**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

49. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Velenje, 16. april 2005

Naloge za 1. letnik

1. Za realna števila x, y in z velja $xyz = 1$. Izračunaj vrednost izraza
$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera ima število $p^2 + 11$ manj kot 11 pozitivnih deliteljev.

3. V trikotniku ABC, katerega središče včrtane krožnice je I, velja
$$|CA| + |AI| = |BC|.$$
Poišči razmerje med velikostima kotov $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$.

4. Aleš, Brane in Cvetka so pripravili veliko kartončkov, na katere so zapisali po eno izmed števil 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 8. Maja, ki se jim je kasneje pridružila, je vzela tri kartončke in vsakemu prilepila po enega na čelo. Aleš, Brane in Cvetka niso videli, katero število imajo na čelu, vsak izmed njih je videl le kartončka drugih dveh. Maja jim je povedala: "Na čelih nimate različnih števil, zmnožek vseh treh števil je popolni kvadrat." Aleš, Brane in Cvetka so nato vsak zase ugotavljali, katero število imajo na čelu. Ali so to lahko vsi trije ugotovili?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

49. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Velenje, 16. april 2005

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vsa realna števila x in y, za katera je

$$x^3 - y^3 = 7(x - y) \quad \text{in} \quad x^3 + y^3 = 5(x + y).$$

2. Za katera praštevila p in q je število $(p+1)^q$ popolni kvadrat?

3. Naj bo T poljubna točka znotraj kvadrata $ABCD$, točke A', B', C' in D' pa druga presečišča premic TA, TB, TC in TD z očrtano krožnico kvadrata $ABCD$. Dokaži, da je $|A'B'| \cdot |C'D'| = |A'D'| \cdot |B'C'|$.

4. Vaške obrekljivke si svoje čenče vsak dan izmenjujejo po telefonu, in sicer tako, da vsaki dve med seboj govorita natanko enkrat. Nekega dne je vsaka obrekljivka poklicala vsaj eno izmed ostalih. Dokaži, da obstajajo tri, za katere velja, da je prva poklicala drugo, druga tretjo in tretja prvo.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

49. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Velenje, 16. april 2005

Naloge za 3. letnik

1. Izračunaj vsoto $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 256]$.
   (Izraz $[x]$ pomeni največje celo število, ki ni večje od x.)

2. Poišči najmanjše praštevilo p, za katerega ima število p^3+2p^2+p natanko 42 pozitivnih deliteljev.

3. Dan je enakokrak trikotnik ABC z vrhom A. Naj bo D razpolovišče stranice AC in E pravokotna projekcija točke D na stranico BC. Označimo z F razpolovišče daljice DE. Dokaži, da se daljici BF in AE sekata pravokotno natanko tedaj, ko je trikotnik ABC enakostraničen.

4. Na nogometnem turnirju so sodelovale le ekipe iz Malega mesta in Velikega mesta. Iz Velikega mesta je bilo 9 ekip več kot iz Malega mesta. Vsaki ekipi sta se srečali natanko enkrat, pri čemer je zmagovalna ekipa dobila 1 točko, poražena 0 točk, neodločen izid pa ni bil možen. Ekipe iz Velikega mesta so osvojile 9 krat toliko točk kot ekipe iz Malega mesta. Določi največje možno število zmag najboljše ekipe iz Malega mesta.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

49. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Velenje, 16. april 2005

Naloge za 4. letnik

1. Naj bo $[x]$ največje celo število, ki ni večje od x, in naj bo $\{x\} = x - [x]$. Poišči vsa pozitivna realna števila x, za katera velja
$$20\{x\} + 0.5[x] = 2005.$$

2. Dano je geometrijsko zaporedje (a_n) s pozitivnimi členi. Označimo
$$S_n = \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_{n-1} + \log a_n.$$
Dokaži: če za nek $m \neq n$ velja $S_n = S_m$, je $S_{n+m} = 0$.

3. Tangenti iz točke P na krožnico k se krožnice dotikata v točkah A in B. Naj bo X poljubna točka na krajšem loku $\widehat{AB}$. Označimo s C pravokotno projekcijo točke P na premico AX in z D pravokotno projekcijo točke P na premico BX. Dokaži, da premica CD poteka skozi neko točko Y, ki je neodvisna od izbire točke X na loku $\widehat{AB}$.

4. Lukcu je bilo med uro matematike dolgčas, zato je najprej narisal krog in nato naokrog po obodu še n praznih polj, kjer je $n \geq 3$, ter vanje zapisal po 1 pozitivno število. Kasneje je ta števila pobrisal, v vsako polje pa zapisal kvadratni koren zmnožka dveh števil, ki sta prej ležali na temu polju sosednjih poljih. Pokaži, da obstaja polje, v katerem je zapisano število manjše ali enako tistemu, ki je bilo zapisano prej.

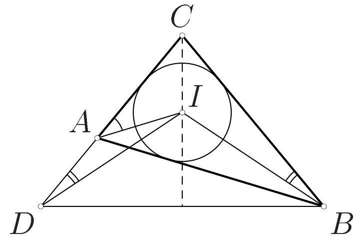
Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA

I/1. Računajmo: $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}=\frac{x+1}{xy+x+xyz}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}=\frac{x+1+x(y+1)}{x(yz+y+1)}+\frac{z+1}{zx+z+1}=\frac{xy+2x+1}{xy(z+1+xz)}+\frac{z+1}{z+1+zx}=\frac{xy+2x+1+zxy+xy}{xy(z+1+xz)}=\frac{2(xy+x^2yz+xyz)}{xy(z+1+xz)}=\frac{2xy(1+xz+z)}{xy(z+1+xz)}=2.$

I/2. Če je $p=2$, je $p^2+11=15=3\cdot 5$ in to število ima 4 delitelje (1, 3, 5 in 15). Če je $p=3$, je $p^2+11=17$ in ima 2 delitelja. Za $p>3$ je praštevilo p liho, zato da p^2 pri deljenju s 4 ostanek 1 in je število p^2+11 deljivo s 4. Praštevilo $p>3$ ni deljivo s 3, torej da število p^2 pri deljenju s 3 ostanek 1, zato je število p^2+11 deljivo tudi s 3. Tako je $p^2+11=2^2\cdot 3\cdot a$. Če je $p\geq 11$, je $p^2+11\geq 132$ in je $a>11$, zato so delitelji števila p^2+11 vsaj števila 1, 2, 3, 4, 6, 12, a, $2a$, $3a$, $4a$, $6a$ in $12a$, torej jih je vsaj 11 različnih (ker je $a>11$, je namreč lahko $a=12$). Posebej moramo izračunati še za $p=5$, ko dobimo $p^2+11=36=2^2\cdot 3^2$, ki ima 6 deliteljev, in za $p=7$, ko dobimo $p^2+11=60=2^2\cdot 3\cdot 5$, ki ima 12 deliteljev. Le za praštevila 2, 3 in 5 ima število p^2+11 manj kot 11 pozitivnih deliteljev.

I/3. Izberimo tako točko D, $D\notin AC$, na poltraku CA, da je $|AD|=|AI|$. Tedaj je DBC enakokrak trikotnik z vrhom C in ker I leži na simetrali kota $\sphericalangle DCB$, je $\sphericalangle IDC=\sphericalangle CBI$. Ker je ADI enakokrak trikotnik z vrhom A, je $\sphericalangle IAC=2\sphericalangle IDC$. Velja $\sphericalangle IAC=\frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBI=\frac{1}{2}\sphericalangle CBA$, zato je $\sphericalangle BAC=2\sphericalangle CBA$ oz. $\sphericalangle BAC:\sphericalangle CBA=1:2$.



I/4. Ker Aleš, Brane in Cvetka niso imeli različnih števil, sta bili vsaj dve števili enaki. Denimo, da so imeli števila x, x in y. Zmnožek $x\cdot x\cdot y=x^2y$ je popolni kvadrat, zato je tudi y popolni kvadrat. Med števili, ki so jih zapisali na kartončke, je bilo le število 4 popolni kvadrat, zato je $y=4$. Imamo dve možnosti: vsi trije so imeli na kartončku zapisano število 4 ali pa je eden imel število 4, druga dva pa neko drugo (a seveda isto) število.
V prvem primeru je vsak izmed njih videl, da imata druga dva zapisano število 4. Ker pa je vsak izmed njih sklepal, da lahko število 4 nastopi enkrat ali trikrat, je lahko ugotovil, da ima tudi sam zapisano število 4.
V drugem primeru je eden izmed njih videl, da imata druga dva zapisano isto, od 4 različno število, in je sklepal, da ima sam zapisano število 4. Druga dva sta videla na kartončkih zapisani različni števili, in sicer 4 in $x\neq 4$, zato sta sklepala, da imata na svojem čelu zapisano število x, pri čemer je x lahko 2, 3, 5, 6, 7 ali 8.
Vsi trije so lahko ugotovili, katero število imajo na čelu.

II/1. Enačbi preoblikujemo v $(x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y)$ in $(x+y)(x^2-xy+y^2)=5(x+y)$. Če je $x=y$, iz druge enačbe dobimo $2x^3=10x$, torej $x=0$ ali $x=\pm\sqrt{5}$, v nasprotnem primeru pa lahko prvo enačbo delimo z $x-y$ in dobimo

$$x^2+xy+y^2=7.$$

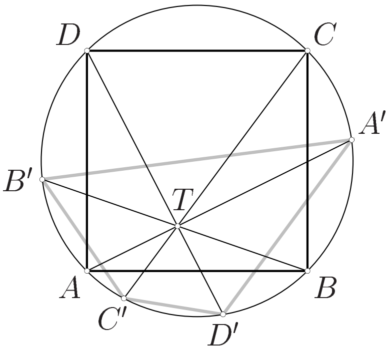
Če je $x=-y$, iz prve enačbe dobimo $2x^3=14x$, torej je $x=0$ ali $x=\pm\sqrt{7}$, v nasprotnem primeru pa lahko drugo enačbo delimo z $x+y$ in dobimo

$$x^2-xy+y^2=5.$$

Vsota tako dobljenih enačb nam da $x^2+y^2=6$, razlika pa $xy=1$, torej je $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=8$ in zato $x+y=\pm\sqrt{8}$. Upoštevamo, da je $x=\frac{1}{y}$ in dobimo kvadratno enačbo za y, se pravi $y^2\mp\sqrt{8}y+1=0$, od koder sledi $y=\pm(\sqrt{2}+1)$ ali $y=\pm(\sqrt{2}-1)$. V prvem primeru je potem $x = \pm(\sqrt{2}-1)$, v drugem pa $x = \pm(\sqrt{2}+1)$. Vse rešitve (x, y) so tako pari $(0{,}0)$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$, $(-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1)$, $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ in $(-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}-1)$.

II/2. Če je $q = 2$, je $(p+1)^2$ popolni kvadrat za vsako praštevilo p. Sicer pa je q liho, torej je $q = 2k+1$ za neko naravno število k. Tedaj je $(p+1)^q = (p+1)^{2k+1} = (p+1)(p+1)^{2k}$, zato mora biti število $(p+1)$ popolni kvadrat, torej $p+1 = n^2$, od koder sledi $p = (n-1)(n+1)$. Ker je p praštevilo, je to možno le, če je $n = 2$, tedaj je $p = 3$. Torej je 4^q popolni kvadrat za vsako praštevilo q.

II/3. Zaradi tetivnosti imamo mnogo enakih obodnih kotov in zato tudi mnogo parov podobnih trikotnikov: $\triangle ABT \sim \triangle B'A'T$, $\triangle BCT \sim \triangle C'B'T$, $\triangle CDT \sim \triangle D'C'T$ in $\triangle DAT \sim \triangle A'D'T$. Iz podobnosti sledi $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BT|}{|A'T|}$, $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BT|}{|C'T|}$, $\frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|DT|}{|C'T|}$ in $\frac{|DA|}{|D'A'|} = \frac{|DT|}{|A'T|}$, od koder izpeljemo



$$\frac{|AB|}{|A'B'|} \cdot \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|BT|}{|A'T|} \cdot \frac{|DT|}{|C'T|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \cdot \frac{|DA|}{|D'A'|}.$$

Ker je $|AB| = |CD| = |BC| = |DA|$, od tod sledi želena enakost.

II/4. Naj bo n obrekljivk. Potem je vsaka poklicala med 1 in $n-1$ ostalih, zato po Dirichletovem načelu obstajata dve, ki sta poklicali enako število obrekljivk, recimo k. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je prva poklicala drugo. Prva je poklicala še $k-1$ ostalih, druga pa k. Med preostalimi obrekljivkami obstaja tretja obrekljivka, ki jo je poklicala druga, prva pa ne. Tretja obrekljivka je zato poklicala prvo.

III/1. Vemo, da je

$$[\log_2 n] = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & 2 \le n < 2^2 \\ 2, & 2^2 \le n < 2^3 \\ \vdots & \\ 7, & 2^7 \le n < 2^8 \\ 8, & n = 2^8 = 256 \end{cases}$$

Zato je iskana vsota enaka

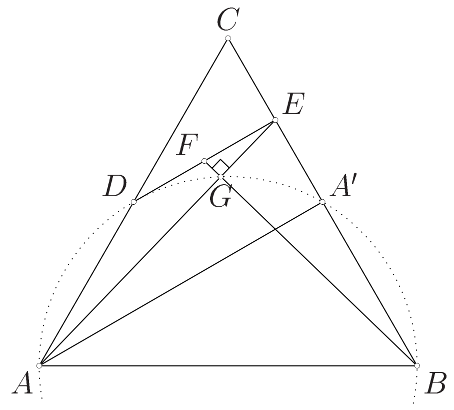
$$\begin{aligned} & 1 \cdot (2^2 - 2) + 2 \cdot (2^3 - 2^2) + \cdots + 7 \cdot (2^8 - 2^7) + 8 = \\ = \; & 8 + 7 \cdot 2^8 - (2 + 2^2 + \cdots + 2^6 + 2^7) = \\ = \; & 8 + 7 \cdot 256 - (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = \\ = \; & 8 + 1792 - 254 = \\ = \; & 1546 \end{aligned}$$

III/2. Najprej zapišemo $p^3 + 2p^2 + p = p(p+1)^2$. Ker p in $p+1$ nimata skupnih deliteljev (razen 1), je vsak delitelj števila $p(p+1)^2$ enak bodisi 1-krat neki delitelj števila $(p+1)^2$ bodisi p-krat ta delitelj. Ker ima število $p(p+1)^2$ natanko 42 deliteljev, ima $(p+1)^2$ natanko 21 deliteljev. Iz praštevilskega razcepa

$$(p+1)^2 = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}\,,$$

ugotovimo, da ima $(p+1)^2$ ravno $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1)$ deliteljev. To pomeni, da je $2\alpha_1+1=3$ in $2\alpha_2+1=7$ ter $\alpha_i=0$ za $i>2$. Velja torej $(p+1)^2=p_1^2\cdot p_2^6$ oziroma $p+1=p_1\cdot p_2^3$. Odtod je $p=p_1\cdot p_2^3-1$. Najmanj dobimo, če izberemo $p_1=3$ in $p_2=2$. Tedaj je namreč $p=3\cdot 8-1=23$, ki je res praštevilo.

III/3. Predpostavimo najprej, da se daljici AE in BF sekata pravokotno. Naj bo A' nožišče višine na stranico BC ter G presečišče daljic AE in BF. Potem je $AGA'B$ tetiven štirikotnik in zato je $\sphericalangle A'AE=\sphericalangle A'AG=\sphericalangle A'BG=\sphericalangle EBF$. Tako sta trikotnika BEF in $AA'E$ podobna. Ker je F razpolovišče daljice DE in E razpolovišče daljice $A'C$, sta tudi trikotnika BED in $AA'C$ podobna. Torej imamo $\sphericalangle GBD=\sphericalangle FBD=\sphericalangle EAC=\sphericalangle GAD$. Štirikotnik $ADGB$ je tetiven in je $\sphericalangle ADB=\sphericalangle AGB=\frac{\pi}{2}$. Ker je D razpolovišče stranice AC in $BD\perp AC$, je $|AB|=|CB|$ in trikotnik ABC je enakostraničen.



Obratno, če je trikotnik ABC enakostraničen, sta trikotnika $AA'C$ in BED podobna. Daljica AE je težiščnica prvega, daljica BF pa drugega. Torej sta tudi trikotnika BFE in AEA' podobna. Tako je $\sphericalangle A'BG=\sphericalangle EBF=\sphericalangle A'AE=\sphericalangle A'AG$, zato je $BA'GA$ tetiven štirikotnik in je $\sphericalangle BGA=\frac{\pi}{2}$.

III/4. Označimo število ekip iz Malega mesta z x. Potem je število ekip iz Velikega mesta enako $x+9$. Ekipe iz Malega mesta so med seboj igrale $\frac{x(x-1)}{2}$ tekem in so zato osvojile $\frac{x(x-1)}{2}+k$ točk, kjer je k število zmag, osvojenih nad ekipami iz Velikega mesta. Ekipe iz Velikega mesta so tako osvojile

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k$$

točk. Veljati mora

$$9(\frac{(x-1)x}{2}+k)=\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k,$$

torej $3x^2-22x+10k-36=0$. Ker je x naravno število, mora biti diskriminanta $4(229-30k)$ popolni kvadrat. Potem je $k\leq 7$ in zato je $k=2$ ali $k=6$. V prvem primeru je $x=8$ in najboljša ekipa iz Malega mesta je lahko osvojila $7+2=9$ točk. V drugem primeru pa je $x=6$ in najboljša ekipa iz Malega mesta lahko osvojila $5+6=11$ točk.

IV/1. Pomnožimo enačbo z 2. Tedaj jo lahko zapišemo kot $40\{x\}=4010-[x]=a$, kjer je a neko celo število. Zato je $\{x\}=\frac{a}{40}$ za $0\leq a\leq 39$. Velja $[x]=4010-a$, zato imamo 40 rešitev oblike $x=4010-a+\frac{a}{40}$, kjer je $a=0,1,\ldots,39$.

IV/2. Člene geometrijskega zaporedja lahko zapišemo v obliki $a_n=a_1q^{n-1}$. Ker so členi pozitivni, je $a_1>0$ in $q>0$. Potem je

$$S_n=\log a_1+\log a_1q+\ldots+\log a_1q^{n-1}=\log a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Če je $S_n=S_m$, sledi

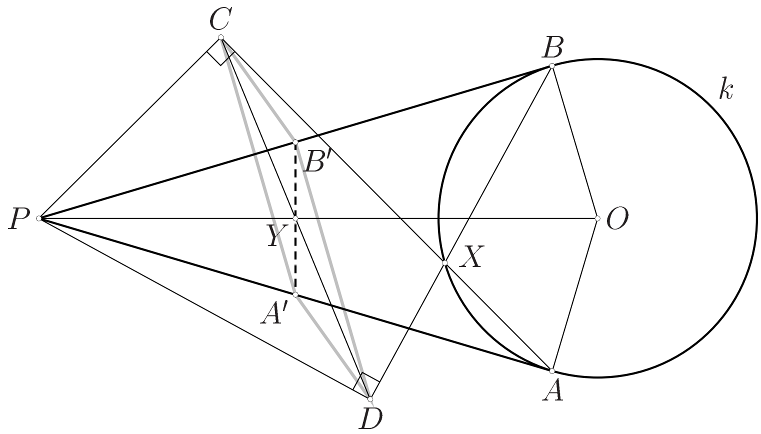
$$a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=a_1^mq^{\frac{m(m-1)}{2}},$$

torej dobimo

$$a_1^{n-m}=q^{\frac{(m-n)(m+n-1)}{2}}$$

in ker je $m \neq n$ dobimo $a_1 = q^{\frac{1-m-n}{2}}$. Sledi

$$S_{n+m} = \log a_1^{m+n} q^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} = \log q^{\frac{(m+n)(1-m-n)}{2}} q^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} = \log q^0 = 0.$$



IV/3. Daj bo O središče krožnice k, A' razpolovišče daljice PA, B' razpolovišče daljice PB in Y razpolovišče $A'B'$. Označimo še $\sphericalangle APB = \varphi$ in $\sphericalangle XAP = \alpha$. Potem je $\sphericalangle OAX = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\sphericalangle BOA = \pi - \varphi$, $\sphericalangle AXB = \frac{\pi+\varphi}{2}$, $\sphericalangle XBO = \alpha + \frac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle PBX = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \alpha$, $\sphericalangle AA'C = \pi - 2\alpha$ in $\sphericalangle DB'B = \varphi + 2\alpha$. Torej premici CA' in DB' oklepata s premico AP kot 2α in ker leži točka C na istem bregu premice AP kot točka B, točka D pa na istem bregu premice BP kot točka A, sta premici CA' in DB' vzporedni, točki C in D pa ležita na različnih bregovih premice $A'B'$ (razen v primeru $CD||A'B'$, kjer pa Y očitno leži na CD). Ker pa po Talesovem izreku točka C leži na krožnici s središčem A' in polmerom $|A'A|$, točka D pa na krožnici s središčem B' in polmerom $|B'B|$, je $|B'D| = |B'B| = |A'A| = |A'C|$, zato je $CB'DA'$ paralelogram. Ker se diagonali paralelograma razpolavljata, premica CD poteka skozi razpolovišče diagonale $A'B'$, torej skozi točko Y, ki pa je neodvisna od izbire točke X.

IV/4. **1. način** Označimo z $a_1, a_2, \ldots, a_n$ števila, ki so v poljih ležala na začetku, z $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pa tista, ki ležijo na koncu. Po neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino velja $a_1+a_2+\cdots+a_n = (a_1+a_3)/2+(a_2+a_4)/2+\cdots+(a_n+a_2)/2 \geq \sqrt{a_1a_3}+\sqrt{a_2a_4}+\cdots+\sqrt{a_na_2} = b_2 + b_3 + \cdots + b_n + b_1$. Ker se je vsota vseh števil v poljih zmanjšala, mora obstajati število k, za katerega velja $a_k \geq b_k$.

2. način Trditev bomo dokazali s protislovjem. Števila na začetku naj bodo a_1, a_2, ..., a_n, na koncu pa $\sqrt{a_1a_3}$, $\sqrt{a_2a_4}$, ..., $\sqrt{a_na_2}$. Privzemimo torej, da je $a_1 < \sqrt{a_1a_3}$, $a_2 < \sqrt{a_2a_4}$, ..., $a_n < \sqrt{a_na_2}$. Torej je tudi $a_1a_2\cdots a_n < \sqrt{a_1a_3} \cdot \sqrt{a_2a_4} \cdots \sqrt{a_na_2} = \sqrt{a_1^2a_2^2\cdots a_n^2}$, kar pa seveda ne drži.