Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dano je število $n = 100\ldots001$, zapisano z 2017 ničlami in 2 enkama.

(a) Ali je število n deljivo z 11?

(b) Ali je število n deljivo s 101?

(c) Ali je število n deljivo s 1001?

(20 točk)

B2. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-4y}+\frac{2}{x+y-5}&=0, \\ \frac{2}{x^2-4y^2}+\frac{1}{x^2+y^2-5}&=0. \end{aligned}$$

(20 točk)

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Naj bo ABC tak ostrokotni trikotnik, da oglišči A in B ter središči trikotniku očrtane in včrtane krožnice ležijo na isti krožnici. Dokaži, da na tej krožnici leži tudi višinska točka trikotnika ABC.

(20 točk)

B2. Poišči vse realne rešitve enačbe

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{3-x}.$$

(20 točk)

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dani sta točki A in B ter krožnica $\mathcal{K}$ s premerom AB. Na daljici AB izberemo točko T različno od A in B. Pravokotnica na daljico AB skozi točko T naj seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah M in N. Označimo $|AT| = x$, $|TB| = y$ in $|TN| = z$. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\log_y z + \log_x z}{\log_x z \log_y z}.$$

(20 točk)

B2. Naj bo $\sin \alpha + \sin \beta = 1$ in $\cos \alpha + \cos \beta = -\sqrt{3}$.

(a) Izračunaj vrednost izraza $\cos(\alpha - \beta)$.

(b) Poišči vse pare realnih števil α in β, ki ustrezajo danima enačbama.

(20 točk)

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Najmanj kolikokrat moramo hkrati vreči dve pošteni igralni kocki, da bo verjetnost, da bomo vsaj enkrat na obeh kockah hkrati vrgli enako število pik, večja od $\frac{1}{2}$?

(20 točk)

B2. Dano je zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ z začetnima členoma $a_1 = 4$ in $a_2 = 16$, za katerega je $\log_2(\log_2 a_1)$, $\log_2(\log_2 a_2)$, $\log_2(\log_2 a_3)$, $\ldots$ aritmetično zaporedje. Dokaži, da je

$$\log_2(\log_2(4a_1a_2\ldots a_n)) = n + 1$$

za vsa naravna števila n.

(20 točk)

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 1. letnik

B1. (a) Uporabimo pravilo za deljivost z 11. Naravno število $\overline{a_k \ldots a_3 a_2 a_1}$, kjer so a_i števke, je deljivo z 11 natanko tedaj, ko je število $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{k+1} a_k$ deljivo z 11. Ker

$$1 - \underbrace{0 + 0 - 0 + \ldots + 0 - 0}_{\text{2017 ničel}} + 1 = 2$$

ni deljivo z 11, tudi število n ni deljivo z 11.

Zapisano ali uporabljeno pravilo za deljivost z 11 .... **2 točki**
Izračun $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{2019+1} a_{2019} = 2$ .... **3 točke**
Odgovor .... **1 točka**

(b) Uporabimo obrazec $x^m + y^m = (x+y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \ldots - xy^{m-2} + y^{m-1})$, kjer je m liho število, da zapišemo

$$n = 10^{2018} + 1 = (10^2)^{1009} + 1 = (10^2+1)\big((10^2)^{1008} - (10^2)^{1007} + \ldots - 10^2 + 1\big) =$$
$$= 101 \cdot \big((10^2)^{1008} - (10^2)^{1007} + \ldots - 10^2 + 1\big).$$

Sledi, da je število n deljivo s 101.

Zapisan ali uporabljen obrazec za razcep vsote $x^m + y^m$ .... **3 točke**
Zapis števila n **kot** $10^{2018} + 1$ .... **2 točki**
Razcep števila n **v** $(10^2+1)\big((10^2)^{1008} - (10^2)^{1007} + \ldots - 10^2 + 1\big)$ .... **3 točke**
Zapis produkta $101 \cdot \big((10^2)^{1008} - (10^2)^{1007} + \ldots - 10^2 + 1\big)$ .... **1 točka**
Odgovor .... **1 točka**

(c) Število n ni deljivo s 1001, saj je $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ in po točki (a) število n ni deljivo z 11.

Razcep 1001 na prafaktorje .... **2 točki**
Utemeljen odgovor .... **2 točki**

2. način.

(a) Število n pisno delimo z 11.

$$\begin{array}{l} 10\lrcorner 0000 \ldots 01 : 11 = 90909\ldots \\ \;\;\;100 \\ \;\;\;\;\;\;100 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;1\ldots \end{array}$$

Opazimo, da se v vsaki naslednji vrstici vodilna števka 1 premakne za 2 mesti v desno. Ker ima število n liho mnogo ničel, dobimo na zadnjem koraku račun

$$\begin{array}{l} 101 : 11 = 9, \\ \quad 2 \text{ ost.} \end{array}$$

kar pomeni, da število n ni deljivo z 11.

Pravilen zapis pisnega deljenja s količnikom .... 3 točke
Zapisan zadnji korak deljenja (101:11) .... 2 točki
Odgovor .... 1 točka

(b) Število n pisno delimo s 101.

$$\begin{array}{l} 1000\lrcorner 00000\ldots 01 : 101 = 990099\ldots \\ \quad 910 \\ \qquad 1000 \\ \qquad\quad 910 \\ \qquad\qquad 1\ldots \end{array}$$

Opazimo, da se v lihih vrsticah vodilna števka 1 vsakič premakne za 4 mesta v desno. Ker ima število n natanko $2017 = 504 \cdot 4 + 1$ ničel, dobimo na zadnjem koraku račun $101 : 101 = 1$. Ostanek je 0, torej je število n deljivo s 101.

Pravilen zapis pisnega deljenja s količnikom .... 5 točk
Utemeljen in zapisan zadnji korak deljenja .... 4 točke
Odgovor .... 1 točka

(c) Število n pisno delimo s 1001.

$$\begin{array}{l} 10000\lrcorner 00000000\ldots 01 : 1001 = 999000999\ldots \\ \quad 9910 \\ \quad\; 9010 \\ \qquad\quad 10000 \\ \qquad\qquad 9910 \\ \qquad\qquad\; 9010 \\ \qquad\qquad\qquad 1\ldots \end{array}$$

Opazimo, da se v vsaki tretji vrstici vodilna števka 1 vsakič premakne za 6 mest v desno. Ker ima število n natanko $2017 = 336 \cdot 6 + 1$ ničel, dobimo na zadnjem koraku 101, kar je ostanek deljenja. Število n torej ni deljivo s 1001.

Pravilen zapis pisnega deljenja s količnikom .... 1 točka
Utemeljen in zapisan zadnji korak deljenja .... 2 točki
Odgovor .... 1 točka

B2. Odpravimo ulomke, da dobimo

$$\begin{aligned} 3(x+y-5)+2(x-4y)&=0,\\ 2(x^2+y^2-5)+(x^2-4y^2)&=0, \end{aligned}$$

in obe enačbi poenostavimo do

$$\begin{aligned} 5x-5y-15&=0,\\ 3x^2-2y^2-10&=0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $x=y+3$. Ko slednje vstavimo v drugo enačbo, dobimo $y^2+18y+17=0$. Levo stran enačbe razstavimo, da dobimo $(y+1)(y+17)=0$. Rešitvi sta $y=-1$ in $y=-17$. V prvem primeru iz zveze $x=y+3$ dobimo $x=2$, v drugem pa $x=-14$. Z obema rešitvama naredimo preizkus in ugotovimo, da v primeru $x=2$, $y=-1$ ulomka $\frac{2}{x^2-4y^2}$ in $\frac{1}{x^2+y^2-5}$ nista definirana. Edina rešitev sistema je torej par $x=-14$, $y=-17$.

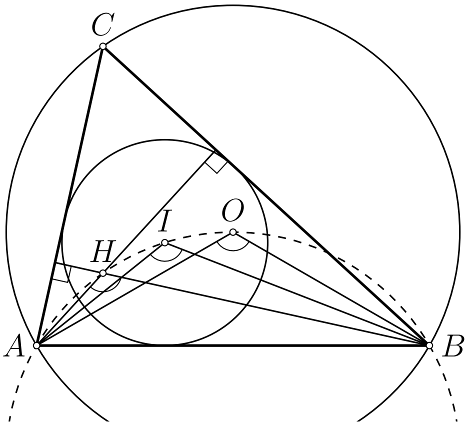
Zapis sistema enačb brez ulomkov .... **4 točke**
Poenostavitev sistema .... **2 točki**
Zapis $x=y+3$ .... **1 točka**
Zapis druge enačbe samo z neznanko y .... **3 točke**
Razcep enačbe v $(y+1)(y+17)=0$ .... **2 točki**
Zapis obeh rešitev za y .... **2 točki**
Zapis obeh rešitev za x .... **2 točki**
Izključitev rešitve $x=2, y=-1$ .... **2 točki**
Odgovor $x=-14, y=-17$ .... **2 točki**

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 2. letnik



B1.

Označimo z O, I in H zaporedoma središče očrtane krožnice, središče včrtane krožnice in višinsko točko trikotnika ABC. Kote trikotnika označimo kot običajno z α, β in γ. Ker je $\sphericalangle BAI = \frac{\alpha}{2}$ in $\sphericalangle IBA = \frac{\beta}{2}$, je $\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Po izreku o središčnem in obodnem kotu za očrtano krožnico velja $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Trikotnik ABC je ostrokoten, zato točki O in I ležita znotraj trikotnika ABC. Iz koncikličnosti točk A, B, O in I zato sledi $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AIB$ oziroma $2\gamma = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Od tod izračunamo $\gamma = 60°$.

Ker je trikotnik ABC ostrokoten, tudi točka H leži znotraj trikotnika. Iz definicije višinske točke sledi $\sphericalangle BAH = 90° - \beta$ in $\sphericalangle HBA = 90° - \alpha$, torej je $\sphericalangle AHB = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$. Ker je $\gamma = 60°$, sledi $\sphericalangle AHB = 120° = \sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB$. Točke A, H, I, O in B torej res vse ležijo na isti krožnici.

Pregledno narisana in označena skica .... **4 točke**
Ugotovitev, da je $\sphericalangle BAI = \frac{\alpha}{2}$ in $\sphericalangle IBA = \frac{\beta}{2}$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle AIB = 90° + \frac{\gamma}{2}$ .... **1 točka**
Uporaba zveze med središčnim in obodnim kotom nad istim lokom ($\sphericalangle AOB = 2\gamma$). .... **1 točka**
Utemeljena ugotovitev, da vse tri točke ležijo v notranjosti trikotnika. ... **3 točke**
Utemeljena ugotovitev, da je $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB$ .... **2 točki**
Izračun $\gamma = 60°$. .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $\sphericalangle BAH = 90° - \beta$ in $\sphericalangle HBA = 90° - \alpha$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle AHB = 180° - \gamma$ .... **2 točki**
Izračun $\sphericalangle AHB = 120° = \sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB$ .... **2 točki**
Utemeljen sklep, da točke A, H, I, O in B ležijo na isti krožnici. .... **2 točki**

B2. Enačbo preoblikuejmo v

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{3-x}-\sqrt{4x+2},$$

jo kvadriramo

$$(2x+1)+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4}+(x+4)=(3-x)-2\sqrt{3-x}\sqrt{4x+2}+(4x+2)$$

in poenostavimo, da dobimo

$$\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4}=-\sqrt{3-x}\sqrt{4x+2}.$$

Ko enačbo še enkrat kvadriramo in poenostavimo, dobimo kvadratno enačbo

$$6x^2-x-2=0.$$

Po formuli za kvadratno enačbo dobimo rešitvi $x_1=-\frac{1}{2}$ in $x_2=\frac{2}{3}$. Za obe rešitvi naredimo preizkus. Prva rešitev res ustreza enačbi, druga pa ne, saj dobimo $2\sqrt{\frac{14}{3}}+\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$. Edina rešitev enačbe je torej $x=-\frac{1}{2}$.

Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{3-x}-\sqrt{4x+2}$ **.......................1 točka**
Pravilno kvadriranje enačbe ....4 točke
Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4}=-\sqrt{3-x}\sqrt{4x+2}$**. ....5 točk**
Kvadriranje in preureditev enačbe v $6x^2-x-2=0$**. ....2 točki**
Razcep kvadratne enačbe. ....2 točki
Zapis obeh rešitev $x_1=-\frac{1}{2}$ **in** $x_2=\frac{2}{3}$**. ....2 točki**
Izključitev rešitve $x=\frac{2}{3}$ **...2 točki**
Zapis rešitve $x=-\frac{1}{2}$ **..2 točki**

2. način. Na enak način kot v prvi rešitvi dobimo

$$\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4}=-\sqrt{3-x}\sqrt{4x+2}.$$

Vidimo, da je leva stran enačbe večja ali enaka 0, desna pa manjša ali enaka 0. Torej morata biti obe strani enaki 0, kar je možno le pri $x=-\frac{1}{2}$.

Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{3-x}-\sqrt{4x+2}$ **.......................1 točka**
Pravilno kvadriranje enačbe ....4 točke
Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4}=-\sqrt{3-x}\sqrt{4x+2}$**. ....5 točk**
Ugotovitev, da je leva stran enačbe večja ali enaka 0**,**
desna pa manjša ali enaka 0**. ....2 točki**
Sklep: $(2x+1)(x+4)=0$ **in** $(3-x)(4x+2)=0$ **.............................2 točki**
Zapis rešitev $x_1=-\frac{1}{2}$ **in** $x_2=-4$**. ....1 točka**
Zapis rešitev $x_3=-\frac{1}{2}$ **in** $x_4=3$**. ....1 točka**
Izključitev rešitev $x=-4$ **in** $x=3$ **.......................................2 točki**
Zapis rešitve $x=-\frac{1}{2}$ **..2 točki**

3. način. Opazimo, da je $4x+2=2(2x+1)$, zato lahko enačbo preoblikujemo v

$$(1+\sqrt{2})\sqrt{2x+1}=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+4}.$$

Enačbo kvadriramo in preoblikujemo, da dobimo

$$(3+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}-2=-\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}.$$

Še enkrat kvadriramo in preuredimo do

$$(18+12\sqrt{2})x^2+(-3-2\sqrt{2})x-6-4\sqrt{2}=0.$$

Opazimo, da enačbo lahko krajšamo s $3+2\sqrt{2}$, da dobimo

$$6x^2-x-2=0.$$

Kot v prvi rešitvi ugotovimo, da ima ta enačba rešitvi $-\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{3}$, od katerih pa le prva reši začetno enačbo.

Ugotovitev, da je $4x+2=2(2x+1)$**. . . . . 1 točka**
Zapis enačbe $(1+\sqrt{2})\sqrt{2x+1}=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+4}$**. . . . . 1 točka**
Pravilno kvadriranje enačbe. . . . . 4 točke
Zapis enačbe $(3+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}-2=-\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}$**. . . . . 4 točke**
Preureditev enačbe v $(18+12\sqrt{2})x^2+(-3-2\sqrt{2})x-6-4\sqrt{2}=0$**. . . . . 1 točka**
Zapis enačbe $6x^2-x-2=0$**. . . . . 1 točka**
Razcep kvadratne enačbe . . . . 2 točki
Zapis rešitev $x_1=-\frac{1}{2}$ **in** $x_2=\frac{2}{3}$**. . . . . 2 točki**
Izključitev rešitve $x=\frac{2}{3}$ **. . . . . 2 točki**
Zapis rešitve $x=-\frac{1}{2}$ **. . . . . 2 točki**

4. način. Enačbo preoblikeujemo v

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+4}.$$

Po kvadriranju dobimo

$$6x+3+2\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+2}=7-2\sqrt{3-x}\sqrt{x+4},$$

kar spet nekoliko preoblikujemo v

$$\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+2}+\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}=2-3x.$$

Enačbo zopet kvadriramo in po preoblikovanju dobimo

$$2\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+2}\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}=2x^2-19x-10.$$

Še zadnjič kvadriramo in preoblikujemo do

$$36x^4-12x^3-23x^2+4x+4=0.$$

Levo stran lahko razstavimo kot $(2x+1)^2(3x-2)^2$, torej ima ta enačba rešitvi $x=-\frac{1}{2}$ in $x=\frac{2}{3}$. Kot v prvi rešitvi preverimo, da le prva od teh dveh vrednosti reši začetno enačbo.

Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+4}$ **........................ 1 točka**
Pravilno kvadriranje enačbe. .... 4 točke
Zapis enačbe $\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+2}+\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}=2-3x$**. .... 5 točk**
Preureditev enačbe v $2\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+2}\sqrt{3-x}\sqrt{x+4}=2x^2-19x-10$**. ... 1 točka**
Zapis enačbe $36x^4-12x^3-23x^2+4x+4=0$**. .... 1 točka**
Razcep enačbe. .... 2 točki
Zapis rešitev $x_1=-\frac{1}{2}$ **in** $x_2=\frac{2}{3}$**. .... 2 točki**
Izključitev rešitve $x=\frac{2}{3}$ **.. 2 točki**
Zapis rešitve $x=-\frac{1}{2}$ **.. 2 točki**

5. način. Enačbo preoblikujemo v

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+1}$$

ter jo nato kvadriramo. Dobimo

$$5x+6+2\sqrt{x+4}\sqrt{4x+2}=x+4-2\sqrt{3-x}\sqrt{2x+1},$$

kar preoblikujemo v

$$\sqrt{x+4}\sqrt{4x+2}+\sqrt{3-x}\sqrt{2x+1}=-1-2x.$$

Enačbo še enkrat kvadriramo in po preoblikovanju dobimo

$$2\sqrt{x+4}\sqrt{4x+2}\sqrt{3-x}\sqrt{2x+1}=2x^2-19x-10.$$

Od tu dalje postopamo kot v četrti rešitvi, da dobimo pridemo do edine rešitve enačbe, ki je $x=-\frac{1}{2}$.

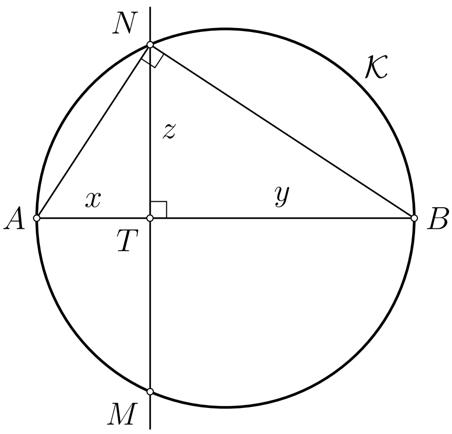
Zapis enačbe $\sqrt{x+4}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+1}$ **........................ 1 točka**
Pravilno kvadriranje enačbe. .... 4 točke
Zapis enačbe $\sqrt{x+4}\sqrt{4x+2}+\sqrt{3-x}\sqrt{2x+1}=-1-2x$**. .... 5 točk**
Preureditev enačbe v $2\sqrt{x+4}\sqrt{4x+2}\sqrt{3-x}\sqrt{2x+1}=2x^2-19x-10$**. ... 1 točka**
Zapis enačbe $36x^4-12x^3-23x^2+4x+4=0$**. .... 1 točka**
Razcep enačbe. .... 2 točki
Zapis rešitev $x_1=-\frac{1}{2}$ **in** $x_2=\frac{2}{3}$**. .... 2 točki**
Izključitev rešitve $x=\frac{2}{3}$ **.. 2 točki**
Zapis rešitve $x=-\frac{1}{2}$ **.. 2 točki**

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 3. letnik



B1.

Po Talesovem izreku o kotu v polkrogu je trikotnik ABN pravokoten s pravim kotom pri N. Po višinskem izreku v pravokotnem trikotniku zato velja $z^2 = xy$. Dan izraz zapišemo kot vsoto dveh ulomkov

$$\frac{\log_y z + \log_x z}{\log_x z \log_y z} = \frac{1}{\log_x z} + \frac{1}{\log_y z}$$

in nato uporabimo formulo za zamenjavo osnove logaritma $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$, da dobimo

$$\frac{1}{\log_x z} + \frac{1}{\log_y z} = \frac{1}{\frac{\log z}{\log x}} + \frac{1}{\frac{\log z}{\log y}} = \frac{\log x}{\log z} + \frac{\log y}{\log z} = \log_z x + \log_z y.$$

Upoštevamo formulo za vsoto logaritmov in zvezo $z^2 = xy$, da dobimo

$$\log_z x + \log_z y = \log_z(x \cdot y) = \log_z z^2 = 2.$$

Torej je

$$\frac{\log_y z + \log_x z}{\log_x z \log_y z} = 2.$$

Ugotovitev, da je trikotnik ABN pravokoten s pravim kotom pri N. . . . . 2 točki
Zapis ali uporaba zveze $z^2 = xy$. . . . . 4 točke
Zapis izraza $\frac{\log_y z+\log_x z}{\log_x z \log_y z}$ kot $\frac{1}{\log_x z} + \frac{1}{\log_y z}$. . . . . 3 točke
Izračun $\frac{1}{\log_x z} + \frac{1}{\log_y z} = \log_z x + \log_z y$. . . . . 5 točk
Zapis ali uporaba zveze $\log_z x + \log_z y = \log_z(x \cdot y)$. . . . . 3 točke
Izračun $\log_z(x \cdot y) = \log_z z^2$. . . . . 2 točki
Izračun $\log_z z^2 = 2$ . . . . 1 točka

B2. (a) Adicijski izrek za kosinus nam da $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Dani enačbi kvadriramo, da dobimo

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 1,$$
$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 3.$$

Dobljeni enačbi sedaj seštejemo in upoštevamo zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, da dobimo

$$1 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) + 1 = 4$$

od tod sledi $\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = 1$ oziroma $\cos(\alpha - \beta) = 1$.

(b) Ker je $\cos(\alpha - \beta) = 1$, sledi $\alpha - \beta = 2k\pi$ oziroma $\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Torej je $\cos\alpha = \cos(\beta + 2k\pi) = \cos\beta$ in podobno $\sin\alpha = \sin\beta$. Ko to upotevamo v obeh danih enačbah, iz njiju izrazimo $\sin\beta = \frac{1}{2}$ in $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Od tod sklepamo, da je $\beta = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Torej je $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2(n+k)\pi$. Če označimo $k + n = m$, lahko zapišemo $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Danima enačbama torej ustrezajo vsi pari $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$, $\beta = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, kjer sta m in n poljubni celi števili.

(a) Zapis ali uporaba adicijskega izreka.................................3 točke
Kvadriranje enačb. ....2 točki
Zapis ali uporaba zveze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$**.............................1 točka**
Zapis enačbe $1 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) + 1 = 4$ **.....................2 točki**
Preoblikovanje enačbe v $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1$**....................2 točki**

(b) Zapis rešitve $\alpha - \beta = 2k\pi$**. ....1 točka**
Ugotovitev, da je $\cos\alpha = \cos\beta$ **in** $\sin\alpha = \sin\beta$**. ....2 točki**
Ugotovitev, da je $\sin\beta = \frac{1}{2}$ **in** $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$**................................2 točki**
Izračun $\beta = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$**,** $n \in \mathbb{Z}$**...1 točka**
Izračun $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2(n+k)\pi$**...........................2 točki**
Zapis rešitev $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$**,** $\beta = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$**, kjer** $m, n \in \mathbb{Z}$**................2 točki**
(Če tekmovalec izpusti $m, n \in \mathbb{Z}$ **se mu 1 točka odšteje)**

61. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 16. marec 2017

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 4. letnik

B1. Moč algebre dogodkov pri metu dveh kock je $6 \cdot 6 = 36$. Hkrati lahko na obeh kockah pade isto število pik na 6 načinov. Verjetnost, da na obeh kockah pade isto število pik, če kocki vržemo enkrat, je torej enaka $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Denimo, da kocki vržemo n-krat. Naj bo A dogodek, da vsaj enkrat na obeh kockah pade enako število pik. Verjetnost nasprotnega dogodka $\overline{A}$, da nikoli ne pade enako število pik, je enaka $P(\overline{A}) = (1-p)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Verjetnost dogodka A je zato enaka $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Želimo, da je ta verjetnost večja od $\frac{1}{2}$, zato mora veljati

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}.$$

Vrednost izraza $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ je pri $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ zaporedoma enaka $\frac{1}{6}, \frac{11}{36}, \frac{91}{216}, \frac{671}{1296}, \ldots$ Prvič je vrednost večja od $\frac{1}{2}$ pri $n = 4$, zato moramo kocki vreči vsaj 4-krat.

Ugotovitev, da je moč algebre dogodkov 36 . . . . **1 točka**
Izračun $p = \frac{1}{6}$ . . . . **3 točke**
Izračun $P(\overline{A}) = (1-p)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ . . . . **5 točk**
Zapis $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ . . . . **2 točki**
Zapis neenačbe . . . . **2 točki**
Izračunana vrednost izraza $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ **za** $n = 1$ . . . . **1 točka**
Izračunana vrednost izraza $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ **za** $n = 2$ . . . . **1 točka**
Izračunana vrednost izraza $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ **za** $n = 3$ . . . . **1 točka**
Izračunana vrednost izraza $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ **za** $n = 4$ . . . . **1 točka**
Odgovor . . . . **3 točke**

B2. Zaporedje $\log_2(\log_2(a_n))$ je aritmetično z začetnima členoma $\log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$ in $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$, torej je $\log_2(\log_2 a_n) = n$. Od tod sledi $\log_2 a_n = 2^n$ in zato $a_n = 2^{2^n}$. S pomočjo formule za vsoto geometrijskega zaporedja izračunamo

$$4a_1a_2\dots a_n = 2^2 2^{2^1} 2^{2^2} 2^{2^3} \dots 2^{2^n} = 2^{1+1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^n} = 2^{1+(2^{n+1}-1)} = 2^{2^{n+1}},$$

od koder sledi $\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = \log_2(\log_2(2^{2^{n+1}})) = \log_2(2^{n+1}) = n+1$.

Izračun $\log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$ **in** $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$ **.................. 2 točki**
Ugotovitev, da je $\log_2(\log_2 a_n) = n$ **.. 3 točke**
Sklep $\log_2 a_n = 2^n$ **.. 1 točka**
Zapis $a_n = 2^{2^n}$ **.. 1 točka**
Preoblikovanje produkta $4a_1a_2\dots a_n$ **v** $2^{1+1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^n}$ **.................. 4 točke**
Zapis ali uporaba formule za vsoto n **členov geometrijskega zaporedja . 1 točka**
Izračun $4a_1a_2\dots a_n = 2^{2^{n+1}}$ **.. 3 točke**
Zapisana ali uporabljena zveza $\log_2(2^{2^{n+1}}) = 2^{n+1}$ **.......................... 2 točki**
Izračun $\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = n+1$ **..................................... 3 točke**

2. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo $\log_2(\log_2 a_n) = n$ oziroma $\log_2 a_n = 2^n$. Po formuli za logaritem produkta je

$$\begin{aligned}\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) &= \log_2(\log_2 4 + \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_n) = \\ &= \log_2(2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n).\end{aligned}$$

Ker je vsota geometrijskega zaporedja $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$ enaka $2^{n+1} - 1$, sledi $\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = \log_2(2^{n+1}) = n+1$.

Izračun $\log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$ **in** $\log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2$ **.................. 2 točki**
Ugotovitev, da je $\log_2(\log_2 a_n) = n$ **.. 3 točke**
Sklep $\log_2 a_n = 2^n$ **.. 1 točka**
Zapis $a_n = 2^{2^n}$ **.. 1 točka**
Zapis $\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = \log_2(\log_2 4 + \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_n)$ **.. 3 točke**
Zapis $\log_2(\log_2 4 + \log_2 a_1 + \dots + \log_2 a_n) = \log_2(2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n)$ **....... 2 točki**
Zapis ali uporaba formule za vsoto n **členov geometrijskega zaporedja . 1 točka**
Izračun $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ **................................. 3 točke**
Sklep $\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = \log_2(2^{n+1})$ **.............................. 3 točke**
Izračun $\log_2(2^{n+1}) = n+1$ **.. 1 točka**