Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

54. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Za cela števila a, b, c in d velja $a > b > c > d$ in

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) = 10.$$

Katere vrednosti lahko zavzame izraz $a + b - c - d$?

2. Za neničelna realna števila x, y in z velja $3x + 2y = z$ in $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. Dokaži, da je vrednost izraza $5x^2 - 4y^2 - z^2$ vedno celo število.

3. Simetrala diagonale AC pravokotnika $ABCD$, v katerem je $|AB| > |BC|$, seka stranico CD v točki E. Krožnica s središčem E in polmerom AE seka stranico AB še v točki F. Naj bo G pravokotna projekcija točke C na premico EF. Pokaži, da točka G leži na diagonali BD.

4. Učiteljica je Mateju izročila štiri liste papirja, na vsakem je bila zapisana neničelna števka. Matej je liste postavil v vrsto in tako oblikoval štirimestno število. Ko je dva lista med sabo zamenjal, ne da bi ju pri tem obrnil ali zavrtel, je oblikoval še eno štirimestno število. Ali je lahko oblikoval števili, ki si nista bili tuji, ne glede na to, katere števke so bile zapisane na listih?

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Določi vsa cela števila n, za katera ima enačba $x^2 + nx + n + 5 = 0$ le celoštevilske rešitve.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 7, ki ima vsoto števk enako n?

3. Naj bo O središče ostrokotnemu trikotniku ABC očrtane krožnice $\mathcal{K}$. Simetrala notranjega kota pri A seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki D, simetrala notranjega kota pri B pa seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki E. Označimo z I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Kolikšna je velikost kota $\angle ACB$, če točke D, E, O in I ležijo na isti krožnici?

4. Vsaka točka daljice $\mathcal{D}$ je rdeče ali modre barve. Dokaži, da obstajajo enako obarvane različne točke A, B in C daljice $\mathcal{D}$, da je $|AB| = |BC|$.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Naj bosta p in q polinoma stopnje 3 s celoštevilskimi koeficienti, katerih vodilna koeficienta sta si tuja. Naj bo a tako racionalno število, da sta $p(a)$ in $q(a)$ celi števili. Dokaži, da je tedaj tudi a celo število.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 13, ki ima vsoto števk enako n?

3. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC in D točka v notranjosti trikotnika ABH. Vzporednica k premici AH skozi točko D seka stranici BC in AB v točkah K in L. Vzporednica k premici BH skozi točko D seka daljici AC in AB v točkah M in N.

   Dokaži, da točke C, D in H ležijo na isti premici, če točke K, L, M in N ležijo na isti krožnici.

4. Vsaka točka na stranicah trikotnika $\mathcal{T}$ je rdeče ali modre barve. Dokaži, da na stranicah trikotnika $\mathcal{T}$ obstajajo take enako obarvane točke A, B, C in D, da je štirikotnik $ABCD$ trapez.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa realna števila x z intervala $[0, 2\pi)$, za katera so vsi členi zaporedja s splošnim členom
$$a_n = \frac{1}{\cos(nx)}$$
cela števila.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 11, ki ima vsoto števk enako n?

3. Diagonala AC konveksnega štirikotnika $ABCD$ je simetrala kota $\angle DCB$. Naj bo E presečišče stranice AB in trikotniku ACD očrtane krožnice in naj bo F presečišče stranice AD in trikotniku ABC očrtane krožnice. Dokaži, da se daljice AC, DE in BF sekajo v eni točki.

4. Dano je naravno število n. V ravnini leži $2n+2$ točk, izmed katerih nobene tri ne ležijo na isti premici. Premica v ravnini je *ločnica*, če na njej ležita dve izmed danih točk, na vsakem bregu te premice pa je natanko n točk. Določi največje število m, za katerega velja, da je v ravnini vedno vsaj m ločnic.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Ljubljana, 17. april 2010

Rešitve nalog

I/1. Ker so števila a, b, c in d različna, so različna tudi števila $1-a$, $1-b$, $1-c$ in $1-d$. Ker je 10 produkt le dveh praštevil, lahko 10 zapišemo kot produkt štirih celih števil le, če sta dve izmed teh števil 1 in -1. Preostali števili sta tedaj -2 in 5 ali pa 2 in -5.

Zaradi $a > b > c > d$ sledi $1-a < 1-b < 1-c < 1-d$. Zato je $1-b = -1$ in $1-c = 1$, od koder sledi $b = 2$ in $c = 0$. Če je $1-a = -2$ in $1-d = 5$, dobimo $a = 3$ in $d = -4$. V primeru $1-a = -5$, $1-d = 2$ pa je $a = 6$ in $d = -1$.

Vrednost izraza $a+b-c-d$ je v prvem primeru $3+2-0-(-4) = 9$, v drugem pa $6+2-0-(-1) = 9$, torej je edina možnost $a+b-c-d = 9$.

I/2. 1. način V drugo enačbo vstavimo $z = 3x + 2y$ in odpravimo ulomke. Dobimo $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ oziroma $(x+y)(x+2y) = 0$. Od tod sledi $x = -y$ ali $x = -2y$.

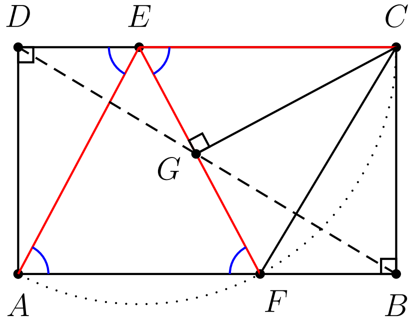
V prvem primeru je $x = -y$ in $z = -y$, zato je $5x^2 - 4y^2 - z^2 = 5y^2 - 4y^2 - y^2 = 0$.

V drugem primeru je $x = -2y$ in $z = -4y$, zato je $5x^2 - 4y^2 - z^2 = 20y^2 - 4y^2 - 16y^2 = 0$.

2. način Iz druge enačbe sledi $2xy = 3yz + xz$. Če prvo enačbo pomnožimo z z, x in y, lahko izrazimo $z^2 = 3xz + 2zy$, $3x^2 = zx - 2xy$ in $2y^2 = zy - 3xy$. Zato je

$$5x^2 - 4y^2 - z^2 = \frac{5}{3}(zx - 2xy) - 2(zy - 3xy) - (3xz + 2zy) = \frac{4}{3}(2xy - 3zy - xz) = 0.$$

I/3. Označimo $\angle FAE = \alpha$. Ker točka E leži na simetrali daljice AC, je enako oddaljena od A in C, zato je središče krožnice, na kateri ležijo točke A, C in F. Tako velja $|AE| = |CE| = |FE|$. Zato je $\angle EFA = \angle FAE = \alpha$. Zaradi vzporednosti AB in CD sledi še $\angle DEA = \angle EAF = \alpha$ in $\angle CEF = \angle EFA = \alpha$. Pravokotna trikotnika AED in CEG se ujemata v kotih in imata enako dolgi hipotenuzi, zato sta skladna. Tako je $|ED| = |EG|$ in $|CG| = |AD| = |BC|$. Od tod sledi, da je trikotnik DEG enakokrak in je



$$\angle EGD = \frac{\pi - \angle DEG}{2} = \frac{\angle GEC}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Po Pitagorovem izreku velja $|FB|^2 = |FC|^2 - |BC|^2 = |FC|^2 - |GC|^2 = |FG|^2$, torej je $|FB| = |FG|$. Trikotnik GFB je zato enakokrak in tako velja

$$\angle FGB = \frac{\pi - \angle GFB}{2} = \frac{\angle GFA}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Torej je $\angle FGB = \angle EGD$, zato točke B, G in D ležijo na isti premici.

Opomba. Da je trikotnik FBG enakokrak, lahko utemeljimo tudi drugače. Iz $|CG| = |CB|$ sledi, da je enakokrak trikotnik BCG, torej je $\angle CBG = \angle BGC$ in zato

$$\angle FGB = \frac{\pi}{2} - \angle BGC = \frac{\pi}{2} - \angle GBC = \angle FBG.$$

I/4. Odgovor je da. Če je katera izmed števk soda, lahko Matej oblikuje dve sodi števili, saj sodo števko postavi na mesto enic, med sabo pa zamenja dva izmed ostalih listov. Če je med štirimi števkami število 5, Matej postopa podobno. Petico postavi na mesto enic, med sabo pa nato zamenja dva izmed ostalih listov. Števili si nista tuji, saj sta obe deljivi s 5. V kolikor sta dve zapisani števki enaki, Matej sestavi neko število, nato zamenja lista papirja z isto števko in dobi število, enako prejšnjemu.

Ostane še en primer in sicer, ko so na listih zapisane števke 1, 3, 7 in 9. S temi števkami Matej lahko oblikuje števili 1397 in 1793 ali števili 1397 in 9317 ali števili 9317 in 9713, saj so vsa ta števila deljiva z 11. Lahko pa oblikuje tudi števili 1739 in 9731, ki sta obe deljivi s 37.

Opomba. Primer dveh štirimestnih števil, ki si nista tuji in katerih števke so 1, 3, 7 in 9, dobimo z obravnavo razlik oblike $\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_2a_1a_3a_4}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_3a_2a_1a_4}$ in tako dalje (drugo štirimestno število ima glede na prvo zamenjani dve števki). Primer najdemo že s pomočjo druge izmed zapisanih razlik. Ker je

$$\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_3a_2a_1a_4} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11(a_1 - a_3)$$

in nobeno število s števkami 1, 3, 7, 9 ni deljivo z 2, 3 ali 5, je smiselno poiskati število, deljivo z 11. Če Matej sestavi število $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, deljivo z 11, je z 11 deljivo tudi $\overline{a_3a_2a_1a_4}$. Računamo lahko po vrsti. Število 1379 ni deljivo z 11, 1397 pa je. Matej lahko sestavi števili 1397 in 9317.

II/1. Kvadratna enačba ima lahko celoštevilske rešitve le, če je diskriminanta popoln kvadrat. Izračunamo lahko $D = n^2 - 4(n+5) = (n-2)^2 - 24$. Torej za neko nenegativno celo število m velja $m^2 = (n-2)^2 - 24$, oziroma

$$24 = (n-2)^2 - m^2 = (n+m-2)(n-m-2).$$

Ker sta števili $n+m-2$ in $n-m-2$ iste parnosti in je $m \geq 0$, imamo 4 možnosti.

Če je $n-m-2 = -12$ in $n+m-2 = -2$, je $n = -5$ (in $m = 5$), kvadratna enačba pa ima rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 5$. V primeru $n-m-2 = -6$ in $n+m-2 = -4$ je $n = -3$ (in $m = 1$), rešitvi kvadratne enačbe pa sta $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$.

Če je $n-m-2 = 2$ in $n+m-2 = 12$, je $n = 9$ ter $m = 5$, kvadratna enačba pa ima rešitvi $x_1 = -7$ in $x_2 = -2$. V primeru $n-m-2 = 4$ in $n+m-2 = 6$ je $n = 7$ in $m = 1$, rešitvi kvadratne enačbe pa sta $x_1 = -4$ in $x_2 = -3$.

Vse možne vrednosti števila n so torej -5, -3, 7 in 9.

2. način Naj bosta x_1 in x_2 celoštevilski rešitvi te kvadratne enačbe. Predpostavimo lahko še $x_1 \leq x_2$. Po Vietovih pravilih velja $x_1 + x_2 = -n$ in $x_1x_2 = n + 5$. Če enačbi seštejemo, dobimo $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 5$ in zato

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6.$$

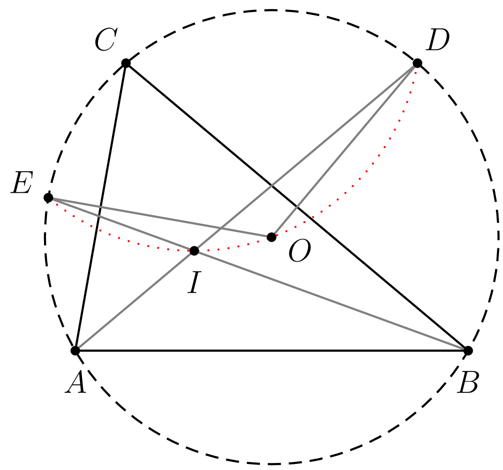
Ker je $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-3) \cdot (-2) = (-6) \cdot (-1)$, dobimo štiri možnosti. V prvem primeru je $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, v drugem $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, v tretjem $x_1 = -4$, $x_2 = -3$ in v zadnjem $x_1 = -7$, $x_2 = -2$. S pomočjo $x_1 + x_2 = -n$ izračunamo, da je število n enako -5, -3, 7 ali 9.

II/2. Število, katerega vsota števk je 1, je potenca števila 10 in ni večkratnik 7. Zato ne obstaja tak večkratnik števila 7, da bi bila vsota števk enaka 1. Poskusimo najti tak večkratnik, da bo vsota števk enaka 2. To število mora imeti dve števki enaki 1. Preverimo po vrsti nekaj takih naravnih števil. Števila 11, 101 in 110 niso deljiva s 7, 1001 pa je.

Naravno število oblike $10011001\ldots1001$, v katerem smo k-krat zapored zapisali število 1001, ima vsoto števk enako $2k$ in je očitno večkratnik 1001, torej je večkratnik števila 7. Zato za vsa soda naravna števil n obstaja število m, ki je večkratnik 7, da je vsota števk števila m enaka n.

Vsoto števk enako 3 ima število 21, število oblike $2110011001\ldots1001$, kjer smo za 21 zapisali k-krat zapored število 1001, ima vsoto števk enako $3 + 2k$ in je večkratnik števila 7. Zato za vsa liha naravna števila n večja od 1 obstaja število m, ki je večkratnik 7, da je vsota števk števila m enaka n.

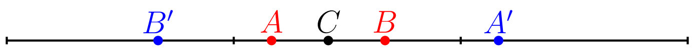
Pokazali smo, da za natanko vsa naravna števila n razen 1 obstaja večkratnik števila 7, katerega vsota števk je n.



II/3. Ker je trikotnik ABC ostrokotni, ležita točki I in O na istem bregu premice ED. Iz pogoja, da ležijo točke D, E, I in O na isti krožnici, zato sledi $\angle DOE = \angle DIE$. Označimo kote v trikotniku z α, β in γ in z njimi izrazimo kota $\angle DOE$ in $\angle DIE$.

Velja $\angle DOE = \angle EOC + \angle COD$. Ker je središčni kot dvakrat večji od obodnega, je $\angle COE = 2\angle CBE$. Premica EB simetrala kota CBA, zato je $\angle CBE = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\beta}{2}$. Torej je $\angle COE = 2\angle CBE = \beta$. Podobno je $\angle DOC = 2\angle DAC = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$ in tako $\angle DOE = \alpha + \beta$.

Velja $\angle DIE = \angle AIB = \pi - \angle BAI - \angle IBA = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Iz enakosti $\angle DOE = \angle DIE$ sledi $\pi = \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ oziroma $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$. Torej je $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.



II/4. Daljico razdelimo na tri enako dolge dele. Na srednjem delu gotovo obstajata dve točki enake barve. Denimo, da sta ti točki rdeči in ju označimo z A in B. Naj bo A' slika točke A pri zrcaljenju čez točko B in B' slika točke B pri zrcaljenju čez točko A. Če je ena izmed točk A' in B' rdeča, smo željene tri točke našli. Predpostavimo torej, da sta obe točki A' in B' modri. Naj bo C razpolovišče daljice AB. Torej je C tudi razpolovišče daljice $A'B'$. Če je C rdeča, so A, B in C iskane točke, sicer pa so A', B' in C iskane točke.

III/1. Naj bo $p(x) = b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$ in $q(x) = b_2x^3 + c_2x^2 + d_2x + e_2$. Zapišimo $a = \frac{r}{s}$ kot okrajšan ulomek, kjer sta r in s celi števili in je $s > 0$. Označimo $p(a) = m$ in $q(a) = n$. Tedaj velja

$$b_1 \cdot \frac{r^3}{s^3} + c_1 \cdot \frac{r^2}{s^2} + d_1 \cdot \frac{r}{s} + e_1 = m, \quad b_2 \cdot \frac{r^3}{s^3} + c_2 \cdot \frac{r^2}{s^2} + d_2 \cdot \frac{r}{s} + e_2 = n.$$

Če obe enačbi pomnožimo s s^3, dobimo

$$b_1r^3 + c_1r^2s + d_1rs^2 + e_1s^3 = ms^3, \quad b_2r^3 + c_2r^2s + d_2rs^2 + e_2s^3 = ns^3.$$

Od tod sledi, da s deli $b_1 r^3$ in $b_2 r^3$. Ker je število s tuje r, mora s deliti b_1 in b_2. Ker pa sta po predpostavki b_1 in b_2 tuji števili, je zato $s = 1$. Torej je $a = r$, kar je celo število.

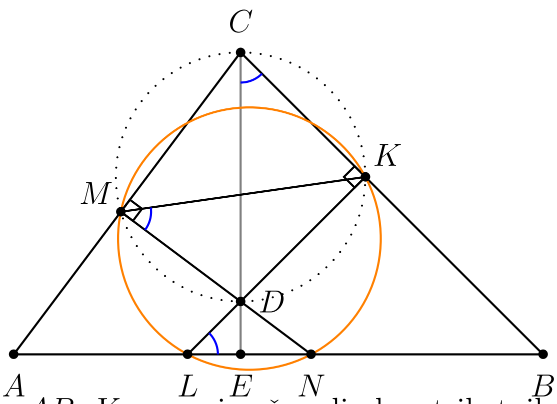
III/2. Ker so vsa števila, katerih vsota števk je 1, potence števila 10, ki niso deljiva z 13, ne obstaja večkratnik števila 13, ki bi imel vsoto števk enako 1.

Poskusimo najti število m, deljivo s 13, katerega vsota števk je 2. Očitno bo imelo število m dve števki enaki 1, ostale pa 0. Preverimo po vrsti prvih nekaj takih naravnih števil. Očitno 11, 101 in 110 niso večkratniki 13, 1001 pa je.

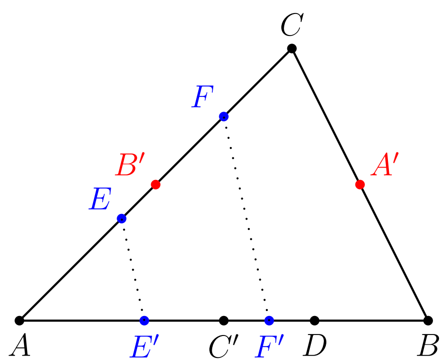
Podobno poskusimo najti število m z vsoto števk 3. Naj bo $m = 10^a + 10^b + 10^c$, kjer je $a \geq b \geq c$. Ostanek števila 10^2 pri deljenju s 13 je 9 in ostanek 10^3 pri deljenju s 13 je 12, ostanek 10^4 je 3, ostanek 10^5 je 4 in ostanek 10^6 je 1. Vidimo, da je vsota ostankov, ki jih dajo števila 10^2, 10^4 in 10^6, enaka 13, torej 13 deli 101010.

Število oblike $10011001\ldots1001$, kjer smo k-krat zapisali 1001, je večkratnik 1001 in zato tudi 13, ter ima vsoto števk $2k$. Število oblike $10101010011001\ldots1001$, kjer smo najprej zapisali 101010 in nato k-krat 1001, je prav tako večkratnik 13 in ima vsoto števk enako $3 + 2k$.

Pokazali smo, da za natanko vsa naravna števila n razen 1 obstaja večkratnik števila 13, katerega vsota števk je enaka n.



III/3. Označimo kot $\angle ABC$ z β. Ker je premica KL vzporedna z višino na stranico BC, je torej pravokotna na BC. Zato je trikotnik KLB pravokotni in velja $\angle KLB = \frac{\pi}{2} - \beta$. Torej je $\angle KLN = \frac{\pi}{2} - \beta$. Ker je štirikotnik $KLMN$ tetiven, velja $\angle KMN = \angle KLN = \frac{\pi}{2} - \beta$.
V štirikotniku $KDMC$ velja $\angle DKC + \angle DMC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato je tetiven tudi štirikotnik $KDMC$. Torej je $\angle DCK = \angle DMK = \angle NMK = \frac{\pi}{2} - \beta$.
Označimo z E točko, kjer premica CD seka stranico AB. Ker smo izračunali, da v trikotniku CEB velja $\angle ECB = \frac{\pi}{2} - \beta$ ter je $\angle EBC = \beta$, velja $\angle BEC = \frac{\pi}{2}$. Torej je premica skozi točki C in D pravokotna na stranico AB, zato na njej leži tudi točka H. Točke C, D in H zato ležijo na isti premici.



III/4. Naj bodo A, B in C oglišča danega trikotnika ter A', B' in C' razpolovišča stranic BC, CA in AB. Vsaj dve izmed točk A', B' in C' sta iste barve. Predpostavimo lahko, da sta to točki A' in B' ter da sta rdeče barve. Daljica $A'B'$ je vzporedna stranici AB. Če na stranici AB obstajata dve rdeči točki, smo našli iskani trapez. Sicer obstaja največ ena rdeča točka. Če taka točka obstaja in je različna od A in B, jo označimo z D. V nasprotnem primeru naj bo D neka od A in B različna točka na stranici AB. Torej so vse točke na daljici AB, razen morda točke A, B in D, modre barve.

Denimo, da na stranici AC obstajata dve med seboj in od A različni točki modre barve. Označimo ju E in F tako, da je E bliže A. Naj bo F' od A različna točka modre barve na daljici AD. Naj bo E' presečišče daljice AD in vzporednice k premici FF' skozi točko E. Tedaj je $EE'F'F$ iskani trapez.

Na enak način sklepamo, da obstaja iskani trapez ali pa na stranici BC obstaja največ ena od B različna točka modre barve. V tem primeru sta obe stranici AC in BC skoraj celi rdeče barve in tako zlahka najdemo iskani trapez, ki ima za oglišča presečišča dveh vzporednih premic s stranicama AC in BC. Tako smo pokazali, da iskani trapez vedno obstaja.

IV/1. Števili a_1 in a_2 sta celi. Ker je $a_1 = \frac{1}{\cos x}$, $a_2 = \frac{1}{\cos(2x)}$ in velja $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$, sledi $a_2 = \frac{1}{2\cos^2 x - 1} = \frac{a_1^2}{2-a_1^2}$. Ker je a_2 celo število, je $2 - a_1^2$ delitelj a_1^2. Zato $2 - a_1^2$ deli $2 - a_1^2$ in a_1^2, torej deli tudi njuno vsoto, ki je 2. Tako je $2 - a_1^2$ eno izmed števil -2, -1, 1 oziroma 2.

V prvem primeru dobimo $a_1^2 = 4$, v drugem $a_1^2 = 3$, v tretjem $a_1^2 = 1$ in v zadnjem $a_1^2 = 0$. Ker je a_1 celo in neničelno število, so možnosti le $a_1 = -2$, $a_1 = 2$, $a_1 = -1$ in $a_1 = 1$. Od tod sledi, da je število x lahko enako le 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ ali $\frac{5\pi}{3}$.

Če je $x = 0$, je $a_n = 1$ za vsak n. Če je $x = \pi$, dobimo zaporedje $-1, 1, -1, 1, \ldots$. V ostalih štirih primerih opazimo, da je $a_{n+6} = a_n$, kajti za vsako celo število a velja

$$\cos\left(\frac{(n+6)\cdot a\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\cdot a\pi}{3} + 2a\pi\right) = \cos\left(\frac{n\cdot a\pi}{3}\right).$$

Zato je dovolj preveriti, da so prvih šest členov zaporedja cela števila. V primerih $x = \frac{\pi}{3}$ in $\frac{5\pi}{3}$ dobimo $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$. Če je $x = \frac{2\pi}{3}$ ali $x = \frac{4\pi}{3}$, pa je prvih šest členov zaporedja enakih $-2, -2, 1, -2, -2, 1$.

Rešitve naloge so realna števila 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ in $\frac{5\pi}{3}$.

IV/2. Označimo vsoto števk naravnega števila m z $S(m)$. Velja $S(11) = 2$. Opazimo, da ima prvih nekaj večkratnikov sodo vsoto števk. Prvi večkratnik, ki ima liho vsoto števk je $209 = 19\cdot 11$, vsota števk je 11. S pomočjo teh dveh primerov lahko konstruiramo večkratnike z vsoto števk n za skoraj vsa naravna števila n. Število oblike $11\ldots 11$, kjer smo 11 zapisali k-krat zapored, je deljivo z 11 in ima vsoto števk enako $2k$. Torej za vsako sodo število n obstaja večkratnik 11, ki ima vsoto števk enako n.

Vsoto števk 11 ima število 209. Število oblike $20911\ldots 11$, kjer 209 sledi k-krat zapisano 11, je deljivo z 11 in ima vsoto števk enako $11 + 2k$. Zato za vsako liho število n, ki je večje ali enako 11, obstaja večkratnik 11 z vsoto števk n.

Konstruirali smo večkratnike za vsa naravna števila, razen 1, 3, 5, 7 in 9. Pokažimo, da večkratniki z vsoto števk 1, 3, 5, 7 ali 9 ne obstajajo.

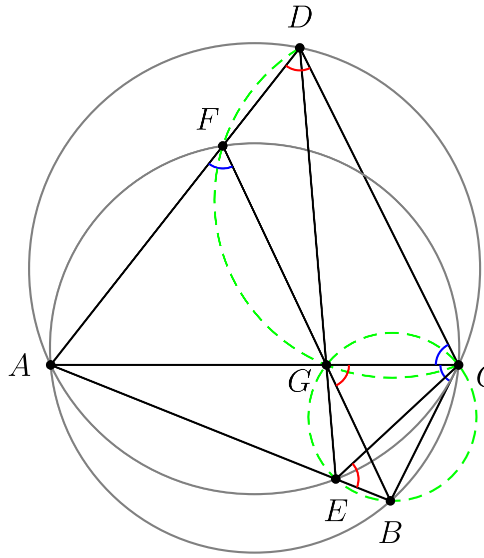
Naj bo m večkratnik števila 11. Denimo, da je $S(m) \leq 9$. Označimo z L vsoto števk števila m na lihih mestih, z D pa vsoto števk na sodih mestih. Ker je $S(m) = L + D$, sledi $L, D \leq 9$. Po kriteriju za deljivost z 11 sledi, da je $L - D$ deljivo z 11. Hkrati pa je $-9 \leq -D \leq L - D \leq L \leq 9$, torej mora biti $L - D = 0$ oziroma $L = D$. Tedaj je $S(m) = L + D = 2D$, torej sodo število, s čimer smo pokazali, da večkratnik števila 11 ne more imeti vsote števk enake 1, 3, 5, 7 in 9.

Večkratnik števila 11, ki ima vsoto števk enako n, obstaja za vsa vsa naravna števila n razen 1, 3, 5, 7 in 9.

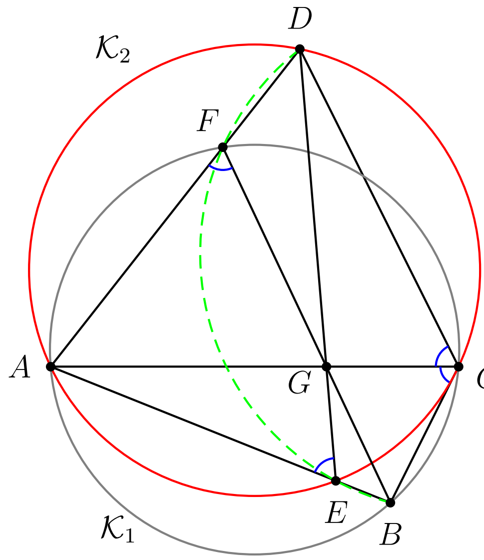
Opomba Navedimo kriterij za deljivost z 11. Naravno število $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0}$ je deljivo z 11 natanko tedaj, kadar je število $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ deljivo z 11. Res, razlika teh dveh števil je

$$a_n \cdot (10^n - (-1)^n) + \ldots + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10 + 1) + a_0(1 - 1)$$

in to število je deljivo z 11, saj so z 11 deljiva števila oblike $10^{2k+1}+1$ in $10^{2k}-1$.



IV/3. Naj bo G presečišče daljic AC in BF. Točke A, B, C in F ležijo na isti krožnici, zato je $\angle AFB = \angle ACB$. Diagonala AC razpolavlja kot $\angle DCB$, zato je $\angle ACB = \angle DCA$. Torej velja $\angle AFG = \angle DCA$, od koder sledi $\angle GFD + \angle DCG = \pi$. Zato točke C, D, F in G ležijo na isti krožnici.
Točke A, E, C in D ležijo na isti krožnici, zato je $\angle AEC = \pi - \angle ADC$. Od tod sledi $\angle CEB = \pi - \angle AEC = \angle ADC$. Ker je štirikotnik $CDFG$ tetiven, velja $\angle FGC = \pi - \angle FDC$ in zato $\angle FGA = \angle FDC$. Torej velja $\angle BGC = \angle FGA = \angle FDC$.
Pokazali smo $\angle CEB = \angle ADC$ in $\angle BGC = \angle ADC$, torej $\angle CEB = \angle BGC$. Od tod sledi, da je štirikotnik $BCGE$ tetiven. Zato je $\angle BEG = \pi - \angle ACB$ oziroma $\angle GEA = \angle ACB$. Hkrati je $\angle ACB = \angle ACD$, saj je AC simetrala kota $\angle DCB$, iz tetivnosti štirikotnika $AECD$ pa sledi $\angle ACD = \angle AED$. Dobili smo torej $\angle GEA = \angle DEA$, od koder sledi, da so točke E, G in D kolinearne. To ravno pomeni, da se daljice AC, BF in DE sekajo v eni točki.



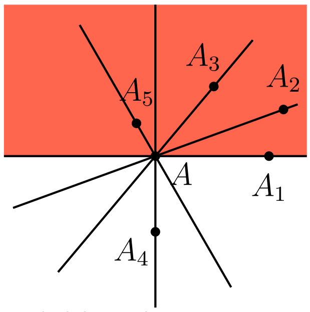
Opomba. Nalogo je možno rešiti s pomočjo potenčnega središča treh krožnic. Označimo s $\mathcal{K}_1$ trikotniku ABC očrtano krožnico, trikotniku ACD očrtano krožnico pa s $\mathcal{K}_2$. Ker so točke A, B, C in F konciklične, velja $\angle AFB = \angle ACB$. Diagonala AC je simetrala kota $\angle DCB$, zato je $\angle ACB = \angle DCA$. Ker točke A, E, C in D ležijo na isti krožnici, je $\angle DCA = \angle DEA$. Dobili smo $\angle AFB = \angle DEA$, od koder sledi

$$\angle BFD = \pi - \angle AFB = \pi - \angle DEA = \angle BED.$$

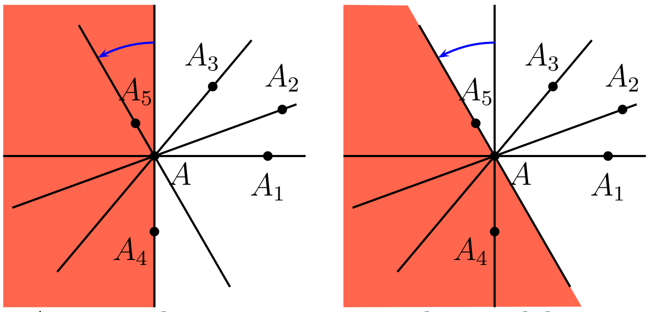
To pomeni, da so točke D, F, E in B konciklične. Krožnico skozi te točke označimo s $\mathcal{K}_3$.
Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in C, krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_3$ se sekata v točkah B in F, krožnici $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$ pa se sekata v točkah D in E. Torej je AC potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, BF potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_3$ ter DE je potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$. Ker se potenčne premice treh krožnic sekajo v eni točki (potenčnem središču), sledi, da se premice AC, BF in DE sekajo v isti točki.

IV/4. Pokazali bomo, da je najmanj $n+1$ premic, ki potekajo skozi dve izmed danih točk, ločnic. Najprej podajmo primer, v katerem je ločnic točno $n+1$. Naj bodo točke oglišča pravilnega $(2n+2)$-kotnika. Označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2}$. Za vsak $1 \leq i \leq n+1$ je očitno premica A_iA_{i+n+1} ločnica. Nobena druga premica ni ločnica, zato je ločnic natanko $n+1$.

Pokažimo še, da vedno obstaja vsaj $n+1$ ločnic ne glede na položaj točk. Pokazali bomo, da poteka skozi vsako izmed danih točk vsaj ena ločnica. Naj bo A ena izmed točk in $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ preostale točke. Opazujmo premice $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$. Obarvajmo del ravnine, ki leži na enem bregu premice AA_1, rdeče. Naj bo r_1 število točk v rdečem delu (premica AA_1 ni v rdečem delu). Rdeči del ravnine bomo vrteli okoli točke A v pozitivni smeri. V vsakem koraku zavrtimo tako, da slika rdečega dela meji na naslednjo možno premico izmed $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$. Predpostavimo lahko, da si premice sledijo po vrsti $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$ in nato ponovno AA_1. Naj bo r_{i+1} število točk v rdečem delu ravnine po tem, ko smo rdeči del zavrteli i-krat.



Denimo, da smo v nekem koraku imeli premico AA_i in pripadajoči rdeči del ravnine ter smo nato rdeči del zavrteli tako, da je mejil na premico AA_{i+1}. Ločimo štiri primere glede na položaj točk A_i in A_{i+1}. Če je točka A_{i+1} ležala v prvotnem rdečem delu in A_i leži v zavrtenem rdečem delu, velja $r_i = r_{i+1}$. Če je točka A_{i+1} ležala v prvotnem rdečem delu, točka A_i pa ne leži v zavrtenem rdečem delu, se je število točk v rdečem delu zmanjšalo za 1, torej $r_{i+1} = r_i - 1$. Denimo, da A_{i+1} ni ležala v prvotnem rdečem delu. Če A_i ne leži v novem rdečem delu, ponovno velja $r_{i+1} = r_i$, sicer pa je $r_{i+1} = r_i + 1$.



V vsakem koraku se število rdečih točk spremeni največ za 1. Vsa števila so cela. Na začetku je bilo r_1 točk v rdečem delu, po $2n+1$ vrtenjih pa pridemo do situacije, ko rdeči del ponovno meji na premico AA_1, vendar je na nasprotnem delu premice AA_1 kot je bil na začetku. Zato je število točk v rdečem delu na koncu enako $2n - r_1$. Če je $r_1 = n$, je premica AA_1 ločnica. Sicer je eno izmed števil r_1 oziroma $2n - r_1$ večje od n, drugo pa manjše. Pri vrtenju rdečega dela se števila r_i spreminjajo za 1, kar pomeni, da obstaja korak, v katerem je $r_i = n$. Pripadajoča premica AA_i je tedaj ločnica.

Pokazali smo, da skozi vsako točko poteka ločnica. Ker je točk $2n+2$, tako dobimo $2n+2$ premic, pri čemer smo vsako premico šteli dvakrat (po enkrat za vsako točko, ki leži na njej). Tako je ločnic vedno vsaj $\frac{2n+2}{2} = n + 1$.