Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

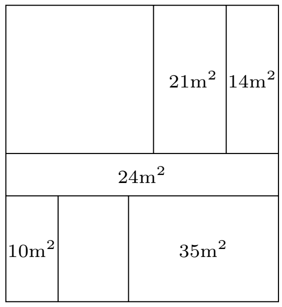
A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Največ koliko izmed vsot $x+y, x+z, x+w, y+z, y+w$ in $z+w$ je lahko lihih, če so x, y, z in w naravna števila?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

A2. Marko je velik pravokotnik razdelil na 7 manjših pravokotnikov, katerih dolžine stranic v metrih so naravna števila. Na 5 od teh pravokotnikov je zapisal njihovo ploščino (glej sliko). Najmanj koliko kvadratnih metrov je skupna ploščina preostavih 2 pravokotnikov?



(**A**) 36 (**B**) 54 (**C**) 64 (**D**) 76 (**E**) 81

A3. Katero je največje naravno število n, za katero velja, da je pri deljenju števila n z 20 ostanek enak količniku?

(**A**) 21 (**B**) 92 (**C**) 231 (**D**) 399 (**E**) 440

B1. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere velja

$$v = ab - 2a - 4b,$$

kjer je v najmanjši skupni večkratnik števil a in b.

B2. V kvadratu $ABCD$ so včrtane krožnica $\mathcal{K}$, polkrožnica $\mathcal{P}$ in četrtina krožnice $\mathcal{Q}$. Četrtina krožnice $\mathcal{Q}$ ima središče v oglišču A in vsebuje točki B in D. Polkrožnica $\mathcal{P}$ ima središče v razpolovišču stranice AD in vsebuje točki A in D. Krožnica $\mathcal{K}$ se dotika polkrožnice $\mathcal{P}$ v točki E, četrtine krožnice $\mathcal{Q}$ v točki F in stranice AB kvadrata $ABCD$ v točki G.

(a) Izrazi polmer krožnice $\mathcal{K}$ z dolžino stranice kvadrata $ABCD$.

(b) Dokaži, da je premica EF vzporedna stranici AB.

B3. Dana je tabela velikosti $1 \times n$, kjer je $n > 10$ naravno število. Polja tabele so po vrsti od leve proti desni oštevilčena z naravnimi števili od 1 do n. Polje številka 10 je črno in na njem je postavljen žeton, vsa ostala polja tabele so bela. Dva igralca izmenjaje igrata naslednjo igro. Igralec, ki je prvi na potezi, premakne žeton na poljubno belo polje tabele in to polje pobarva črno. V vsaki naslednji potezi igralec, ki je na potezi, premakne žeton na eno od belih polj tabele, pri čemer pa mora z žetonom preskočiti vsaj eno črno polje tabele. Polje, na katerega postavi žeton, nato pobarva črno. Igralec, ki prvi ne more izvesti poteze, izgubi igro. V odvisnosti od števila n določi, kateri igralec ima zmagovito strategijo, tisti, ki je prvi na potezi, ali tisti, ki je drugi na potezi.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

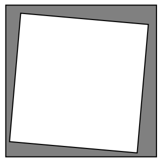
A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Vsota dveh naravnih števil je enaka trikratniku njune razlike, njun zmnožek pa je enak štirikratniku njune vsote. Koliko je vsota teh dveh naravnih števil?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

A2. Kristina je narisala 2 kvadrata, katerih dolžine stranice v centimetrih so naravna števila, in osenčila del večjega kvadrata, ki leži zunaj manjšega kvadrata (glej sliko). Ploščina osenčenega območja je enaka $43\ \mathrm{cm}^2$. Koliko kvadratnih centimetrov je vsota ploščin obeh Kristininih kvadratov?



(**A**) 882 (**B**) 925 (**C**) 968 (**D**) 1685 (**E**) 2022

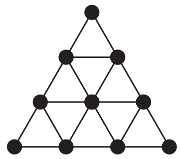
A3. Drugi največji delitelj nekega naravnega števila n je 2022. Kateri je tretji največji delitelj tega naravnega števila n?

(**A**) 337 (**B**) 674 (**C**) 1011 (**D**) 1348 (**E**) 2021

B1. Poišči vse pare naravnih števil k in n, za katere ima ulomek $\frac{4^{k-1}}{n}$ v decimalnem zapisu obliko $0,\overline{n}$, kjer $\overline{n}$ označuje periodo. Na primer, če je $n = 720$, tedaj je $0,\overline{n} = 0{,}720720720\ldots$

B2. Trapez $ABCD$ je včrtan krožnici $\mathcal{K}$. Nosilki stranic AD in BC se sekata v točki M, tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah B in D pa se sekata v točki N. Dokaži, da sta daljici MN in AB vzporedni.

B3. V ravnini je narisanih 10 točk, ki tvorijo pravilno trikotno mrežo (glej sliko).



(a) Koliko je vseh enakostraničnih trikotnikov, katerih oglišča ležijo v točkah te mreže?

(b) Najmanj koliko točk moramo izbrisati, da ne bo obstajal noben enakostranični trikotnik, katerega oglišča so v preostalih točkah?

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

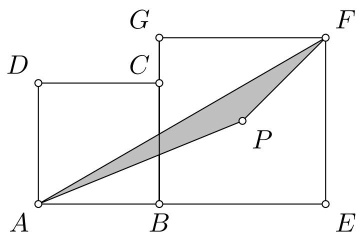
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Diagonali kvadratov $ABCD$ in $BEFG$ sta zaporedoma dolgi 8 cm in 11 cm. Točka P je presečišče diagonal kvadrata $BEFG$ (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina trikotnika APF?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

A2. Naj bosta p in q različni praštevili. Za koliko različnih vrednosti a sta obe rešitvi kvadratne enačbe $x^2 + ax + pq = 0$ celoštevilski?

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

A3. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero velja

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 2, \\ f(4-x); & 0 \leq x < 2, \\ f(x+2); & x < 0. \end{cases}$$

Koliko je $f(-5)$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 1 (**D**) 3 (**E**) 5

B1. Naj bo p praštevilo in $n \leq p^p$ naravno število. Dokaži, da vsaj eno od števil $n + p^p$ in $n \cdot p^p$ ni popoln kvadrat.

B2. Na krožnici $\mathcal{K}$ ležita točki A in B, tako da je dolžina loka $\widehat{AB}$ enaka $\frac{1}{3}$ obsega krožnice $\mathcal{K}$. Točka C leži na loku $\widehat{AB}$, točka D pa na tetivi AB. Izračunaj ploščino trikotnika ACB, če velja $|AD| = 2$, $|BD| = 1$ in $|CD| = \sqrt{2}$.

B3. Dana je tabela velikosti 1×2022. Polja tabele so po vrsti od leve proti desni oštevilčena s števili od 1 do 2022. Na polju 1 je črn žeton, na polju 2 pa bel žeton. Dva igralca, *črni* in *beli*, izmenjaje igrata naslednjo igro. Črni premika le črni žeton, beli pa le beli žeton. Igralec, ki je na potezi, prestavi svoj žeton na prazno polje tabele, tako da ga premakne v smeri proti nasprotnikovemu žetonu. Pri tem lahko nasprotnikov žeton preskoči ali pa tudi ne. Če igralec na potezi ne more izvesti poteze, se igra konča. Prvi na potezi je črni igralec. Določi največje naravno število k, pri katerem lahko črni igralec prisili belega, da prej ali slej prestavi beli žeton na eno od polj s številom večjim ali enakim k.

dMFA

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

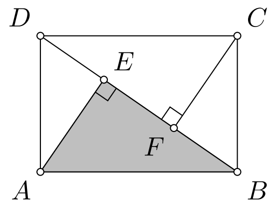
A1. Naravno definicijsko območje funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + (a+1)x + b}$ je enako $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Koliko je vrednost izraza $5a - 3b$?

(A) 3 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 27

A2. Koeficienti polinoma p stopnje 3 so enomestna naravna števila in hkrati velja $p(\sqrt{10}) = 12 + 34\sqrt{10}$. Koliko je $p(10)$?

(A) 46 **(B)** 352 **(C)** 2022 **(D)** 3142 **(E)** 3494

A3. Na diagonali BD pravokotnika $ABCD$ ležita točki E in F, tako da sta premici AE in CF pravokotni na diagonalo BD (glej sliko). Ploščina trikotnika ABE je enaka $\frac{1}{3}$ ploščine pravokotnika $ABCD$. Koliko je razmerje $|AD| : |AB|$?



(A) $2 : \sqrt{5}$ **(B)** $1 : \sqrt{2}$ **(C)** $2 : 3$ **(D)** $1 : \sqrt{3}$ **(E)** $1 : 2$

B1. Dano je zaporedje a_n, ki ustreza rekurzivni zvezi $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ za vsa naravna števila n. Določi vse možne vrednosti prvega člena a_1, pri katerih bo zaporedje a_n vsebovalo člen z vrednostjo 2022.

B2. V mošnji je 5 rdečih in 5 zelenih kovancev. Vsak kovanec ima na eni strani zapisano število 0, na drugi strani pa število 1. Vsi kovanci so pošteni, torej je verjetnosti, da na kovancu pade število 0, enaka verjetnosti, da pade število 1. Iz mošnje naključno izberemo 6 kovancev in jih vržemo. Kolikšna je verjetnost, da je vsota števil, ki padejo na rdečih kovancih, enaka vsoti števil, ki padejo na zelenih kovancih?

B3. Poišči vse polinome p s celoštevilskimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, za katere je $p(u)$ iracionalno število za vsako iracionalno število u.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

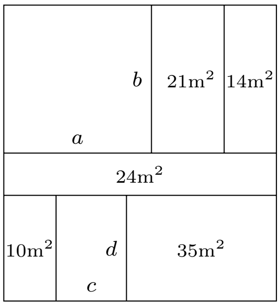
Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
C	C	D

A1. Opazimo, da so dane vsote ravno vse možne vsote po 2 izmed števil x, y, z in w. Če nobeno od števil x, y, z in w ni liho, tudi nobena vsota ni liha. Če je liho natanko 1 izmed števil, so lihe natanko 3 vsote, če sta lihi 2 števili, so lihe 4 vsote, če so liha 3 števila, so lihe 3 vsote, če pa so liha vsa 4 števila, ni nobena vsota liha. Torej so lihe največ 4 vsote.

A2.



Označimo dolžine stranic v metrih preostalih 2 manjših pravokotnikov z a, b, c in d, kot je prikazano na sliki. Opazimo, da je širina velikega pravokotnika največ 24 m. Ker je $21+14 > 24$, mora biti $b > 1$, hkrati pa mora b deliti 21 in 14, saj so stranice pravokotnikov v metrih naravna števila. Ker je največji skupni delitelj števil 21 in 14 enak 7, mora biti $b = 7$. Podobno sklepamo, da je $d > 1$ in d deli 10 in 35, zato je $d = 5$. Širina velikega pravokotnika v metrih je torej enaka $a + \frac{21}{b} + \frac{14}{b} = a + 5$ in hkrati $\frac{10}{d} + c + \frac{35}{d} = c + 9 > 9$. Skupna ploščina preostalih 2 pravokotnikov bo najmanjša takrat, ko bosta a in c najmanjša možna, torej ko bo širina velikega pravokotnika najmanjša možna. Ker pa je ta širina v metrih večja od 9 in mora deliti 24, je enaka najmanj 12. Tedaj je $a = 7$ in $c = 3$, skupna ploščina preostalih 2 pravokotnikov pa je $ab + cd = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 64$ m^2.

A3. Naj bo k ostanek in količnih pri deljenju števila n z 20. Tedaj je $k \leq 19$ in $n = k \cdot 20 + k = 21k$. Torej je $n \leq 21 \cdot 19 = 399$. Preizkus $399 = 19 \cdot 20 + 19$ pokaže, da število $n = 399$ ustraza pogoju.

B1. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b in naj bosta m in n taki naravni števili, da je $a = dm$ in $b = dn$. Tedaj sta števili m in n tuji in velja $v = dmn$. Z upoštevanjem teh zvez iz dane enačbe sledi $dmn = d^2mn - 2dm - 4dn$, od koder po krajšanju z d dobimo

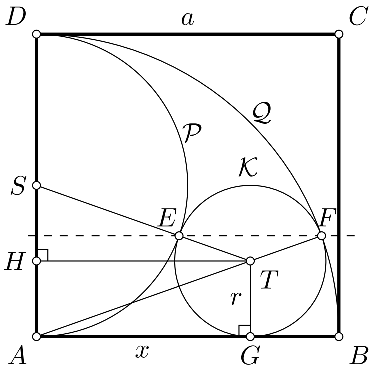
$$mn = dmn - 2m - 4n.$$

Leva stran enačbe je deljiva z m, zato mora biti tudi desna, kar pomeni, da m deli $4n$. Števili m in n sta tuji, zato m deli 4, torej je $m \in \{1, 2, 4\}$. Podobno sklepamo, da n deli $2m$ in zato n deli 2, torej je $n \in \{1, 2\}$. Ker sta števili m in n tuji, ne moreta biti hkrati sodi, zato imamo za pare (m, n) naslednje štiri možnosti: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 1)$. Iz zgornje enačbe izrazimo $d = \frac{mn+4n+2m}{mn} = 1 + \frac{4}{m} + \frac{2}{n}$ in za vse štiri možnosti po vrsti izračunamo $d = 7, 6, 5, 4$. Z upoštevanjem enakosti $a = dm$ in $b = dn$, dobimo štiri rešitve za pare (a, b), to so $(7, 7)$, $(6, 12)$, $(10, 5)$ in $(16, 4)$.

Zapis $ab = vd$ in $a = md$, $b = nd$, kjer sta si m, n tuji .... 2 točki.
Upoštevanje deljivosti z m, n in ugotovitev možnih vrednosti m, n .... 2 točki.

Zapis dovoljenih parov (m, n) glede na to, da sta si m in n tuji .... 1 točka.
Izračun vrednosti d za vsak par (m, n) .... 1 točka.
Izračun vseh štirih parov (a, b) .... 1 točka.

B2.



(a) Označimo dolžino stranice kvadrata $ABCD$ z a, polmer krožnice $\mathcal{K}$ pa z r. Naj bo S središče polkrožnice $\mathcal{P}$, T središče krožnice $\mathcal{K}$ in H pravokotna projekcija točke T na stranico AD. Dolžino daljice AG označimo z x. Ker je $|AT| = |AF| - |FT| = a - r$, po Pitagorovem izreku za trikotnik AGT velja $x^2 + r^2 = (a - r)^2$, kar lahko poenostavimo do $x^2 = a^2 - 2ar$. Ker je $AGTH$ pravokotnik, je $|HT| = x$ in $|SH| = |SA| - |AH| = \frac{a}{2} - r$. Hkrati je $|ST| = |SE| + |ET| = \frac{a}{2} + r$, zato po Pitagorovem izreku za trikotnik THS velja $x^2 + (\frac{a}{2} - r)^2 = (\frac{a}{2} + r)^2$, kar lahko poenostavimo do $x^2 = 2ar$. Iz obeh enakosti sledi $a^2 - 2ar = 2ar$ oziroma $r = \frac{a}{4}$.

(b) Iz rezultata pri točki (a) sledi $|AH| = \frac{a}{4}$ in zato tudi $|HS| = |SA| - |AH| = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$, torej je trikotnik ATS enakokrak z vrhom pri T. Hkrati je tudi trikotnik FTE je enakokrak z vrhom pri T. Od tod izpeljemo

$$\angle EFT = \frac{\pi - \angle FTE}{2} = \frac{\angle ETA}{2} = \angle HTA = \angle GAT,$$

torej je premica EF vzporedna stranici AB.

Ugotovitev ene od kolinearnosti A, T, F in S, E, T .... 1 točka.
Dobljena ena od enačb $x^2 + r^2 = (a - r)^2$ in $x^2 + (\frac{a}{2} - r)^2 = (\frac{a}{2} + r)^2$ .... 1 točka.
Zapis preostale enačbe in preostale kolinearnosti .... 1 točka.
Izpeljava $r = \frac{a}{4}$ .... 1 točka.
Utemeljitev, da je trikotnik ATS enakokrak .... 1 točka.
Dokaz vzporednosti AB in EF .... 2 točki.

B3. Pokažimo, da ima v primeru $n = 19$ zmagovito strategijo drugi igralec, za vse ostale n pa prvi igralec.

Naj bo $n = 19$. Tedaj je na vsaki strani polja 10 natanko 9 polj tabele. Če prvi igralec v prvi potezi prestavi žeton na polje manjše od 10, tedaj lahko drugi igralec odigra strategijo $11, 12, 13, \ldots, 19$, pri kateri prvega igralca prisili, da vedno premakne žeton na polje manjše od 10, sam pa premakne žeton na polje večje od 10. Prepričajmo se, da res lahko tako odigra. Ko je na vrsti prvi igralec in je žeton na polju $k > 10$, so vsa polja med 10 in k črna, vsa polja večja od k pa bela. Prvi igralec mora zato žeton premakniti v levo in pri tem preskočiti polje 10. Ko je na vrsti drugi igralec, lahko izvede svojo potezo, saj preskoči črno polje 10. Ker ima prvi igralec pri tem na voljo največ 9 potez, drugi pa natanko 9 potez, bo prvemu igralcu prej zmanjkalo ustreznih belih polj kot drugemu in bo zato izgubil. Podobno sklepamo, da če prvi igralec v prvi potezi prestavi žeton na polje večje od 10, tedaj lahko drugi igralec odigra zmagovito strategijo $9, 8, 7, \ldots, 1$.

Naj bo $n \neq 19$. Tedaj je na eni strani polja 10 več polj tabele kot na drugi strani. Če je več polj na levi strani polja 10, lahko prvi igralec odigra zmagovito strategijo $9, 8, 7, \ldots$, saj bo tedaj podobno kot zgoraj drugemu igralcu prej zmanjkalo ustreznih belih polj. Če pa je več polj na desni strani polja 10, lahko prvi igralec odigra zmagovito strategijo $11, 12, 13, \ldots$

Zmagovalna strategija za $n < 19$ .... 1 točka.
Zmagovalna strategija za $n > 19$ .... 1 točka.
Utemljitev zmagovalne strategije za $n \neq 19$ .... 1 točka.
Opazka, da je v primeru $n = 19$ na vsaki strani polja 10 enako število polj .... 1 točka.
Zmagovalna strategija za $n = 19$ .... 1 točka.
Utemljitev zmagovalne strategije za $n = 19$ .... 1 točka.
Odgovor .... 1 točka.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
E	B	D

A1. Označimo ti dve naravni števili z m in n. Tedaj je $m+n=3(m-n)$ in $mn=4(m+n)$. Iz prve enakosti dobimo $4n=2m$ oziroma $m=2n$. Ko slednje vstavimo v drugo enakost, dobimo $2n^2=12n$, od koder sledi $n=6$. Torej je $m=12$ in $m+n=18$.

A2. Označimo dolžino stranice večjega kvadrata v centimetrih z a, manjšega pa z b. Tedaj je $43=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Ker pa sta $a+b$ in $a-b$ naravni števili in je 43 praštevilo, sledi $a+b=43$ in $a-b=1$. Torej je $a=22$ in $b=21$. Vsota ploščin obeh Kristininih kvadratov je enaka $a^2+b^2=484+441=925$ cm^2.

A3. Drugi največji delitelj naravnega števila n je enak $\frac{n}{p}$, kjer je p najmanjše praštevilo, ki deli n. Torej je $n=2022p=2\cdot 3\cdot 337\cdot p$. Od tod sledi, da je n deljiv z 2, torej je $p=2$. Tretji največji delitelj števila n je zato enak $2\cdot 337\cdot 2=1348$.

B1. Iz navodil naloge sledi $\frac{4^{k-1}}{n}=0{,}\overline{n}$. Označimo z m število števk števila n. Če enačbo pomnožimo z 10^m, dobimo $\frac{4^{k-1}\cdot 10^m}{n}=n{,}\overline{n}$. Prvo enačbo odštejemo od druge, da dobimo $\frac{4^{k-1}\cdot 10^m}{n}-\frac{4^{k-1}}{n}=n$, kar lahko poenostavimo do

$$4^{k-1}\cdot(10^m-1)=n^2.$$

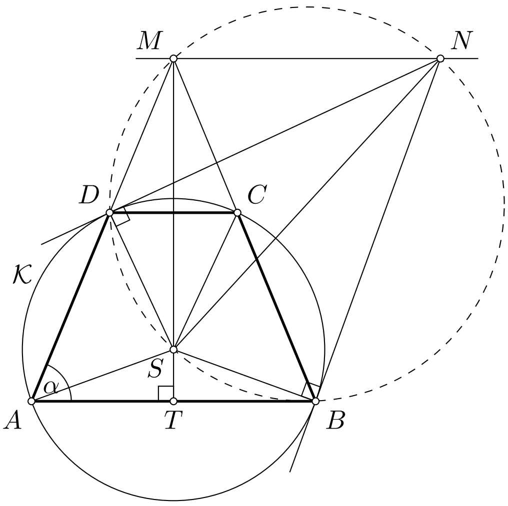
Ker je $10^m-1=\underbrace{99\ldots 99}_{m}=9\cdot\underbrace{11\ldots 11}_{m}$, sledi

$$4^{k-1}\cdot 9\cdot\underbrace{11\ldots 11}_{m}=n^2.$$

Desna stran enačbe je popoln kvadrat, hkrati pa je tudi število $4^{k-1}\cdot 9=(2^{k-1}\cdot 3)^2$ popoln kvadrat. Od tod sklepamo, da mora biti tudi število $\underbrace{11\ldots 11}_{m}$ popoln kvadrat. Če je $m\geq 2$ je ostanek števila $\underbrace{11\ldots 11}_{m}$ pri deljenju s 4 enak ostanku števila 11 pri deljenju s 4, torej 3. Toda popoln kvadrat ima pri deljenju s 4 lahko ostanek le 0 ali 1. Od tod sledi, da mora biti $m=1$, torej je n cifra. Dobimo enačbo $4^{k-1}\cdot 9=n^2$. Ker pa je n cifra, je $n^2\leq 81$, zato mora biti $4^{k-1}\leq 9$ oziroma $k\leq 2$. Rešitvi sta torej $k=1$ in $n=3$ ter $k=2$ in $n=6$. V prvem primeru imamo $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$, v drugem primeru pa $\frac{4}{6}=0{,}\overline{6}$.

Uvedba števila števk števila n .... 1 točka.
Zapis primerne diofantske enačbe, ki ne vsebuje periode .... 1 točka.
Ugotovitev, da mora biti število $11\ldots 11$ popoln kvadrat .... 1 točka.
Dokaz, da število $11\ldots 11$ ni popoln kvadrat, če ima več kot eno števko .... 3 točke.
Zaključna obravnava preostalih primerov .... 1 točka.

B2.



Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$ in T presečišče premice MS s stranico AB. Ker je trapez $ABCD$ tetiven, je enakokrak s krakoma AD in BC. Označimo $\alpha = \angle BAD = \angle CBA$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AB| > |CD|$. Trikotnik BMA je enakokrak z vrhom pri M, premica MS pa je zaradi simetrije njegova višina, torej je pravokotna na stranico AB. Kot $\angle BSD$ je središčni kot nad lokom $\widehat{BD}$ krožnice $\mathcal{K}$, kot $\angle BAD = \alpha$ pa obodni kot nad istim lokom, zato je $\angle BSD = 2\alpha$. Ker sta trikotnika SND in SNB skladna, sledi $\angle NSD = \angle BSN = \alpha$. Torej sta trikotnika ATM in SDN podobna, saj je ujemata v dveh kotih (pravem kotu in kotu α), zato je $\angle AMT = \angle SND$. Po izreku o obodnem kotu sledi, da so točke D, S, N in M konciklične, torej je $\angle SMN = \angle SDN = \frac{\pi}{2}$. S tem smo dokazali, da je premica MS pravokotna na daljici MN in AB, zato sta ti dve daljici vzporedni.

2. način. Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$ in T presečišče premice MS s stranico AB. Podobno kot v prvi rešitvi sklepamo, da je trapez $ABCD$ enakokrak in označimo $\alpha = \angle BAD = \angle CBA$. Zaradi simetrije lahko zopet predpostavimo, da je $|AB| > |CD|$ oziroma $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Tedaj je $\angle DMB = \angle AMB = \pi - \angle MBA - \angle BAM = \pi - 2\alpha$. Kot $\angle BSD$ je središčni kot nad lokom $\widehat{BD}$ krožnice $\mathcal{K}$, kot $\angle BAD = \alpha$ pa obodni kot nad istim lokom, zato je $\angle BSD = 2\alpha$. Štirikotnik $SBND$ je po Talesovem izreku tetiven, zato je $\angle DNB = \pi - \angle BSD = \pi - 2\alpha$. S tem smo pokazali, da je $\angle DNB = \angle DMB$, torej je tudi štirikotnik $DBNM$ tetiven. Od tod sledi

$$\angle AMN = \angle DMN = \pi - \angle NBD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle DBS\right) = \frac{\pi}{2} + \angle DBS = \frac{\pi}{2} + \angle DMS.$$

Zaradi simetrije je premica MS oziroma MT višina enakokrakega trikotnika BMA, zato je $\angle MTA = \frac{\pi}{2}$ in $\angle DMS = \angle DMT = \frac{\pi}{2} - \angle TAM = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Iz zgornje enakosti zato sledi

$$\angle AMN = \frac{\pi}{2} + \angle DMS = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \alpha = \angle ADC,$$

torej sta daljici MN in AB vzporedni.

1. način:

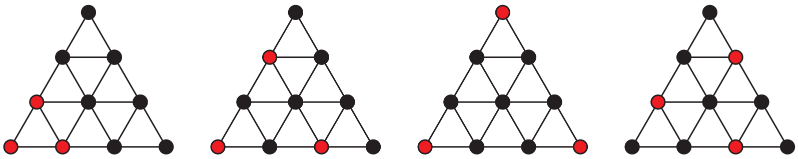
Opažanje, da je trapez $ABCD$ oziroma trikotnik ABM enakokrak .... 1 točka.
Opažanje, da je MS višina trikotnika ABM .... 1 točka.
Dokaz, da velja $\angle BSD = 2\angle BAD$ .... 1 točka.
Dokaz, da sta kota $\angle DSB$ in $\angle NSB$ enako velika oziroma da sta trikotnika ATM in SDM podobna .... 2 točki.
Uporaba tetivnosti in zaključek .... 2 točki.

2. način:

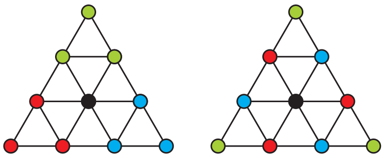
Opažanje, da je trapez $ABCD$ oziroma trikotnik ABM enakokrak .... 1 točka.

Dokaz, da velja $\angle DMB = \pi/2 - 2\alpha$ .... 1 točka.
Dokaz, da velja $\angle BSD = 2\angle BAD$ .... 1 točka.
Dokaz, da velja $\angle BND = \pi - \angle BSD = \pi - 2\alpha$ oziroma $\angle BND = \angle DMB$ .... 1 točka.
Opažanje, da je MS oziroma MT višina trikotnika AMB .... 1 točka.
Dokaz, da velja $\angle DMS = \angle DMT = \pi/2 - \alpha$ .... 1 točka.
Dokaz, da velja $\angle AMN = \angle ADC$ .... 1 točka.

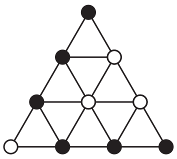
B3. (a) Takih trikotnikov je natanko 15, od tega je 9 majhnih, 3 so srednje veliki, 1 je velik, 2 pa sta poševna. Slike prikazujejo po en primer trikotnika vsakega od naštetih štirih tipov.



(b) Zagotovo je potrebno izbrisati vsaj 3 točke, sicer bi vsaj 1 od obarvanih enakostraničnih trikotnikov na spodnjih slikah imel vsa oglišča v neizbrisanih točkah.



Če bi zadoščalo izbrisati 3 točke, tedaj srednja točka mreže ne bi bila izbrisana, vsaj 1 izbrisana točka pa bi morala biti oglišče velikega trikotnika. Torej bi bili izmed 6 točk, ki so sosednje srednji točki mreže, izbrisani največ 2 točki, med preostalimi 4 neizbrisanimi pa bi obstajali 2, ki sta sosednji. Ti 2 sosednji točki bi s sredinsko točko mreže tvorili mali enakostranični trikotnik z oglišči v neizbrisanih točkah. Torej je potrebno izbrisati vsaj 4 točke. Kot kaže spodnja slika, zadošča izbrisati 4 točke.



Pravilno preštetih 13 malih, srednjih in velikih enakostraničnih trikotnikov .... 1 točka.
Pravilno prešteta 2 poševna enakostranična trikotnika .... 1 točka.

Če tekmovalec le navede številko 13 oziroma 15 brez razlage ali izračuna, potem ne prejme točk.

Najdeni 3 trikotniki, ki si ne delijo oglišč in utemeljitev, da moramo odstraniti vsaj eno oglišče iz vsakega izmed njih .... 1 točka.
Dokončana utemljitev .... 2 točki.
Pravilna konstrukcija s 4 odstranjenimi točkami .... 2 točki.

Če tekmovalec navede pravilno konstrukcijo, vendar v a) delu ne najde vseh 15 trikotnikov, potem prejme za konstrukcijo le 1 točko.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
D	A	D

A1. Stranici kvadratov sta dolgi $|AB| = \frac{8}{\sqrt{2}}$ cm in $|BE| = \frac{11}{\sqrt{2}}$ cm. Ker je točka P razpolovišče diagonale BF, je ploščina trikotnika APF enaka ploščini trikotnika ABP, ta pa je enaka

$$\frac{|AB| \cdot \frac{|BG|}{2}}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{11}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{88}{8} = 11 \text{ cm}^2.$$

A2. Ker je koeficient pri x^2 enak 1, je po Vietovih pravilih produkt x_1x_2 obeh rešitev enačbe enak pq. Ker morata biti obe rešitvi celoštevilski in sta p in q praštevili, imamo za množico rešitev $\{x_1, x_2\}$ le možnosti $\{1, pq\}$, $\{-1, -pq\}$, $\{p, q\}$ ali $\{-p, -q\}$. Po Vietovih pravilih je koeficient a enak $-(x_1+x_2)$, zato ima lahko 4 različne vrednosti, to so $1+pq$, $-1-pq$, $p+q$ in $-p-q$. Vse 4 vrednosti so med sabo različne.

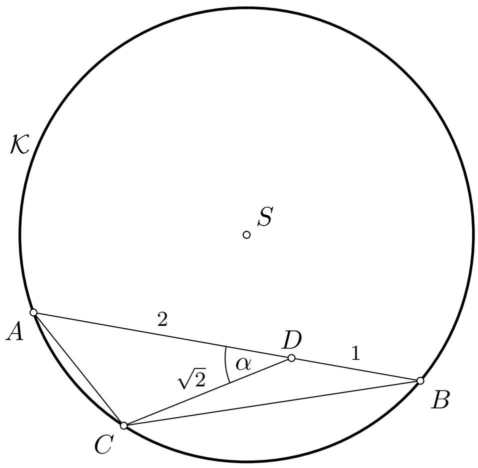
A3. Z upoštevanjem lastnosti funkcije f izračunamo

$$f(-5) = f(-5+2) = f(-3) = f(-3+2) = f(-1) = f(-1+2) = f(1) = f(4-1) = f(3) = 3.$$

B1. Denimo, da sta obe števili popolna kvadrata, torej $n + p^p = a^2$ in $n \cdot p^p = b^2$, kjer sta a in b naravni števili. Če je $p = 2$, tedaj je $n \leq 2^2 = 4$. Toda nobeno od števil $1 + 2^2$, $2 + 2^2$, $3 + 2^2$ in $4 + 2^2$ ni popoln kvadrat. Torej mora biti p liho praštevilo. Pišimo $p = 2k + 1$, kjer je k naravno število. Sledi $n \cdot p^{2k+1} = b^2$. Torej mora biti b^2 deljiv s p^{2k+1} in zato je b deljiv s p^{k+1}. Pišimo $b = p^{k+1}d$, kjer je d naravno število. Tedaj je $n \cdot p^{2k+1} = p^{2k+2}d^2$ oziroma $n = pd^2$. Ker je $n \leq p^p = p^{2k+1}$, sledi $d \leq p^k$. Pišimo $d = p^m u$ in $a = p^r v$, kjer sta m in r nenegativni celi števili, u in v pa naravni števili tuji p. Tedaj je $m \leq k$ in $n = pd^2 = p^{2m+1}u^2$, zato iz enačbe $n+p^p = a^2$ sledi $p^{2m+1}u^2 + p^{2k+1} = p^{2r}v^2$ oziroma $p^{2m+1}(u^2 + p^{2k-2m}) = p^{2r}v^2$. Če je $m < k$, tedaj p deli p^{2k-2m}, a ne deli u^2, zato je največja potenca praštevila p, ki deli levo stran enakosti, p^{2m+1}, največja potenca praštevila p, ki deli desno stran, pa p^{2r}. Prišli smo do protislovja, saj je prva potenca liha, druga pa soda. Torej ostane le možnost $k = m$. Toda v tem primeru je $n = p^{2k+1}u^2 = p^p u^2$, zato iz $n \leq p^p$ sledi $u^2 = 1$ in $n = p^p$. V tem primeru pa število $n + p^p = 2p^p$ ni popoln kvadrat, saj $p \neq 2$. Prišli smo do protislovja, od koder sklepamo, da vsaj eno od števil $n + p^p$ in $n \cdot p^p$ ni popoln kvadrat.

Obravnava $p = 2$ .... 1 točka.
Obravnava $n = p^p$ .... 1 točka.
Zapis $n = a^2 \cdot p^j$ za $j < p$ lih in utemeljitev .... 2 točki.
Sklep, da p ne deli $a^2 + p^{p-j}$ .... 2 točki.
Sklep, da $n + p^p = p^j(a^2 + p^{p-j})$ ni popoln kvadrat .... 1 točka.

B2.



Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$. Ker je dolžina loka $\widehat{AB}$ enaka $\frac{1}{3}$ obsega krožnice $\mathcal{K}$, je $\angle ASB = \frac{2\pi}{3}$ oziroma $\angle BSA = \frac{4\pi}{3}$. Po izreku o obodnem in središčnem kotu, je $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BSA = \frac{2\pi}{3}$. Označimo $|BC| = a$ in $|AC| = b$ ter $\angle ADC = \alpha$. Po kosinusnih izrekih za trikotnike ACB, ACD in CBD velja

$$\begin{aligned} 9 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\tfrac{2\pi}{3}, \\ b^2 &= 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}\cos\alpha, \\ a^2 &= 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\cos(\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Z upoštevanjem lastnosti $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ in $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ enačbe poenostavimo do

$$\begin{aligned} 9 &= a^2 + b^2 + ab, \\ b^2 &= 6 - 4\sqrt{2}\cos\alpha, \\ a^2 &= 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Če drugi enačbi prištejemo dvakratnik tretje enačbe, dobimo $2a^2 + b^2 = 12$, iz prve enačbe pa izrazimo $a^2 + b^2 = 9 - ab$. Sedaj pokombiniramo ti dve enačbi. Če od prve odštejemo drugo, dobimo $a^2 = 3+ab$, če pa od dvakratnika druge odštejemo prvo, dobimo $b^2 = 6-2ab = 2(3-ab)$. Izpeljani enačbi nazadnje še zmnožimo, da dobimo

$$a^2b^2 = 2(3 - ab)(3 + ab) = 2(9 - a^2b^2) = 18 - 2a^2b^2.$$

Od tod izrazimo $a^2b^2 = 6$ oziroma $ab = \sqrt{6}$. Ploščina trikotnika ACB je zato enaka

$$p = \frac{1}{2}ab\sin\tfrac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

2. način. Ker je $|SA| = |SB|$ in $\angle ASB = \frac{2\pi}{3}$, je trikotnik ABS sestavljen iz dveh polovic enakostraničnega trikotnika. Ker je $|AB| = 3$, sledi $|SA| = |SB| = \sqrt{3}$.

S pomočjo kosinusnega izreka v trikotniku DBS zdaj izračunamo

$$|DS| = \sqrt{|BD|^2 + |BS|^2 - 2|BD| \cdot |BS| \cdot \cos\angle SBD} = \sqrt{1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,$$

od koder sledi še $\angle BDS = \frac{2\pi}{3}$, saj smo ravnokar dokazali, da je trikotnik BDS enakokrak z vrhom D.

Zdaj pa opazimo, da je $|SD|^2 + |CD|^2 = 1 + 2 = 3 = |SC|^2$, kar pomeni, da je CDS pravokotni trikotnik s pravim kotom ob oglišču D. Sledi, da je $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$, od koder s pomočjo kosinusnega izreka izračunamo

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD| \cdot \cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{4 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$$

in

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2 + 2|AD| \cdot |CD| \cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 + 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{6}}.$$

Sledi, da je ploščina trikotnika ABC enaka

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\angle BCA = \frac{1}{2}\sqrt{(6 - 2\sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

1. NAČIN IN NAČINI, PODOBNI PRVEMU.
Izračun $\angle BCA = \frac{\pi}{3}$ ali $|SA| = \sqrt{3}$ .... 1 točka.
Pravilen zapis enega kosinusnega izreka .... 1 točka.
Zapis sistema n enačb z n neznankami (za nek n), ki vsebuje dolžini $|AC|$ in $|BC|$ .... 1 točka.
Prevedba sistema na eno enačbo v eni neznanki .... 2 točki.
Rešitev dobljene enačbe .... 1 točka.
Izračun ploščine s pomočjo dobljene rešitve .... 1 točka.

2. NAČIN.
Izračun $|SA| = \sqrt{3}$ .... 1 točka.
Izračun $|SD| = 1$ .... 2 točki.
Dokaz, da je $\angle SDC$ pravi kot .... 2 točki.
Izračun dolžin daljic AC in BC ali dolžine višine trikotnika ABC na stranico AB ..... 1 točka.
Izračun ploščine trikotnika ABC .... 1 točka.

B3. Pokazali bomo, da je $k = 2021$. Če črni igralec vsakič premakne svoj žeton na polje neposredno desno od polja z belim žetonom, mora beli igralec vsakič premakniti svoj žeton v desno in pri tem preskočiti črni žeton. Ker je polj tabele končno mnogo, prej ali slej eden od igralcev ne more izvesti svoje poteze. Če črni igralec ne more izvesti poteze, to pomeni, da je beli žeton na polju 2022. Če beli igralec ne more izvesti poteze, to pomeni, da je črni žeton na polju 2022. Ker pa je na potezi beli, je črni ravnokar odigral svojo potezo, torej je beli žeton na polju 2021. V obeh primerih je bil beli igralec prisiljen postaviti svoj žeton na polje s številom večjim ali enakim 2021.

Pokazati moramo še, da lahko beli igralec igra tako, da žetona nikoli ne postavi na polje 2022. Beli igralec lahko izbere naslednjo strategijo. Če mora svoj žeton prestaviti v levo, ga prestavi na polje 1, če je to prazno, sicer pa na polje 2. Če pa mora svoj žeton prestaviti v desno, ga prestavi na polje 2021, če je to prazno, sicer pa na polje 2020. Pokazati moramo, da pri upoštevanju te strategije beli igralec nikoli ni prisiljen postaviti žetona na polje 2022, torej se lahko drži strategije. Lahko se sicer zgodi, da črni igralec belega postavi v situacijo, ko ta sploh ne more izvesti nobene dovoljene poteze, ampak tedaj se igra konča in belega igralca to ne moti.

Če bi bil beli igralec v svoji potezi prisiljen postaviti žeton na polje 2022, bi to pomenilo, da mora premakniti žeton v desno in da je polje 2022 prazno. Če bi bilo polje 2021 prazno, bi beli igralec po svoji strategiji premaknil žeton na polje 2021. Ker pa tega ne more, mora biti na polju 2021 žeton. Ta žeton ne more biti bel, saj bi sicer beli igralec premikal žeton v levo.

Torej je na polju 2021 črn žeton. Če bi bilo polje 2020 prazno, bi beli igralec po svoji strategiji žeton premaknil na polje 2020. Ker pa tega ne more, mora biti na polju 2020 beli žeton. Toda črni igralec je ravnokar izvedel svojo potezo, kar pomeni, da v prejšnji potezi belega igralca, črni žeton ni bil na polju 2021. Zato beli igralec ob upoštevanju svoje strategije belega žetona zagotovo ne bi prestavil na polje 2020, saj bi to storil le v primeru, ko bi premikal v desno in bi bilo polje 2021 zasedeno s črnim žetonom, kar smo pa ravnokar ovrgli. Do take situacije bi lahko torej prišlo le, če se beli igralec ne bi držal svoje strategije.

Poiskana strategija za črnega igralca .... 2 točki.
Zaključek $k \geq 2021$ .... 1 točka.
Poiskana strategija za belega igralca .... 2 točki.
Dokaz, da se lahko beli igralec vedno drži strategije in zapisan rezultat $k = 2021$ ...... 2 točki.

66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
A	D	B

A1. Iz pogoja naloge sledi, da mora veljati $x^2 + (a+1)x + b = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Torej je $a + 1 = 4$ oziroma $a = 3$ in $b = 4$. Sledi $5a - 3b = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 3$.

A2. Pišimo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, kjer so a, b, c in d enomestna naravna števila. Tedaj je

$$p(\sqrt{10}) = a \cdot 10\sqrt{10} + b \cdot 10 + c \cdot \sqrt{10} + d = (10b + d) + (10a + c)\sqrt{10}.$$

Ker pa so a, b, c in d enomestna naravna števila, torej števke, je

$$p(\sqrt{10}) = \overline{bd} + \overline{ac}\sqrt{10} = 12 + 34\sqrt{10}.$$

Sledi $b = 1$, $d = 2$, $a = 3$ in $c = 4$. Torej je $p(x) = 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ in zato je $p(10) = 3000 + 100 + 40 + 2 = 3142$.

A3. Ker je ploščina trikotnika ABE je enaka $\frac{1}{3}$ ploščine pravokotnika $ABCD$, ploščina trikotnika ABD pa $\frac{1}{2}$ ploščine pravokotnika $ABCD$, je ploščina trikotnika DAE enaka $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ploščine pravokotnika $ABCD$. Razmerje ploščin trikotnikov DAE in ABE je zato enako $p_{DAE} : p_{ABE} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 1 : 2$. Ker pa sta ta dva trikotnika podobna, je razmerje njunih istoležnih stranic enako $|AD| : |AB| = \sqrt{1} : \sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$.

B1. S pomočjo rekurzivne zveze izpeljemo

$$a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} = \frac{1 + \frac{1+a_n}{1-a_n}}{1 - \frac{1+a_n}{1-a_n}} = \frac{(1 - a_n) + (1 + a_n)}{(1 - a_n) - (1 + a_n)} = \frac{2}{-2a_n} = -\frac{1}{a_n},$$

z upoštevanjem te zveze pa še

$$a_{n+4} = -\frac{1}{a_{n+2}} = -\frac{1}{-\frac{1}{a_n}} = a_n.$$

Zaporedje a_n je torej periodično s periodo 4, zato imajo njegovi členi le štiri različne vrednosti, to so a_1, $a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1}$, $a_3 = -\frac{1}{a_1}$ in $a_4 = -\frac{1}{a_2} = \frac{a_1-1}{a_1+1}$. Imamo torej štiri možnosti, lahko je $a_1 = 2022$, lahko je $\frac{1+a_1}{1-a_1} = 2022$, od koder izrazimo $a_1 = \frac{2021}{2023}$, lahko je $-\frac{1}{a_1} = 2022$, od koder dobimo $a_1 = -\frac{1}{2022}$, ali pa je $\frac{a_1-1}{a_1+1} = 2022$ od koder sledi $a_1 = -\frac{2023}{2021}$. Prepričati se moramo še, da v teh primerih noben člen zaporedja ni enak 1, sicer zaporedje z dano rekurzivno zvezo ne bi bilo dobro definirano. V vseh štirih primerih dobimo zaporedje $\ldots, 2022, -\frac{2023}{2021}, -\frac{1}{2022}, \frac{2021}{2023}, 2022, \ldots$, le da se zaporedje začne pri drugi vrednosti.

2. način. Iz rekurzivne zveze izrazimo $a_n = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}$. Ker mora biti nek člen v zaporedju enak 2022, s pomočjo izpeljane formule poračunamo, da morajo biti njemu predhodnji členi po vrsti enaki $\frac{2021}{2023}, -\frac{1}{2022}, -\frac{2023}{2021}, 2022, \ldots$ Od tod sledi, da je zaporedje periodično in da mora biti člen a_1 enak $\frac{2021}{2023}, -\frac{1}{2022}, -\frac{2023}{2021}$ ali 2022. V tem primeru iz periodičnosti in izračunanih vrednosti avtomatično sledi, da noben člen v zaporedju ni enak 1.

1. način.
Izpeljava zveze med a_n in a_{n+2} .... 2 točki.
Izpeljava zveze med a_n in a_{n+4} .... 2 točki.
Pravilen izračun vsaj dveh možnih a_1 iz $\{-\frac{2023}{2021}, -\frac{1}{2022}, \frac{2021}{2023}\}$ .... 1 točka.
Pravilen izračun vseh štirih možnih a_1 .... 1 točka.
Preveri, da pri vseh začetnih členih dobimo dobro definirano zaporedje .... 1 točka.

Opomba. Trivialna rešitev $a_1 = 2022$ je vredna 0 točk.

2. način.
Izrazi a_n z a_{n+1} .... 1 točka.
Ideja, da začnemo računati nazaj z 2022 .... 1 točka.
Pravilen izračun prejšnjih dveh členov $\frac{2021}{2023}$ in $-\frac{1}{2022}$ .... 1 točka.
Pravilen izračun $-\frac{2023}{2021}$ .... 1 točka.
Ugotovitev, da je zaporedje periodično s periodo 4 .... 2 točki.
Opis vseh 4 možnih prvih členov .... 1 točka.

Opomba. Če tekmovalec ugotovi, da je zaporedje dobro definirano le v primeru, ko noben člen ni enak 0, 1 oziroma -1, dobi 1 točko (tisto za preverjanje dobre definiranosti).

B2. Ker so kovanci pošteni, lahko verjetnost izračunamo po formuli

$$P = \frac{\text{ugodne možnosti}}{\text{vse možnosti}}.$$

Preštejmo najprej vse možnosti. Dobimo jih tako, da iz posode najprej izberemo 6 kovancev na $\binom{10}{6}$ načinov in nato vsak kovanec vržemo na 2 načina. Vseh možnosti je torej $\binom{10}{6} \cdot 2^6 = 13\,440$.

Ugodne možnosti preštejemo tako, da obravnavamo primere koliko rdečih kovancev izvlečemo in na koliko od teh kvancev pade število 1.

5 rdečih kovancev lahko izvlečemo na $\binom{5}{5} = 1$ način, preostali 1 zelen kovanec pa na $\binom{5}{1} = 5$ načinov. Ker je zelen kovanec en sam, lahko na rdečih kovancih pade število 1 bodisi 0-krat ali 1-krat. Prva možnost se lahko zgodi na $\binom{5}{0} = 1$ način, druga pa na $\binom{5}{1} = 5$ načinov. V obeh primerih je zeleni kovanec enolično določen. To je skupaj

$$1 \cdot 5 \cdot (1 + 5) = 30$$

možnosti.

4 rdeče kovance lahko izvlečemo na $\binom{5}{4} = 5$ načinov, preostala 2 zelena kovanec pa na $\binom{5}{2} = 10$ načinov. Tedaj lahko na rdečih kovancih pade število 1 bodisi 0-krat, 1-krat ali 2-krat. Prva možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{0} = 1$ način, saj sta tedaj zelena kovanca enolično določena. Druga možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 8$ načinov, saj mora pasti število 1 na enem od štirih rdečih kovancev in na enem od dveh zelenih kovancev. Zadnja možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{2} = 6$ načinov, saj sta zelena kovanca tedaj enolično določena. Tako dobimo skupaj

$$5 \cdot 10 \cdot (1 + 8 + 6) = 750$$

možnosti.

3 rdeče kovance lahko izvlečemo na $\binom{5}{3} = 10$ načinov, preostalie 3 zelena kovanec pa na $\binom{5}{3} = 10$ načinov. Na 3 rdečih kovancih lahko pade število 1 bodisi 0-krat, 1-krat, 2-krat ali 3-krat, ravno tolikokrat pa mora pasti število 1 tudi na 3 zelenih kovancih. Prva možnost se lahko zgodi na $\binom{3}{0}^2 = 1$ način, druga na $\binom{3}{1}^2 = 9$ načinov, tretja na $\binom{3}{2}^2 = 9$ načinov in zadnja na $\binom{3}{3}^2 = 1$ način. Skupaj je torej

$$10 \cdot 10 \cdot (1 + 9 + 9 + 1) = 2000$$

možnosti.

Zaradi simetrije med rdečimi in zelenimi kovanci je ugodnih možnosti, ko izvlečemo 2 oz. 1 rdeč kovanec, enako kot ugodnih možnosti, ko izvlečemo 2 oz. 1 zelen kovanec, torej toliko kot če izvlečemo 4 oz. 5 rdečih kovancev. Vseh ugodnih možnosti je torej

$$30 + 750 + 2000 + 750 + 30 = 3\,560.$$

Verjetnost, da je vsota števil, ki padejo na rdečih kovancih, enaka vsoti števil, ki padejo na zelenih kovancih, je zato enaka

$$P = \frac{3\,560}{13\,440} = \frac{89}{336}.$$

Upoštevanje formule $P = \frac{\text{ugodne možnosti}}{\text{vse možnosti}}$ .... 1 točka.
Izračun vseh možnih izidov $\binom{10}{6} \cdot 2^6$ .... 1 točka.
Zapis vseh možnih barvnih kombinacij izvlečenih kovancev .... 1 točka.
Pravilen izračun ugodnih možnosti .... 3 točke.
Pravilen končni rezultat .... 1 točka.

B3. Edini konstantni polinom z vodilnim koeficientom 1 je $p(x) = 1$, ki pa očitno ne ustreza pogojem naloge. V nadaljevanju zato predpostavimo, da je p nekonstanten polinom, ki ustreza pogojem naloge. Ker ima p celoštevilske koeficiente, je $p(0)$ celo število, zato pogojem naloge ustreza tudi vsak polinom $p_n(x) = p(x) - p(0) - n$, kjer je n celo število. Ker je vodilni koeficient polinoma p enak 1 in p ni konstanten polinom, gre vrednost $p(x)$ čez vse meje, ko gre x proti neskončno, zato za vsak dovolj velik n premica $y = n + p(0)$ seka graf polinoma p. To pa pomeni, da ima polinom p_n vsaj eno realno ničlo. Po predpostavki p_n slika iracionalna števila v iracionalna števila, zato ničla tega polinoma ne more biti iracionalna, ampak je racionalna.
Oglejmo si zdaj polinome p_q, kjer je q praštevilo. Vemo že, da ima za dovolj velik q ta polinom vsaj eno racionalno ničlo. Ker pa ima p_q celoštevilske koeficiente, vodilni koeficient 1 in konstantni koeficient $-q$, so njegove racionalne ničle lahko le 1, -1, q ali $-q$. Vsako od števil 1 in -1 je lahko ničla kvečjemu enega izmed polinomov p_q, saj se ti med seboj razlikujejo za konstanto. To pomeni, da za vsa dovolj velika praštevila q velja, da je q ali $-q$ ničla polinoma p_q, oziroma da je $p(q) = p(0) + q$ ali $p(-q) = p(0) + q$. Torej bodisi obstaja neskončno praštevil q, za katera je $p(q) = p(0) + q$, ali pa obstaja neskončno praštevil q, za katera je $p(-q) = p(0) + q$. Polinoma se lahko ujemata v neskončno točkah le, kadar sta enaka, torej je bodisi $p(x) = p(0) + x$ ali pa $p(x) = p(0) - x$. Ker je vodilni koeficient polinoma p enak 1, druga možnost odpade.
Edini polinomi, ki lahko ustrezajo pogojem naloge, so torej oblike $p(x) = x + a$, kjer je a celo število. Vsi taki polinomi tudi res ustrezajo pogojem naloge.

2. način. Edini konstantni polinom z vodilnim koeficientom 1 je $p(x) = 1$, ki pa očitno ne ustreza pogojem naloge. Torej je p nekonstanten polinom z vodilnim koeficientom 1. To pomeni, da obstaja tako naravno število k, da polinom p na intervalu $[k, \infty)$ strogo narašča proti neskončno in zato na tem intervalu zavzame vse vrednosti večje ali enake $m = p(k)$. To pomeni, da ima vsaka od enačb

$$\begin{aligned} p(x) &= m, \\ p(x) &= m+1, \\ p(x) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

vsaj eno realno rešitev na intervalu $[k, \infty)$. Označimo te rešitve po vrsti z $a_0, a_1, a_2, \ldots$, pri čemer lahko vzamemo $a_0 = k$. Ker je k naravno število, je m celo število, zato iz pogoja naloge sledi, da so rešitve $a_0, a_1, a_2 \ldots$ racionalna števila. Toda za vsako celo število n ima polinom $p(x) - n$ cele koeficiente in vodilni koeficient enak 1, zato so vse njegove racionalne ničle v resnici celoštevilske, zato so $a_0, a_1, a_2, \ldots$ cela števila. Ker polinom p na intervalu $[k, \infty)$ strogo narašča, je zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ strogo naraščajoče. Ker pa ima polinom p celoštevilske koeficiente, za vsako naravno število n število $a_{n+1} - a_n$ deli $p(a_{n+1}) - p(a_n) = 1$. Od koder sledi $a_{n+1} - a_n = 1$, saj je $a_{n+1} > a_n$. Torej je zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ enako $k, k+1, k+2, \ldots$, kar pomeni, da velja

$$\begin{aligned} p(k) &= m, \\ p(k+1) &= m+1, \\ p(k+2) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Tudi za polinom $r(x) = x + m - k$ velja

$$\begin{aligned} r(k) &= m, \\ r(k+1) &= m+1, \\ r(k+2) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

torej se polinoma p in r ujemata v neskončno mnogo točkah in zato sta enaka. S tem smo pokazali, da je polinom p oblike $p(x) = x + a$ za neko celo število a, vsak tak polinom pa očitno ustreza pogojem naloge.

1. način.
Ugotovitev, da polinom ne more biti konstanten .... 1 točka.
Definicija p_n in ugotovitev, da ima p_n vsaj eno racionalno ničlo za dovolj velik n ...... 1 točka.
Sklep, da iz celoštevilskih koeficientov in vodilnega koeficienta 1 sledi, da so vse ničle celoštevilske 2 točki.
Za $n = q$, kjer je q praštevilo, ugotovitev, da so ničle lahko le $1, -1, q, -q$ (ker morajo deliti prosti člen) .... 1 točka.
Razločitev možnosti $p(q) = p(0) + q$ ali $p(-q) = p(0) + q$ .... 1 točka.
Rešitev $p(x) = x + a$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$ .... 1 točka.

2. način.
Ugotovitev, da polinom ne more biti konstanten .... 1 točka.
Zapis enačb $p(a_l) = m + l$ in ugotovitev, da so $a_0, a_1, a_2, ...$ racionalna števila .... 1 točka.
Sklep, da iz celoštevilskih koeficientov in vodilnega koeficienta 1 sledi, da so $a_0, a_1, a_2, ...$ cela števila .... 2 točki.
Ugotovitev razmerja $a_{n+1} - a_n = 1$ .... 1 točka.
Zapis linearne funkcije, ki se v neskončno točkah ujema s $p(x)$ .... 1 točka.
Rešitev $p(x) = x + a$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$ .... 1 točka.

Točke iz obeh načinov se ne seštevajo. Upošteva se vrednotenje po načinu, kjer tekmovalec dobi največ točk.