**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Maribor, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Za realni števili a in b, kjer je $|a| \neq |b|$ in $a \neq 0$, velja

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

   Določi vrednost izraza $\frac{b}{a}$.

2. Naj bosta m in n taki naravni števili, da $5m+n$ deli $5n+m$. Dokaži, da m deli n.

3. V paralelogramu $ABCD$ velja $|AB| = |BD|$. Naj bo K od A različna točka na premici AB, za katero je $|KD| = |AD|$. Zrcalno sliko točke C pri zrcaljenju preko točke K označimo z M, zrcalno sliko točke B pri zrcaljenju preko točke A pa z N. Dokaži, da je trikotnik MDN enakokrak z vrhom pri D.

4. Na mizi so trije kupčki žetonov: eden z a žetoni, eden z b žetoni in eden s c žetoni, pri čemer velja $a \geq b \geq c > 0$. Igralca A in B izmenično prestavljata žetone. Začne igralec A. V vsaki potezi igralec najprej izbere dva kupčka in nato s tistega z manj žetoni prestavi vsaj en žeton na tistega z več žetoni. Če imata izbrana kupčka enako žetonov, prestavi vsaj en žeton s kateregakoli izmed njiju na drugega. Zmaga tisti igralec, po čigar potezi so vsi žetoni na enem kupčku. Določi, kdo ima zmagovalno strategijo, in sicer v odvisnosti od a, b in c.

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Maribor, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vse trojice realnih števil (x, y, z), ki zadoščajo sistemu enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4z^2 &= 6y - 4, \\ 2xy - 4xz + 4yz &= y^2 + 5. \end{aligned}$$

2. Poišči vse pare praštevil p in q, za katere sta števili $p + q$ in $p + 4q$ popolna kvadrata.

3. Simetrala notranjega kota $\angle ACB$ ostrokotnega trikotnika ABC seka stranico AB v točki D. Očrtana krožnica trikotnika ADC seka stranico BC v različnih točkah C in E. Premica skozi točko B, vzporedna premici AE, seka premico CD v točki F. Dokaži, da je trikotnik AFB enakokrak.

4. Dan je pravilen n-kotnik, kjer je n liho število, večje od 1. Največ koliko oglišč lahko pobarvamo rdeče, tako da središče n-kotnika ne bo ležalo znotraj večkotnika, določenega z rdečimi oglišči?

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Maribor, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, za katere velja

$$p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

2. Poišči najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo v obliki $3a^2 - ab^2 - 2b - 4$, kjer sta a in b naravni števili.

3. Naj bo AB najdaljša stranica trikotnika ABC. Z M in N označimo taki točki na stranici AB, da velja $|AM| = |AC|$ ter $|BN| = |BC|$. Razpolovišči daljic MC in NC naj bosta P in R, trikotniku ABC včrtana krožnica pa naj se stranic BC in AC dotika v točkah D in E. Dokaži, da so točke P, R, D in E koneciklične.

4. V vrsti stoji 8 škatel, oštevilčenih s števili od 1 do 8, in prazna vreča. V vsaki škatli je 1 žeton. Miha, ki ima veliko žetonov, se igra igro, v kateri sta dovoljeni naslednji dve potezi:

   - odstrani 1 žeton iz škatle, oštevilčene z i ($i < 8$), in doda 2 žetona v škatlo, oštevilčeno z $(i + 1)$,
   - odstrani 1 žeton iz škatle, oštevilčene z i ($i < 8$), in premakne 1 žeton iz škatle, oštevilčene z $(i + 1)$, v vrečo.

   Igra se konča, ko ni več možno izvesti nobene poteze. Največ koliko žetonov je lahko na koncu v vreči?

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Maribor, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Naj bosta x_1 in x_2 različni ničli polinoma $p(x) = x^2 + ax + b$, $x_1^2 - \frac{1}{2}$ in $x_2^2 - \frac{1}{2}$ pa naj bosta ničli polinoma $q(x) = x^2 + (a^2 - \frac{1}{2})x + b^2 - \frac{1}{2}$. Določi a in b.

2. Za realno število x označimo z $[x]$ največje celo število, ki ni večje od x.

   (a) Dokaži, da za vsa *naravna* števila a, b in c velja

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right].$$

   (b) S primerom pokaži, da gornja enakost ne velja za vsa pozitivna *realna* števila a, b in c.

3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica očrtana ostrokotnemu trikotniku ABC, pri čemer je $|AB| < |AC|$. Naj bo p zrcalna slika premice BC pri zrcaljenju čez premico AB. Premica p seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah B in E, tangenta na $\mathcal{K}$ v točki A pa seka premico p v točki D. Naj bo F zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko A. Premica CF seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah C in G. Dokaži, da sta premici CE in GB vzporedni.

4. Na tabli je napisano neko naravno število n. Na vsakem koraku lahko število na tabli nadomestimo z vsoto dveh naravnih števil, katerih zmnožek je enak številu na tabli. Določi najmanjše število, ki je lahko po končno korakih zapisano na tabli, in sicer v odvisnosti od začetnega števila n.

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 12. april 2014

Rešitve nalog in točkovnik

I/1. Enačbo pomnožimo z $a(a+b)(a-b)$ in dobimo

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 = a(3a-b).$$

Ko odpravimo oklepaje in vse člene nesemo na desno stran, dobimo

$$0 = a^2 - ab - 2b^2 = (a-2b)(a+b).$$

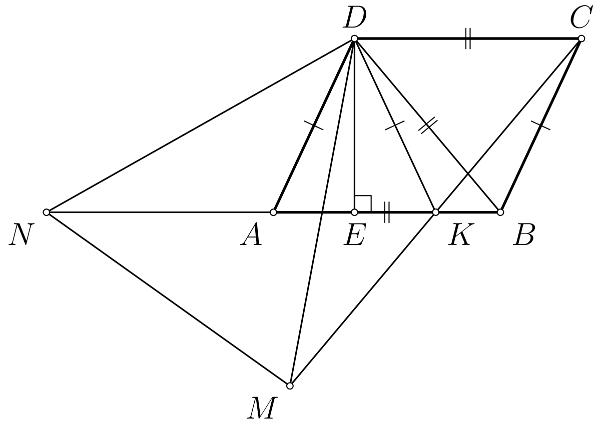
Ker je $a \neq -b$, mora biti $a - 2b = 0$ oziroma $a = 2b$. Ker a ni enak 0 je torej $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

Odprava ulomkov .... **1 točka**
Poenostavljena enačba v $0 = a^2 - ab - 2b^2$ .... **2 točki**
Razstavljen izraz na $(a-2b)(a+b)$ .... **2 točki**
Utemeljitev, da $(a+b) \neq 0$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da lahko delimo z a **in izračunana vrednost izraza** $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ .... **1 točka**

I/2. Obstaja naravno število k, da velja $5n+m = k(5m+n)$ oziroma $(5-k)n = (5k-1)m$. Ker je desna stran strogo pozitivna, mora biti tudi leva, torej velja $5-k > 0$ in zato je $k \in \{1,2,3,4\}$. Če je $k=1$, dobimo $4n = 4m$, torej $n = m$. Če je $k=2$, dobimo $3n = 9m$, torej $n = 3m$. Če je $k=3$, dobimo $2n = 14m$, torej $n = 7m$. Če je $k=4$, dobimo $n = 19m$. V vsakem primeru m deli n.

Zapisana enakost $(5-k)n = (5k-1)m$ **.......... 1 točka**
Ugotovitev, da so možni k **le** $1,2,3$ **in** 4 **.......... 1 točka**
Utemeljitev, da so možni k **le** $1,2,3$ **in** 4 **.......... 3 točke**
Dokazano, da za $k \in \{1,2,3,4\}$ **res** m **deli** n **.......... 2 točki**

I/3.



Trikotnik ADK je enakokrak z vrhom pri D. Zato velja $\angle BKD = 180° - \angle DKA = 180° - \angle KAD = \angle CBK$. Prav tako je $|DK| = |DA| = |BC|$. Trikotnika DKB in CBK sta skladna, saj se ujemata v stranici KB, $\angle BKD = \angle CBK$ in $|DK| = |BC|$. Sedaj je $\angle DCK = \angle BKC = \angle DBK$. Ker sta M in N zrcalni sliki, velja $|CK| = |KM|$ in $|NA| = |AB|$. Zato velja $|CM| = 2|CK| = 2|DB| = 2|AB| = |NB|$. Torej sta tudi trikotnika CDM in BDN skladna, saj je $|DC| = |DB|$, $|CM| = |NB|$ in $\angle DCM = \angle DBN$. Zato je $|DN| = |DM|$ in trikotnik DMN je enakokrak z vrhom pri D.

2. način. Ker je $ABCD$ paralelogram, je premica KB vzporedna premici CD in velja $|BC| = |AD| = |KD|$. Torej je $KBCD$ enakokrak trapez. Sledi $\angle DBK = \angle BKC = \angle DCK$ in $|KC| = |DB|$. Ker sta M in N zrcalni sliki, od tod izpeljemo $|CM| = 2|CK| = 2|DB| = 2|AB| = |NB|$. Torej sta trikotnika MCD in NBD skladna, saj se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima. Zato je $|DN| = |DM|$ in trikotnik DMN je enakokrak z vrhom pri D.

Ugotovitev, da sta trikotnika $\triangle DKB$ in $\triangle CBK$ skladna (ali ugotovitev, da je $KBCD$ enakokrak trapez) .... 2 točki
Izračunano $\angle DCK = \angle DBK = \angle BKC$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\overline{KC} = \overline{DB}$ ali $\overline{KC} = \overline{DC}$ .... 1 točka
Ugotovitev $\overline{CM} = \overline{NB}$ ali $\overline{NA} = \overline{KM}$ .... 1 točka
Izpeljano, da sta trikotnika $\triangle CDM$ in $\triangle BDN$ skladna ali $\triangle NAD$ je skladen $\triangle BDN$ 1 točka
Sklep, da je trikotnik $\triangle DMN$ enakokrak z vrhom v D .... 1 točka

I/4. Če je $b = c$, potem ima zmagovalno strategijo igralec B, sicer pa ima zmagovalno strategijo igralec A.

Denimo najprej, da je $b = c$. Imamo torej situacijo, ko je na dveh kupčkih z najmanj žetoni enako število žetonov. Igralec B lahko v tem primeru poskrbi, da je situacija po vsaki njegovi potezi spet taka, medtem ko po vsaki potezi igralca A kupček z najmanj žetoni vsebuje strogo manj žetonov kot preostala dva kupčka. Igralec A mora namreč v svoji potezi nujno iz enega izmed kupčkov z najmanj žetoni prestaviti nekaj žetonov na nek drug kupček. Igralec B potem izbere trenutno najvišja kupčka, ki imata zaradi poteze igralca A sedaj strogo več žetonov kot najnižji kupček, in med njima premakne žetone tako, da bosta po njegovi potezi najnižja kupčka imela enako žetonov. Ko bosta kupčka z najmanj žetoni prazna, bodo vsi žetoni na enem kupčku in igra bo končana. To se lahko zgodi le po potezi igralca B, zato igralec B zmaga.

Denimo sedaj, da je $b > c$. Tedaj lahko igralec A s kupčka z b žetoni prestavi $b - c > 0$ žetonov na kupček z a žetoni. Po njegovi potezi bosta zato kupčka z najmanj žetoni oba imela c žetonov. Torej bo situacija taka kot zgoraj, le da bo na potezi igralec B. Zato ima v tem primeru zmagovalno strategijo igralec A.

Utemeljitev, da se igra konča po končnem številu potez .... 1 točka
Pravilna določitev igralca z zmagovalno strategijo (glede na a, b in c) .... 1 točka
Obravnava poteze poraženca (možne izbire kupov, stanje po potezi) .... 2 točki
Opis in obravnava poteze zmagovalca (stanje po potezi) .... 1 točka
Utemeljitev, da lahko igro konča le igralec z zmagovalno strategijo .... 1 točka
Prevedba primera $b \neq c$ na primer $b = c$ (ali obratno) .... 1 točka

II/1. Opazimo, da če od prve enakosti odštejemo drugo, dobimo na levi strani kvadrat tričlenika. Dobimo namreč

$$(x - y + 2z)^2 = -y^2 + 6y - 9,$$

kar lahko dalje preoblikujemo v

$$(x - y + 2z)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

Ker so x, y in z realna števila, morata biti oba oklepaja v zgornjem izrazu enaka 0, torej je $y = 3$ in $x = y - 2z = 3 - 2z$. To vstavimo v prvo enačbo sistema in po preoblikovanju dobimo $2z^2 - 3z + 1 = 0$ oziroma $(2z - 1)(z - 1) = 0$. Enako dobimo, če $y = 3$ in $x = 3 - 2z$ vstavimo v drugo enačbo. Torej je $z = 1$ ali $z = \frac{1}{2}$. Rešitvi naloge sta tako trojici $(1, 3, 1)$ in $(2, 3, \frac{1}{2})$.

Odšteti enačbi .... **1 točka**
Zapis kvadrata $(y - 3)^2$ .... **1 točka**
Zapis kvadrata $(x - y + 2z)^2$ .... **1 točka**
Utemeljitev $y = 3$ **in** $x = 3 - 2z$ .... **1 točka**
Redukcija na $2z^2 - 3z + 1 = 0$ .... **1 točka**
Preverjena rešitev $(1, 3, 1)$ .... **1 točka**
Preverjena rešitev $(2, 3, \frac{1}{2})$ .... **1 točka**

Za rešitvi mora biti jasno utemeljeno, da ustrezata obema enačbama. Če ta utemeljitev ni dobra, a sta zapisani obe rešitvi, se dodeli 1 točko.

II/2. Naj bo $p+q=x^2$ in $p+4q=y^2$ za neki naravni števili x in y. Če enačbi odštejemo, dobimo $3q=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. Ker je q praštevilo in $x+y\geq 2$, imamo naslednje možnosti:

1. možnost: $y-x=1$ in $y+x=3q$. Iz prve enačbe izrazimo $y=x+1$ in vstavimo v drugo, da dobimo $2x+1=3q$. Od tod sledi, da je q liho število, zato lahko pišimo $q=2m+1$ za neko naravno število m. Potem je $x=3m+1$ in $p=x^2-q=9m^2+4m=m(9m+4)$. Ker je p praštevilo, mora biti $m=1$. Tako dobimo $p=13$ in $q=3$, kar sta res praštevili.

2. možnost: $y-x=3$ in $y+x=q$. Iz prve enačbe izrazimo $y=x+3$ in vsavimo v drugo, da dobimo $2x+3=q$. Iz začetne enakosti torej dobimo $p=x^2-p=x^2-q=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Ker je p praštevilo, mora biti $x=4$. Tako dobimo $p=5$ in $q=11$, kar sta res praštevili.

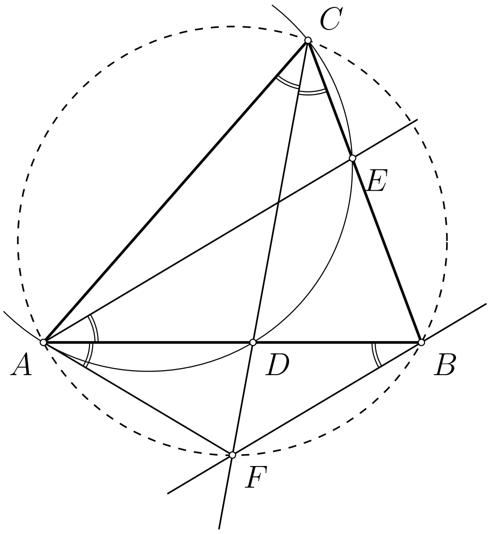
3. možnost: $y-x=q$ in $y+x=3$. Ker sta x in y naravni števili in mora biti $y>x$, je $y=2$ in $x=1$, kar pa nam da protislovje $q=1$.

Rešitvi enačbe sta torej para $(5,11)$ in $(13,3)$.

Ugotovitev $3q=(y-x)(y+x)$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da imamo 4 možnosti: $(y-x=1,\ y+x=3q),(y-x=3,\ y+x=q),(y-x=q,\ y+x=3),(y-x=3q,\ y+x=1)$ .... **2 točki**
Pravilno rešena možnost $y-x=1$**,** $y+x=3q$ .... **1 točka**
Pravilno rešena možnost $y-x=3$**,** $y+x=q$ .... **1 točka**
Dokaz, da pri ostalih dveh možnostih ni rešitev .... **1 točka**
Zapis obeh rešitev .... **1 točka**

Sklep, da imamo 4 možnosti, je najpomembnejši sklep, zato za zapis le nekaterih možnosti ni bilo delnih točk.

II/3.



Označimo $\angle ACB = \gamma$. Potem je $\angle ACF = \angle FCB = \frac{\gamma}{2}$, saj je CF simetrala kota $\angle ACB$. Zaradi koncikličnosti točk A, D, E in C sledi $\angle DAE = \angle DCE = \frac{\gamma}{2}$. Ker je premica BF vzporedna premici AE, velja $\angle ABF = \angle DAE = \frac{\gamma}{2}$. Zaradi $\angle ACF = \frac{\gamma}{2} = \angle ABF$ so torej točke A, F, B in C koneciklične. Od tod sledi $\angle FAB = \angle FCB = \frac{\gamma}{2} = \angle ABF$, torej je trikotnik AFB enakokrak z vrhom pri F.

Sklep $\angle DCE = \angle DAE$ ali smiselna uporaba koncikličnosti točk A, D, E, C pri premetavanju kotov .... 1 točka
Sklep $\angle DAE = \angle ABF$ ali smiselna uporaba vzporednosti AE in BF pri premetavanju kotov .... 1 točka
Tetivnost $AFBC$ ali podobnost trikotnikov FDA in BDC .... 3 točke
Sklep $\angle FAB = \angle FCB$ in zato trikotnik AFB enakokrak .... 2 točki

II/4. Največje število oglišč, ki jih lahko pobarvamo rdeče je $\frac{n+1}{2}$. Če pobarvamo $\frac{n+1}{2}$ zaporednih oglišč n-kotnika, potem je pogoju naloge zadoščeno. Denimo sedaj, da pobarvamo vsaj $\frac{n+1}{2}+1$ oglišč. Označimo oglišča n-kotnika zaporedoma z naravnimi števili od 1 do $2k+1=n$. Torej je vsaj $k+2$ oglišč rdečih. Oglejmo si pare oglišč $(1,k+1),(2,k+2),(3,k+3),\ldots,(k,2k),(k+1,2k+1)$, ki predstavljajo nekatere od najdaljših diagonal n-kotnika. Ker je teh parov natanko $k+1$ in zavzemejo vsa oglišča, obstaja vsaj en par, v katerem sta obe oglišči rdeči. Predpostavimo lahko, da je to par $(1,k+1)$, sicer bi oglišča le preštevilčili. Ker je vsaj še k od preostalih oglišč rdečih, oglišč oštevilčenih z $2,3,\ldots,k$ pa je le $k-1$, je vsaj eno od oglišč oštevilčenih s $k+2,k+3,\ldots,2k+1$ rdeče. Naj bo to oglišče $k+m$, kjer je $2\leq m\leq k+1$. Oglišče $k+m$ leži na istem bregu premice določene z oglišči 1 in $k+1$ kot središče n-kotnika. Od tod sledi, da središče n-kotnika leži znotraj trikotnika z oglišči $1,k+1,k+m$, saj je daljica s krajišči $1,k+1$ ena od najdaljših diagonal n-kotnika. Toda oglišča $1,k+1,k+m$ so vsa rdeča, torej središče n-kotnika leži tudi znotraj večkotnika določenega z rdečimi oglišči.

Rezultat $\frac{n+1}{2}$ .... 1 točka
Konstrukcija $\frac{n+1}{2}$ rdečih oglišč, tako da večkotnik, ki ga določajo, ne vsebuje središča n-kotnika .... 1 točka
Ugotovitev, da obstaja najdaljša diagonala z rdečima krajiščema .... 2 točki
Ugotovitev, da obstaja rdeča točka na istem bregu najdaljše diagonale z rdečima krajiščema kot središče n-kotnika .... 1 točka
Utemeljitev, da središče n-kotnika leži znotraj dobljenega trikotnika z rdečimi oglišči 2 točki

III/1. Ničelni polinom je očitno rešitev naloge. Naj bo p neničeln polinom in pišimo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, kjer je $a_n \neq 0$. Vodilni člen na levi strani enakosti je tedaj enak $a_n(a_n x^n)^n = a_n^{n+1}x^{n^2}$, vodilni člen na desni strani pa je enak $x^2 \cdot a_n x^n = a_n x^{n+2}$. Ker morata biti ta dva člena iste stopnje, sledi $n^2 = n+2$ oziroma $(n-2)(n+1) = 0$. Ker je n nenegativno celo število, mora biti $n = 2$. Pišimo torej $p(x) = ax^2 + bx + c$, kjer je $a \neq 0$. Tedaj velja

$$p(p(x)) = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c) \tag{1}$$

$$(x^2 + x + 1)p(x) = ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b+a)x^2 + (c+b)x + c. \tag{2}$$

Iz dane enakosti tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
a^3 &= a,\\
2a^2b &= b + a,\\
ab^2 + 2a^2c + ab &= c + b + a,\\
2abc + b^2 &= c + b,\\
ac^2 + bc + c &= c.
\end{aligned}$$

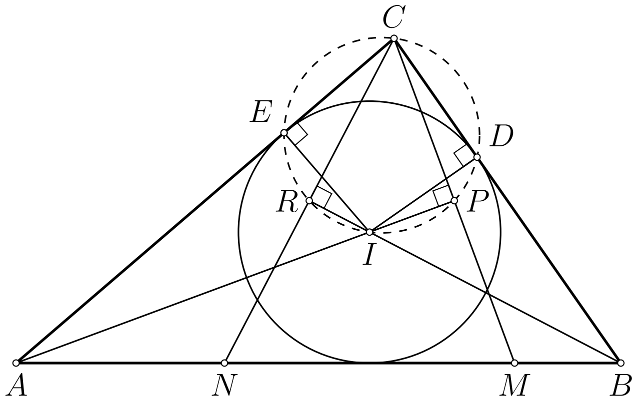
Ker je $a \neq 0$, iz prve enakosti sledi $a = 1$ ali $a = -1$. Za $a = 1$ v drugi enačbi dobimo $2b = b+1$, torej $b = 1$. Če oboje vstavimo v tretjo enačbo, dobimo še $2c+2 = c+2$ oziroma $c = 0$. Preverimo lahko, da ta tri števil ustrezajo tudi zadnjima dvema enakostima. Za $a = -1$ dobimo protisloven sistem. Rešitvi naloge sta torej dve, $p(x) = 0$ in $p(x) = x^2 + x$.

Rešitev $p(x) = 0$ .... **1 točka**
Neničelen p **je stopnje** 2 .... **2 točki**
Zapis enakosti z nastavkom (enačbi (1) in (2)) .... **2 točki**
Nastavljen in rešen sistem za koeficiente, $p(x) = x^2 + x$ .... **2 točki**

III/2. Odgovor je 2. Če vzamemo $a = 4$ in $b = 3$, dobimo $3a^2 - ab^2 - 2b - 4 = 2$. Dovolj je torej pokazati, da enačba $3a^2 - ab^2 - 2b - 4 = 1$ nima rešitev v naravnih številih. Enačbo preuredimo v $3a^2 - ab^2 = 2b + 5$. Ker je desna stran liha, mora biti tudi leva stran liha, torej mora biti a liho število in b sodo število. Število b^2 je zato deljivo s 4, ostanek števila a^2 pri deljenju s 4 pa je enak 1. Leva stran ima torej pri deljenju s 4 ostanek 3, desna stran pa ostanek 1, saj je $2b$ deljivo s 4. Prišli smo do protislovja, torej enačba nima rešitev v naravnih številih.

Odgovor, da se da dobiti število 2. .... **1 točka**
Odgovor, da število 2 **dobimo pri** $a = 4$ **in** $b = 3$. .... **1 točka**
Pojasnilo, da moramo pokazati, da se števila 1 **ne da dobiti.** .... **1 točka**
Ugotovitev, da mora biti a **liho število.** .... **1 točka**
Ugotovitev, da mora biti b **sodo število.** .... **1 točka**
Utemeljitev, da tudi ob zgornji predpostavki pridemo v protislovje. .... **2 točki**

III/3.



Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Ker je AMC enakokrak trikotnik z vrhom pri A, je AP višina na osnovnico in hkrati simetrala kota $\angle MAC$. Zato I leži na premici AP. Podobno I leži tudi na premici BR. Sledi $\angle CPI = \angle CPA = \frac{\pi}{2}$ in $\angle IRC = \angle BRC = \frac{\pi}{2}$, torej točki P in R ležita na krožnici s premerom CI. Ker sta D in E dotikališči včrtane krožnice, velja $\angle CDI = \angle IEC = \frac{\pi}{2}$, zato tudi točki D in E ležita na krožnici s premerom CI. Točke P, R, D in E so torej koncikllične.

Ugotovitev, da sta $\triangle AMC$ in $\triangle BNC$ enakokraka .... 1 točka
Zapis dejstva, da v enakokrakem trikotniku višina in simetrala kota sovpadata 1 točka
Ugotovitev, da zaradi zgornjega dejstva velja $\angle CPA = \angle BRC = \frac{\Pi}{2}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da velja $\angle IEC = \angle CDI$ ker sta E in D dotikališči včrtane krožnice .... 1 točka
Sklep, da P in R ležita na krožnici s premerom CI .... 1 točka
Sklep, da D in E ležita na krožnici s premerom CI .... 1 točka
Končni sklep, da so torej P, R, D, E konciklične .... 1 točka

III/4. Naj A_i oziroma B_i označuje prvo oziroma drugo potezo, izvedeno na škatlah i in $i+1$. Naj bo $i \leq 6$. Če Miha izvede potezo B_i, potem se število žetonov v škatlah i in $i+1$ zmanjša za 1, število žetonov v škatli $i+2$ ostane enako, število žetonov v vreči pa se poveča za 1. Če pa Miha izvede zaporedje potez A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, potem se število žetonov v škatli i zmanjša za 1, število žetonov v škatli $i+1$ ostane enako, število žetonov v škatli $i+2$ in v vreči pa se poveča za 1. V drugem primeru je torej rezultat boljši, saj je edina razlika to, da ima v dveh škatlah po en žeton več. Ta razmislek pokaže, da se Mihu potez B_i za $i \leq 6$ ne splača izvajati. Od preostalih potez le poteza B_7 poveča število žetonov v vreči, zato jo mora Miha izvesti čim večkrat. Brez škode lahko predpostavimo, da jo izvaja šele na koncu. Pred tem s potezami A_i, $i \leq 6$ prestavi žetone v predzadnjo škatlo, ki potem vsebuje $1+2+2^2+\ldots+2^6=2^7-1=127$ žetonov, zadnja škatla pa vsebuje 1 žeton. Naj x označuje število žetonov v predzadnji škatli ob nekem času, y pa število žetonov v zadnji škatli ob istem času. Da bo lahko Miha izvedel čim več potez B_7, mora biti $\min\{x, y\}$ čim večji. Ker se s potezo A_7 število žetonov v predzadnji škatli zmanjša za 1, v zadnji pa poveča za 2, bo minimum največji takrat, ko bo prvič veljalo $x \leq y$ in bo zato enak x. Po k potezah A_7 bo $x = 127-k$ in $y = 1+2k$. Iščemo torej najmanjši k pri katerem bo $127-k \leq 1+2k$ oziroma $k \geq \frac{127-1}{3} = 42$. Najmanjši tak k je enak $k = 42$. Po 42 potezah A_7 bo s potezami B_7 Miha v vrečo premaknil $127-42=85$ žetonov, kar je torej največje število žetonov, ki jih lahko ima Miha na koncu v vreči.

Utemeljitev, da se drugo potezo splača uporabljati le na zadnjih dveh škatlah 2 točki
Premik vseh žetonov v zadnji dve škatli s prvimi potezami .... 1 točka
Poskus izenačenja števila žetonov v zadnjih dveh škatlah .... 1 točka
Izračunano največje število žetonov, ki so v vreči .... 3 točke

IV/1. Ničli polinoma $p(x) = x^2 + ax + b$ sta $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ in $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Ker morata biti različni, je $a^2 - 4b \neq 0$. Od tod izračunamo

$$x_1^2 - \frac{1}{2} = \frac{(a^2 - 2b - 1) - a\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

in

$$x_2^2 - \frac{1}{2} = \frac{(a^2 - 2b - 1) + a\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Ker sta to ničli polinoma $q(x)$, morata ustrezati enačbi $x^2 + (a - \frac{1}{2})x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Ko oboje vstavimo v to enačbo in preuredimo, dobimo

$$(4a^4 - 12a^2b + 8b^2 - 5a^2 + 6b) - (4a^3 - 4ab - 3a)\sqrt{a^2 - 4b} = 0$$

in

$$(4a^4 - 12a^2b + 8b^2 - 5a^2 + 6b) + (4a^3 - 4ab - 3a)\sqrt{a^2 - 4b} = 0.$$

Torej mora veljati

$$4a^4 - 12a^2b + 8b^2 - 5a^2 + 6b = 0$$

in

$$(4a^3 - 4ab - 3a)\sqrt{a^2 - 4b} = 0.$$

Ker je $a^2 - 4b \neq 0$, iz druge enačbe sledi $(4a^3 - 4ab - 3a) = a(4a^2 - 4b - 3) = 0$. Če je $a = 0$, potem iz prve enačbe sledi $8b^2 + 6b = 2b(4b + 3) = 0$. Ker je $a^2 - 4b \neq 0$, mora biti $b \neq 0$, torej je $b = -\frac{3}{4}$. Če pa je $a \neq 0$, potem mora biti $4a^2 - 4b - 3 = 0$ oziroma $b = a^2 - \frac{3}{4}$. Ko slednje vstavimo v prvo enačbo, dobimo $-2a^2 = 0$ oziroma $a = 0$, kar je protislovje. Torej je $a = 0$ in $b = -\frac{3}{4}$.

2. način. Po Vietovih pravilih je $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = \frac{1}{2} - a^2$ in $(x_1^2 - \frac{1}{2})(x_2^2 - \frac{1}{2}) = b^2 - \frac{1}{2}$. Najprej preoblikujmo tretjo enačbo, pri čemer upoštevamo prvi dve,

$$\frac{3}{2} - a^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b,$$

od koder dobimo $b = a^2 - \frac{3}{4}$. Preoblikujmo še četrto enačbo,

$$b^2 - \frac{1}{2} = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - a^2\right) + \frac{1}{4},$$

od koder sledi $a^2 = 0$ in zato $a = 0$ ter $b = -\frac{3}{4}$.

1. način

Izrazitev x_1 in x_2 z a in b s pomočjo kvadratne enačbe .... **1 točka**
Izrazitev $x_1^2 - \frac{1}{2}$ in $x_2^2 - \frac{1}{2}$ z a in b .... **1 točka**
Vstavitev teh ničel, izraženih z a in b, v polinom $q(x)$ .... **1 točka**
Zapis sistema enačb $4a^4 - 12a^2b + 8b^2 - 5a^2 + 6b = 0$ in
$(4a^3 - 4ab - 3a)\sqrt{a^2 - 4b} = 0$ .... **1 točka**
Pravilno rešen sistem enačb .... **2 točki**
Zapis rešitve $a = 0$, $b = -\frac{3}{4}$ .... **1 točka**

2. način

Uporaba Vietovih formul .... **1 točka**

Pravilen zapis vseh štirih enačb z Vietovimi formulami ($x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = b$, $x_1^2 + x_2^2 - 1 = \frac{1}{2} - a^2$ **in** $(x_1^2 - \frac{1}{2})(x_2^2 - \frac{1}{2}) = b^2 - \frac{1}{2}$**)** .... **1 točka**
Izrazitev enačbe $x_1^2 + x_2^2 - 1 = \frac{1}{2} - a^2$ **z** a **in** b .... **2 točki**
Izrazitev enačbe $(x_1^2 - \frac{1}{2})(x_2^2 - \frac{1}{2}) = b^2 - \frac{1}{2}$ **z** a **in** b .... **2 točki**
Zapis rešitve $a = 0$, $b = -\frac{3}{4}$ .... **1 točka**

IV/2. (a) Število c lahko zapišemo v obliki $c = kab + r$, kjer je k neko nenegativno celo število, $r < ab$ pa ostanek števila c pri deljenju z ab. Število r lahko nadalje zapišemo v obliki $r = ma + n$, kjer je m neko nenegativno celo število, $n < a$ pa ostanek števila r pri deljenju z a. Med drugim od tod sledi $m < b$, saj bi sicer bilo $r \geq ab$. Od tod izračunamo

$$\left[\frac{c}{ab}\right] = \left[k + \frac{r}{ab}\right] = k,$$

saj je $0 \leq \frac{r}{ab} < 1$, in

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{\left[kb + m + \frac{n}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{kb + m}{b}\right] = \left[k + \frac{m}{b}\right] = k,$$

saj je $0 \leq \frac{n}{a} < 1$ in $0 \leq \frac{m}{b} < 1$. Od tod sledi enakost iz naloge.

(b) Taka števila so na primer $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ in $c = 1$, saj je v tem primeru $\left[\frac{c}{ab}\right] = 1$ in $\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = 0$.

Število c zapisano v obliki $kab + ma + n$ ter navedeni in pravilno argumentirani trditvi $m < b$ in $n < a$ .... 3 točke

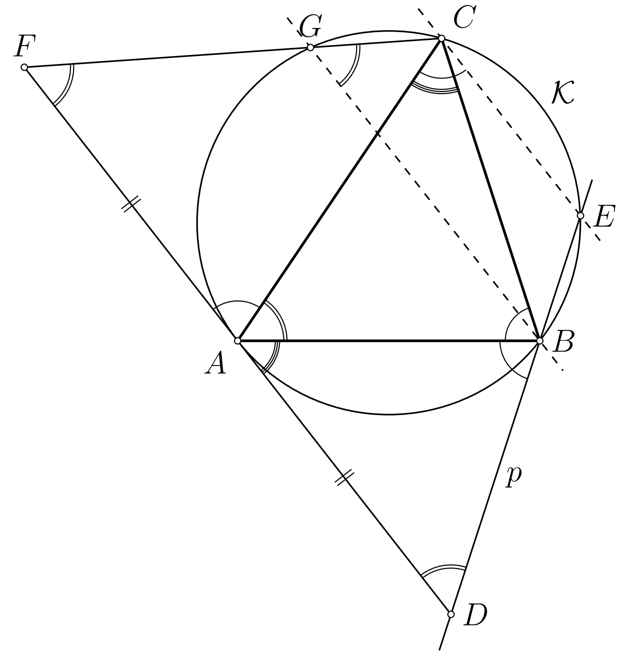
Tekmovalec ne zapiše števila v obliki $kab + ma + n$, pravilno pa uporabi kakšno praprostejšo obliko osnovnega izreka o deljenju npr. $c = ka + r$ ali $kab + r$ (tekmovalec v nobenem primeru ne more dobiti zgornjih treh točk in te točke) .... 1 točka

Dokaz, da velja $\left[\frac{c}{ab}\right] = k = \left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right]$ .... 2 točki

Naveden primer pozitivnih realnih števil a, b, c za katere neenakost ne velja ...2 točki

Za rešitev prvega dela naloge lahko tekmovalec prejme do 5 točk.

IV/3.



Po izreku o kotu med tetivo in tangento je $\angle CAF = \angle CBA$. Ker je p zrcalna slika premice BC pri zrcaljenju čez premico AB, je $\angle CBA = \angle ABD$. Ker so točke A, B, E, C konciklične, je $\angle ABD = \angle ACE$. Torej je $\angle CAF = \angle ACE$, zato je premica CE vzporedna premici FD. Pokazati moramo torej, da je tudi premica GB vzporedna premici FD. Po izreku o kotu med tetivo in tangento je $\angle DAB = \angle ACB$. Ker je tudi $\angle CBA = \angle ABD$, sta trikotnika BAD in BCA podobna, saj se ujemata v dveh kotih. Torej je $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$. Ker je F zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko A, je $|AD| = |FA|$. Torej je $\frac{|FA|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$ oziroma $\frac{|FA|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CB|}$. Ker je hkrati $\angle CAF = \angle CBA$, sta si tudi trikotnika FAC in ABC podobna. Torej je $\angle AFC = \angle BAC = \angle BGC$ in zato je tudi premica GB vzporedna premici FD.

Uporaba izreka o kot med tetivo in tangento za tangento AD .... **1 točka**
Utemeljitev $\angle ABD = \angle CAF$ .... **1 točka**
Dokaz $CE||AD$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da sta si trikotnika BAD **in** BCA **podobna** .... **1 točka**
Razmerje $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da sta si trikotnika FAC **in** ABC **podobna** .... **1 točka**
Dokaz $GB||AD$ **in posledično** $CE||GB$ .... **1 točka**

IV/4. Pokažimo najprej, da če se število na tabli pri zamenjavi zmanjša, potem je novo število večje ali enako 5. Števila 1 po zamenjavi ne moremo dobiti, saj vsota dveh naravnih števil ni nikoli enaka 1. Število $2 = 1 + 1$ lahko dobimo le iz števila 1, število $3 = 1 + 2$ le iz števila 2, število $4 = 1 + 3 = 2 + 2$ pa le iz števil 3 ali 4. Torej če po zamenjavi dobimo število manjše od 5, potem se pri zamenjavi število ni zmanjšalo. To pomeni, da če je začetno število $n < 5$, potem v nobenem koraku ne bomo dobili manjšega števila.

Dokažimo sedaj, da lahko število ki je večje od 5 vedno zmanjšamo. Denimo, da imamo na nekem koraku na tabli število $m > 5$. Če je m sod, torej oblike $m = 2k$, kjer je $k > 2$ naravno število, potem ga lahko zamenjamo s številom $k + 2$. S tem smo dobili število, ki je manjše od m, saj je pogoj $k + 2 < 2k$ ekvivalenten pogoju $k > 2$. Če je m lih, torej oblike $m = 2k - 1$, kjer je $k > 3$ naravno število, potem ga lahko najprej zamenjamo s številom $(2k - 1) + 1 = 2k$ in nato s številom $k + 2$. Na ta način spet dobimo število, ki je manjše od m, saj je pogoj $k + 2 < 2k - 1$ ekvivalenten pogoju $k > 3$. To pomeni, da če je začetno število $n \geq 5$, ga lahko po končno korakih vedno zmanjšamo do števila 5, manjšega števila pa po zgornjem razmisleku ne moremo dobiti.

Najmanjše število, ki je lahko po končno korakih zapisano na tabli je torej enako 5 v primeru $n \geq 5$ oziroma n v primeru $n < 5$.

Ugotovitev, da je iskano število 5 v primeru $n \geq 5$ in n v primeru $n < 5$ ...... 1 točka
Dokaz, da števila $n < 5$ ne moremo dobiti z zmanjševanjem .... 2 točki
Dokaz, da lahko $2k > 5$ vedno zmanjšamo .... 2 točki
Dokaz, da lahko $2k - 1 > 5$ vedno zmanjšamo .... 2 točki