} > 0$. Števec poenostavimo in neenačbo pomnožimo z -1, da dobimo $\frac{4x^2+8x}{(x+1)^2} < 0$. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{4x^2+8x}{(x+1)^2}$ ima ničli 1. stopnje pri $x = 0$ in $x = -2$, ter pol 2. stopnje pri $x = -1$. Funkcija zavzame negativne vrednosti na intervalih $(-2,-1)$ in $(-1,0)$. Rešitve neenačbe so torej $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$.

Zapis pogoja $x \neq -1$ .... 2 točki
Utemeljitev, da sta neenačbi $3^{\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}} > 27$ in $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$ ekvivalentni .. 4 točke
Zapis ekvivalentne neenačbe $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$ .... 2 točki
Utemeljitev, da sta neenačbi$\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$ in $-x^2-2x+3 > 3(x+1)^2$ ekvivalentni 3 točke
Zapis neenačbe $-x^2-2x+3 > 3(x+1)^2$ .... 1 točki
Zapis kvadratne neenačbe $4x^2+8x < 0$ .... 2 točki
Razcep (zapisani ali upoštevani rešitvi kvadratne enačbe) .... 2 točki
Rešitev kvadratne neenačbe $x \in (-2,0)$ .... 2 točki
Zapis končne rešitve $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$ .... 2 točki

2. način.
Zapis pogoja $x \neq -1$ .... 2 točki
Utemeljitev, da sta neenačbi $3^{\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}} > 27$ in $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$ ekvivalentni .. 4 točke
Zapis ekvivalentne neenačbe $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} > 3$ .... 2 točki
Zapis neenačbe $\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2} - 3 > 0$ .... 1 točka
Skupni imenovalec .... 1 točka
Zapis neenačbe $\frac{4x^2+8x}{(x+1)^2} < 0$ .... 2 točki
Določitev obeh ničel .... 2 točki
Določitev pola .... 2 točki
Zapis rešitev začetne neenačbe $x \in (-2,-1) \cup (-1,0)$ .... 4 točke

B2. Opazimo, da sta kota α in β ostra, saj sta $\cos\alpha$ in $\cos\beta$ pozitivna. Označimo stranice trikotnika ABC kot običajno z a, b in c. Naj bo C' nožišče višine v skozi oglišče C. Dolžini daljic AC' in BC' označimo zaporedoma z b_1 in a_1. Tedaj velja

$$a_1 = a\cos\beta = \frac{2}{7}a \qquad \text{in} \qquad b_1 = b\cos\alpha = \frac{2}{3}b.$$

Po sinusnem izreku velja $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Ker sta kota α in β ostra, sta $\sin\alpha$ in $\sin\beta$ pozitivna, zato je $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ in $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$. Od tod sledi

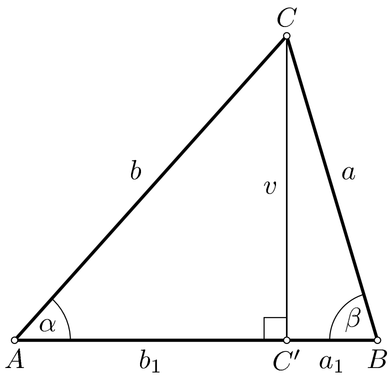
$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a = \frac{3\sqrt{5}}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot a = \frac{9}{7}a.$$

Od tod izrazimo še $b_1 = \frac{2}{3}b = \frac{6}{7}a$. Obseg trikotnika je torej

$$o = a + b + a_1 + b_1 = a + \frac{9}{7}a + \frac{2}{7}a + \frac{6}{7}a = \frac{24}{7}a,$$

in ker mora biti enak 24, je $a = 7$ ter posledično $b = 9$, $a_1 = 2$ in $b_1 = 6$. Višina v trikotnika ABC je zato enaka $v = a\sin\beta = 7\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$, ploščina trikotnika pa je enaka

$$p = \frac{(a_1+b_1)v}{2} = \frac{8\cdot 3\sqrt{5}}{2} = 12\sqrt{5}.$$



2. način. Uporabimo oznake iz prve rešitve. Ker sta $\cos\alpha$ in $\cos\beta$ pozitivna, sta kota α in β ostra, zato lahko na kotne funkcije gledamo kot na razmerje ustreznih stranic v pravokotnem trikotniku. Ker je $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, v trikotniku $AC'C$ velja $b_1 : b = 2 : 3$, zato smemo označiti $b_1 = 2t$ in $b = 3t$ za nek $t > 0$. Podobno smemo v trikotniku $C'BC$ označiti $a_1 = 2t'$ in $a = 7t'$ za nek $t' > 0$. Sedaj iz obeh pravokotnih trikotnikov po Pitagorovem izreku izračunamo višino

$$v = \sqrt{9t^2 - 4t^2} = \sqrt{5}t \qquad \text{in} \qquad v = \sqrt{49t'^2 - 4t'^2} = 3\sqrt{5}t'.$$

Sledi $\sqrt{5}t = 3\sqrt{5}t'$ oziroma $t = 3t'$. Obseg trikotnika je zato enak

$$o = a + b + a_1 + b_1 = 7t' + 9t' + 2t' + 6t' = 24t',$$

od koder sledi $t' = 1$ in $t = 3$. Stranica c trikotnika je torej enaka $c = a_1 + b_1 = 2 + 6 = 8$, višina pa $v = 3\sqrt{5}$. Od tod izračunamo še ploščino trikotnika

$$p = \frac{c\cdot v}{2} = 12\sqrt{5}.$$

Pregledno narisana in označena skica (narisana višina in označena odseka) . 1 točka
Zapis $a_1 = \frac{2}{7}a$ **...1 točka**
Zapis $b_1 = \frac{2}{3}b$ **...1 točka**
Zapis ali uporaba zveze $sin^2x + cos^2x = 1$ **................................1 točka**
Izračun $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **...1 točka**
Izračun $\sin\beta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ **...1 točka**
Utemeljitev, zakaj sta $\sin\alpha$ **in** $\sin\beta$ **pozitivna ....1 točka**
Zapis ali uporaba sinusnega izreka ....1 točka
Izračun $b = \frac{9}{7}a$ **...4 točke**
Zapis obsega trikotnika z eno neznanko .... 2 točki
Izračun a **ali** b **...1 točka**
Izračun c **...1 točka**
Izračun v **... 2 točki**
Izračun ploščine trikotnika $p = 12\sqrt{5}$ **...................................2 točki**

2. način **Pregledno narisana in označena skica z narisano višino in odsekoma na stranici** c **...1 točka**
Ugotovitev $b_1 = 2t$**,** $b = 3t$ **... 3 točke**
Ugotovitev $a_1 = 2t'$ **in** $a = 7t'$ **..1 točka**
Zapis ali uporaba Pitagorovega izreka ....1 točka
Izračun $v = 3\sqrt{5}t'$ **.. 3 točke**
Izračun $v = \sqrt{5}t$ **...1 točka**
Zapis obsega trikotnika z eno neznanko ....5 točk
Izračun c **...1 točka**
Izračun v **... 2 točki**
Izračun ploščine trikotnika $p = 12\sqrt{5}$ **...................................2 točki**

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 21. marec 2019

Rešitve za 4. letnik

B1. Naj bo A dogodek, da nobeni 2 dekleti ne sedita v isti kabini. Verjetnost dogodka A izračunamo po formuli

$$P(A) = \frac{\text{ugodne razporeditve}}{\text{vse razporeditve}}.$$

Vseh možnih razporeditev je $8!$, saj moramo 8 prijateljev na poljuben način razporediti na 8 sedišč, kar pomeni, da štejemo permutacije na 8 elementih.

Ugodne razporeditve preštejemo tako, da najprej izberemo 3 izmed 4 kabin, v katerih bodo sedela dekleta, in v vsaki od teh 3 kabin izberemo 1 od 2 sedišč, na katerem bo sedelo dekle. To lahko storimo na $\binom{4}{3} \cdot 2^3$ različnih načinov. Nato pa najprej razporedimo dekleta na njihova sedišča na $3!$ različnih načinov in nato še fante na njihova sedišča na $5!$ različnih načinov. Ugodnih razporeditev je torej $\binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot 5!$. Verjetnost, da nobeni 2 dekleti ne bosta sedeli v isti kabini je torej

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{\frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 2^3 \cdot 3!}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4! \cdot 2^3}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{7}.$$

2. način. Rešitev lahko poiščemo tudi s pomočjo kombinacij, pri čemer upoštevamo, da ni pomembno, kako v posamezni kabini sedita prijatelja. Vse možnosti preštejemo tako, da najprej v prvo kabino postavimo 2 izmed 8 prijateljev, nato v drugo postavimo 2 izmed preostalih 6 prijateljev, zatem v tretjo postavimo 2 izmed preostalih 4 prijateljev in nazadnje še preostala 2 prijatelja postavimo v zadnjo kabino. To lahko storimo na $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}$ različnih načinov. Ugodne možnosti preštejemo tako, da najprej izberemo 3 izmed 4 kabin, kjer bodo sedela dekleta, kar lahko storimo na $\binom{4}{3}$ različnih načinov. V prvo od teh kabin postavimo 1 od 3 deklet in 1 od 5 fantov na $3 \cdot 5 = 15$ načinov, nato v drugo od teh kabin postavimo 1 od preostalih 2 deklet in 1 od preostalih 4 fantov na $2 \cdot 4 = 8$ načinov in zatem v tretjo od teh kabin postavimo preostalo dekle in 1 od preostalih 3 fantov na $1 \cdot 3 = 3$ načine. Preostala 2 fanta pa postavimo v preostalo kabino. Ugodnih možnosti je torej $\binom{4}{3} \cdot 15 \cdot 8 \cdot 3$, verjetnost opisanega dogodka A pa je enaka

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot 15 \cdot 8 \cdot 3}{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}} = \frac{4}{7}.$$

3. način. Namesto verjetnosti dogodka A, izračunamo verjetnost nasprotnega dogodka A'. Vse možnosti preštejemo na enak kot v 2. rešitvi. Ugodne možnosti za dogodek A' preštejemo tako, da najprej izberemo 1 izmed 4 kabin v kateri bosta sedeli 2 dekleti in vanjo postavimo 2 izmed 3 deklet. Nato izmed preostalih 3 kabin izberemo 1 v kateri bosta sedela dekle in fant ter vanjo postavimo preostalo dekle in 1 od 5 fantov. V tretjo kabino postavimo 2 izmed preostalih 4 fantov, zadnja 2 fanta pa postavimo v zadnjo kabino. Verjetnost dogodka A' je zato enaka

$$P(A') = \frac{4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}} = \frac{3}{7},$$

verjetnost dogodka A pa je $P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

Zapis ali uporaba $P(A) = \frac{\textbf{ugodne razporeditve}}{\textbf{vse razporeditve}}$ **.................................. 1 točka**
Zapis števila vseh možnosti .... 6 točk
Zapis števila vseh ugodnih možnosti .... 10 točk
Izračun verjetnosti $P(A) = \frac{4}{7}$ **.. 3 točke**

B2. Označimo dani krožnici zaporedoma s $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Krožnica $\mathcal{K}_1$ ima središče v $S_1(0,0)$ in polmer $r_1 = 3$, krožnica $\mathcal{K}_2$ pa ima središče v $S_2 = (0,4)$ in polmer $r_2 = 1$. Krožnici se od zunaj dotikata v točki $T(0,3)$. Krožnice, ki se hkrati dotikajo krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ in vsebujejo točko $T(0,3)$, imajo središča na y-osi. Med preostalimi krožnicami $\mathcal{K}$, ki se hkrati dotikajo obeh danih krožnic, so take, ki se obeh dotikajo od zunaj in take, ki se obeh dotikajo od znotraj, kot to prikazujeta sliki.

Obravnavajmo najprej primer, ko se krožnica $\mathcal{K}$ dotika krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ od zunaj. Naj bo $S(x,y)$ središče krožnice $\mathcal{K}$, kjer je $S \neq T$. Tedaj je radij krožnice $\mathcal{K}$ enak $r = |SS_1| - r_1 = |SS_2| - r_2$. Ker je $|SS_1| = \sqrt{x^2+y^2}$ in $|SS_2| = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$, sledi

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2} + 2.$$

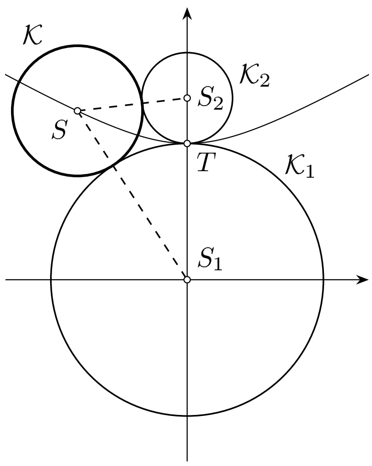
Enačbo kvadriramo, da dobimo $x^2+y^2 = x^2+(y-4)^2+4\sqrt{x^2+(y-4)^2}+4$. Slednje poenostavimo do $2y-5 = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$ in ponovno kvadriramo, pri čemer mora veljati $y \geq \frac{5}{2}$. Dobimo $4y^2-20y+25 = x^2+(y-4)^2$ oziroma $x^2-3y^2+12y = 9$.

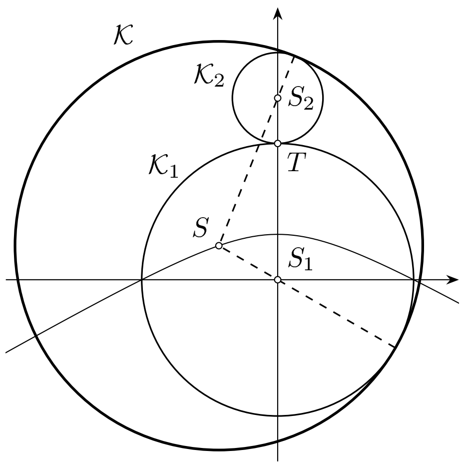
Obravnavajmo še primer, ko se krožnica $\mathcal{K}$ dotika krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ od znotraj. Tedaj je njen polmer enak $r = |SS_1| + r_1 = |SS_2| + r_2$, od koder sledi

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2} - 2.$$

Po kvadriranju in poenostavljanju dobimo $-2y+5 = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$. Po ponovnem kvadriranju pridemo do enake enačbe kot v prvem primeru, le da mora tokrat veljati $y \leq \frac{5}{2}$.

Rešitev je torej stožnica z enačbo $x^2-3y^2+12y = 9$. Standardna oblika enačbe je $\frac{x^2}{3}-(y-2)^2 = -1$ (kar predstavlja hiperbolo). Rešitev je enolično določena, saj je stožnica enolično določena že s 5 točkami. Opazimo lahko, da središča opazovanih krožnic pokrijejo celotno stožnico, razen točke $T(0,3)$.





Ugotovitev, da se krožnica lahko dotika narisanih krožnic na dva opisana načina 2 točki

Obravnava prve situacije in ugotovitev $r = |SS_1| - r_1 = |SS_2| - r_2$ **........ 4 točke**
Zapis ali uporaba formule za razdaljo med točkama .... 1 točka
Zapis enačbe $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2}+2$ **................................ 2 točki**

Enačba stožnice je $x^2 - 3y^2 + 12y = 9$ **ob pogoju** $y \geq \frac{5}{2}$ **.................... 2 točki**

Obravnava druge situacije in ugotovitev $r = |SS_1| + r_1 = |SS_2| + r_2$ **.......4 točke**
Zapis enačbe $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - 2$ **................................ 1 točki**
Enačba stožnice je $x^2 - 3y^2 + 12y = 9$ **ob pogoju** $y \leq \frac{5}{2}$ **.................... 2 točki**

Zapis končne rešitve $\frac{x^2}{3} - (y-2)^2 = -1$ **....................................2 točki**