**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

48. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA SEDMI RAZRED

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Zapiši vsa petmestna števila oblike $72xy1$ (x in y sta različni števki), ki so deljiva z 9.

2. V deželi Nije imajo kovance samo za 1, 3, 19 in 31 denarnih enot. Peter želi plačati račun v višini 1239 denarnih enot. Pri plačevanju mora uporabiti kovance vseh štirih vrednosti. Izračunaj največje in najmanjše možno število kovancev, ki bi jih moral za plačilo odšteti Peter.

3. Dan je pravokotni trikotnik ABC s hipotenuzo AB. Točka O naj bo središče temu trikotniku očrtane krožnice. Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka krožnico v točkah A in D. Kot $\sphericalangle BAC$ je velik $37°$. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle BOD$.

4. Cena izdelka je bila 48 EUR. Ko se je cena znižala, se je število prodanih izdelkov povečalo. Število prodanih izdelkov se je povečalo za polovico, izkupiček pa se je povečal za četrtino. Kolikšna je znižana cena izdelka?

5. Načrtaj trikotnika z danimi podatki in potek načrtovanja kratko opiši. Kote načrtaj s šestilom in ravnilom.

a) Enakostranični trikotnik, katerega polmer včrtane krožnice je dolg 2 cm.

b) Pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri C, katerega stranica BC je dolga 8 cm, polmer včrtane krožnice pa 2 cm.

dMFA

48. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA OSMI RAZRED

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Poenostavi izraz:

$$\left(\sqrt{3}^2+\sqrt{392}\cdot\frac{\sqrt{13^2+12^2}\cdot(2^2+2^1-2^0)\cdot\sqrt{1\frac{9}{16}}}{-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{\frac{1}{\sqrt{256}}}$$

2. Če točko, ki predstavlja število a_1 na številski premici, prezrcalimo preko točke, ki predstavlja nasprotno vrednost števila a_1, dobimo točko, ki predstavlja število a_2. Nato to točko prezrcalimo preko točke, ki predstavlja nasprotno vrednost števila a_2, in dobimo a_3. Postopek ponavljamo in ugotovimo, da je $a_5 = -97\frac{1}{5}$. Koliko je a_1?

3. Tekmovalci so se z avtobusom peljali na tekmo. Usedli so se na sedeže, oštevilčene z zaporednimi naravnimi števili z vsoto 54. Koliko tekmovalcev se je peljalo na tekmo, če je le eden sedel na sedežu, označenim s praštevilom, in sta bila tekmovalca vsaj dva? Ali je rešitev ena sama?

4. Kot $\sphericalangle BAC$ trikotnika ABC je velik $70°$. Na stranici AB leži točka D, na stranici AC pa točka E tako, da je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BEC$. Kot $\sphericalangle DCB$ je velik trikrat toliko kot $\sphericalangle EBC$. Daljici BE in DC se sekata v točki M tako, da je kot $\sphericalangle DMB = 84°$. Izračunaj velikosti kotov trikotnika ABC.

5. Aleš, Bojan, Cene in Drago so skupaj kupili gozd. Aleš je plačal $50\ \%$ kupnine. Znesek, ki ga je plačal Bojan, je bil enak tretjini zneska, ki so ga plačali preostali 3 skupaj. Znesek, ki ga je plačal Cene, je bil enak $25\ \%$ zneska, ki so ga plačali preostali 3 skupaj. Drago je plačal 2000 EUR. Koliko je stal gozd?

48. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

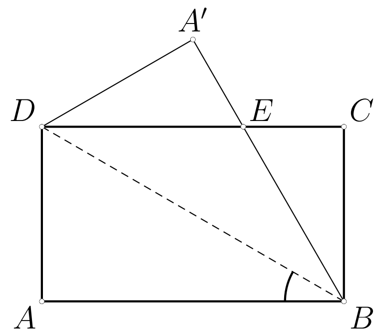
N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Izračunaj vrednost izraza:

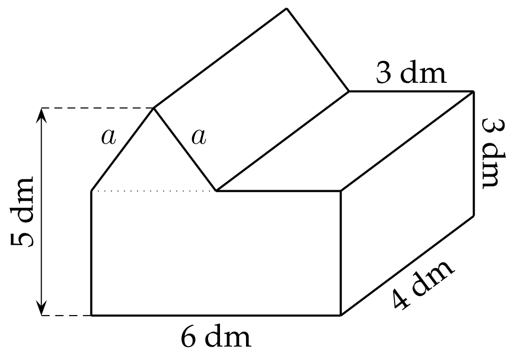
$$\left(\sqrt{4375}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{(169-144)\cdot 3}\cdot(5-2\sqrt{6})}{-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)}\cdot\sqrt{21}+2^1+2^0\right):\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$$

2. Če prepognemo pravokotnik $ABCD$ vzdolž diagonale DB, nastane trikotnik BCE (glej sliko), katerega ploščina je enaka $\frac{1}{6}$ ploščine pravokotnika $ABCD$. Stranica AB je dolga 8 cm. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle DBA$ in dolžino diagonale pravokotnika $ABCD$. Rezultat naj bo natančen.



3. Na številski premici ležita točki $A(-2)$ in $B(15)$. Kakšno koordinato bi lahko imela točka M, da bi veljalo: $|AM|:|MB|=3:14$? Zapiši vse možnosti.

4. Iz lesene kocke s stranico 6 dm izrežemo zagozdo oblike kot na sliki. Kolikšen je delež odpadka? Koliko barve porabimo, da zagozdo pobarvamo enkrat z zaščitnim premazom, če z 0.1 litra barve pobarvamo 1 m^2 površine?



5. Vrtnarja Jaka in Bine sta v sadovnjaku vsak v svoji vrsti sadila enake sadike dreves. Vsak od njiju je za zasaditev enega drevesa porabil 10 minut. Jaka je z delom začel prej. Ob 12.00 je Jaka imel posajenih 36 dreves, kar je trikrat toliko, kot jih je imel posajenih Bine v trenutku, ko je imel Jaka posajenih toliko dreves kot Bine ob 12.00. Koliko dreves je imel Bine posajenih ob 12.00 in ob kateri uri je Bine začel s sajenjem?

Rešitve za 7. razred

1. Če je število deljivo z 9, je vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota števk števila $72xy1$ je $10 + x + y$, kar pomeni, da mora biti $x + y = 8$ ali $x + y = 17$. Ker sta x in y različni števki, dobimo v prvem primeru števila: 72081, 72171, 72261, 72351, 72531, 72621, 72711 in 72801, v drugem pa števili: 72891 in 72981.

Zapis ali uporaba kriterija za deljivost z 9 .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $x + y = 8$ .... **2 točki**
Zapis vseh osmih možnosti (72081**,** 72171**,** 72261**,** 72351**,** 72531**,** 72621**,** 72711 **in** 72801**).** .... **4 točke***
Ugotovitev, da je $x + y = 17$ .... **2 točki**
Zapisani preostali števili 72891 **in** 72981 .... **1 točka**

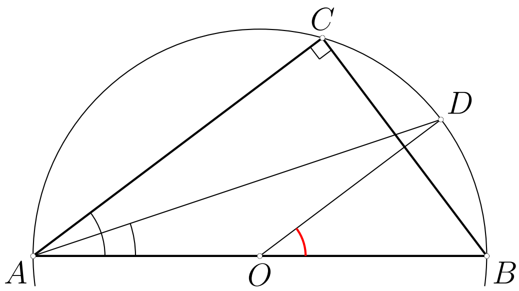
***Opomba: Za vsaki dve števili dobi 1 točko, za napačno možnost se točka odšteje.**

2. Največ kovancev bo Peter potreboval, če bo plačal s po enim z vrednostjo 31, 19 in 3 enot, preostanek pa s kovanci z vrednostjo ene denarne enote. Teh bo potem: $1239 - 31 - 19 - 3 = 1186$. V tem primeru bo Peter potreboval 1189 kovancev.

Najmanj kovancev potrebuje v primeru, če bo vzel največ tistih z največjo nominalno vrednostjo. Ker mora porabiti po vsaj en kovanec vsake vrednosti, bo za plačilo $31 + 19 + 3 + 1 = 54$ enot porabil 4 kovance. Torej mora preostalih $1239 - 54 = 1185$ enot plačati s čim manj kovanci. Ker je $1185 = 38 \cdot 31 + 7$, potrebuje več kot 38 kovancev. Pokažimo, da 39 kovancev zadošča. Če uporabi 38 kovancev po 31 enot, preostalih 7 enot ne more plačati z enim kovancem. Če pa uporabi 37 kovancev po 31 enot, lahko preostalih $1185 - 37 \cdot 31 = 38$ enot plača z dvema kovancema po 19 enot. Torej mora uporabiti vsaj $4 + 39 = 43$ kovancev,

Ugotovitev, da je potrebno imeti kar največ kovancev za 1 **enoto** .... **2 točki**
Izračun največjega števila kovancev 1189 .... **2 točki**
Zapis števila 1239 **z maksimalnim številom kovancev za** 31 **enot:** $1239 = 39 \cdot 31 + 1 \cdot 19 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$ .... **2 točki**
Ugotovitev, da to ni najmanjše število in da lahko zapišemo $1239 = 38 \cdot 31 + 3 \cdot 19 + 3 + 1$ .... **3 točke**
Najmanjše število kovancev je 43 .... **1 točka**

3. Ker O leži na razpolovišču hipotenuze, je trikotnik AOD enakokrak z dvema polmeroma za kraka. Kot ob osnovnici trikotnika OAD meri polovico kota BAC, torej $18.5°$. Kot ob vrhu O pa potem $180° - 2 \cdot 18.5° = 143°$. Iskani kot je njegov sokot in meri $37°$.



Skica z označenim središčem očrtane krožnice (O), narisano simetralo in presečiščem simetrale in krožnice (D). .... 2 točki
Ugotovitev, da je trikotnik AOD enakokrak .... 2 točki
Izračun kota ob osnovnici $18.5°$ .... 2 točki
Izračun kota ob vrhu $143°$ .... 2 točki
Izračun iskanega kota $\sphericalangle DOB = 37°$ .... 2 točki

Opomba: Tekmovalec lahko zapiše vse vmesne kote z oznakami (npr. α, $180° - \alpha$) in eksplicitno zapiše samo velikost iskanega kota in dobi vse točke. Rešitev, dobljena z merjenjem, je neveljavna in dobi tekmovalec največ 2 točki za skico.

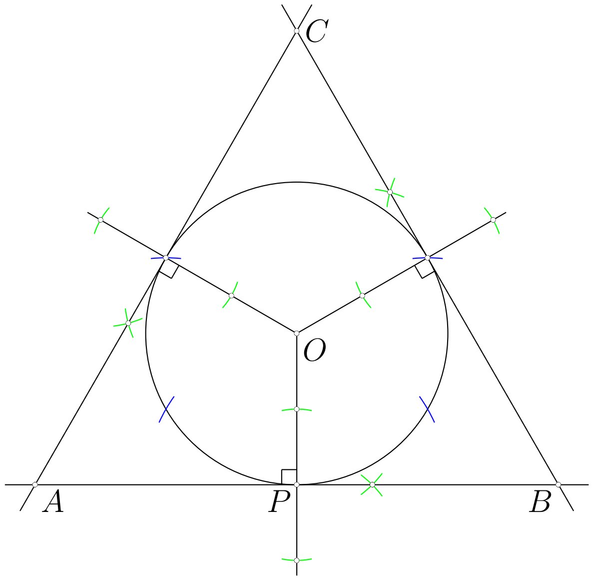
Tekmovalec lahko pride do rešitve tudi z upoštevanjem, da se simetrali kota BAC in stranice BC sekata v točki D. Če tega ne utemelji, dobi največ 8 točk. Če manjka tudi utemeljitev zakaj sta OD in AC vzporedni, pa prejme največ 6 točk.

4. Recimo, da so pred znižanjem prodali x izdelkov. Izkupiček je bil tako $48x$. Po znižanju se je število prodanih izdelkov povečalo za pol in so prodali $\frac{3x}{2}$ izdelkov. Izkupiček pa se je povečal za $\frac{1}{4}$ in je znašal $48x + \frac{1}{4} \cdot 48x = \frac{5}{4} \cdot 48x = 60x$. Novo ceno dobimo, če nov izkupiček delimo s številom prodanih izdelkov $\frac{60x}{\frac{3x}{2}} = 40$ EUR.

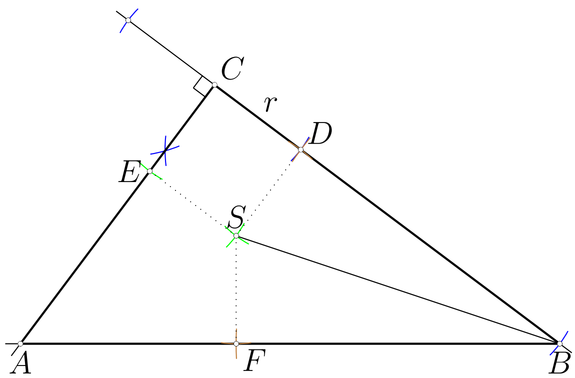
Opomba: Ker je se število prodanih izdelkov povečalo, je $\frac{3x}{2} > x$, kar pomeni, da je $x > 0$. Torej je v gornji enačbi res dovoljeno deliti z $\frac{3x}{2}$.

Zapis izkupička pred znižanjem $48x$ .... 1 točka
Število prodanih izdelkov po znižanju $\frac{3x}{2}$ .... 2 točki
Nov izkupiček $48x + \frac{1}{4} \cdot 48x = \frac{5}{4} \cdot 48x = 60x$ .... 1 + 1 + 1 točka
Uporaba deljenja izkupička s številom izdelkov .... 2 točki
Rezultat: 40 EUR .... 2 točki

5. a) V enakostraničnem trikotniku dotikališča stranic razdelijo včrtano krožnico na tri enake dele. Načrtamo krožnco s polmerom 2 cm in jo s tremi točkami razdelimo na enake dele. V vsaki od dobljenih točk konstruiramo tangento na krožnico. Presečišča tangent so oglišča trikotnika.



b) Če v pravokotnem trikotniku narišemo polmere od središča do vseh dotikališč, dobimo kvadrat s stranico r in še dva štirikotnika, ki ju sestavljata skladna trikotnika. Najprej torej načrtamo pravi kot pri oglišču C in kvadrat, ki nam da središče včrtanega kroga. Odmerimo stranico BC in dobimo oglišče B. Točko D, ki predstavlja oglišče kvadrata, sedaj prezrcalimo čez daljico BS in dobimo točko F – dotikališče krožnice in hipotenuze. Daljico BF še podaljšamo, da seka drugi krak pravega kota in dobimo oglišče A.



a) Narisana krožnica in razdeljena na tri enake dele . . . . 1 točka
Načrtana ena tangenta pravokotno na polmer . . . . 1 točka
Konstrukcija ostalih dveh stranic . . . . 1 točka
Opis konstrukcije . . . . 1 točka

b) Skica, iz katere je viden vsaj en pravokoten polmer na stranico . . . . 1 točka
Narisan kvadrat s stranico 2 cm in označeno središče včrtanega kroga . . 1 točka
Zrcaljenje dotikališča D čez SB v F . . . . 1 točka
Podaljšanje BF, da dobimo A . . . . 1 točka
Opis konstrukcije . . . . 2 točki

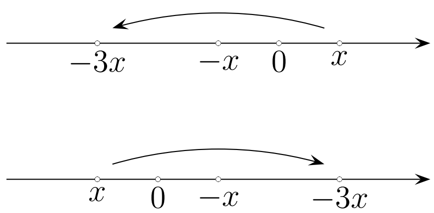
Rešitve za 8. razred

1. Računajmo:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{3}^2+\sqrt{392}\cdot\frac{\sqrt{13^2+12^2}\cdot(2^2+2^1-2^0)\cdot\sqrt{1\frac{9}{16}}}{-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{\frac{1}{\sqrt{256}}}=\\
=&\left(3+\sqrt{196\cdot 2}\cdot\frac{\sqrt{169+144}\cdot(4+2-1)\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}}{-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{8}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{\frac{1}{16}}=\\
=&\left(3+14\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{313}\cdot 5\cdot\frac{5}{4}}{-\left(\frac{1}{8}-1\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right):\frac{1}{4}=\left(3+14\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{313}\cdot 5\cdot\frac{5}{4}}{\frac{7}{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 4=\\
=&\left(3+\frac{14\sqrt{2}\cdot\sqrt{313}\cdot 5\cdot 5\cdot 8}{7\cdot 4\cdot\sqrt{2}}\right)\cdot 4=(3+100\sqrt{313})\cdot 4=12+400\sqrt{313}.
\end{aligned}
$$

Kvadriranje $\sqrt{3}^2=3$ .... 1 točka
Delno korenjenje $\sqrt{392}=14\sqrt{2}$ .... 1 točka
Vsota potenc $2^2+2^1-2^0=5$ .... 1 točka
Korenjenje ulomka $\sqrt{1\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$ .... 1 točka
Upoštevan vrstni red operacij in nasprotna vrednost $-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)=\frac{7}{8}$ ... 2 točki
Dvakratno korenjenje $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{256}}}=\frac{1}{4}$ .... 1 točka
Krajšanje s $\sqrt{2}$ ali racionalizacija in množenje .... 1 točka
Poenostavitev ulomka ($100\sqrt{313}$) .... 1 točka
Rezultat: $12+400\sqrt{313}$ .... 1 točka

2. Če število prezrcalimo preko njegove nasprotne vrednosti, se pomnoži z -3. Ko postopek izvršimo štirikrat, iz a_1 dobimo a_5. Tako velja $a_5=a_1\cdot(-3)^4$. Torej je $-97\frac{1}{5}=81a_1$ in $a_1=-\frac{6}{5}$.

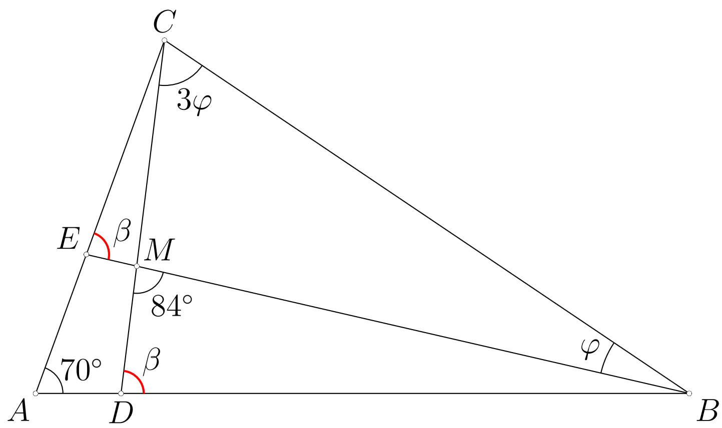


Ugotovitev, da je $a_2=-3a_1$ .... 3 točke
Zapis $a_5=(-3)^4\cdot a_1$ .... 3 točke
(Tekmovalec lahko zapiše vsak naslednji člen s prejšnjim in za vsakega prejme točko.)
Enačba: $-\frac{486}{5}=81a_1$ .... 2 točki
Izračun $a_1=-\frac{6}{5}$ .... 2 točki

3. Na tekmo se lahko pelje največ 6 tekmovalcev, saj je največja razlika med dvema zaporednima prašteviloma med 2 in 54 enaka 6. Tekmovalca ne moreta biti dva, ker bi bila vsota števil njunih sedežev liha. V primeru treh tekmovalcev je vsota treh zaporednih števil $n+n+1+n+2=3n+3=54$ in je potem $n=17$. Trije sedeži bi bili označeni s števili 17, 18, 19, kar ni ustrezna rešitev, saj sta 17 in 19 praštevili. V primeru, da bi se peljali na tekmo štirje tekmovalci, bi bila vsota zaporednih naravnih števil na sedežih $n+n+1+n+2+n+3=4n+6$. Tako bi bilo $4n=48$ in $n=12$. Tekmovalci bi sedeli na sedežih 12, 13, 14, 15, kar ustreza pogoju, saj je samo 13 praštevilo. V primeru petih tekmovalcev je vsota števil na sedežih enaka $5n+10$ in je deljiva s 5, zato ne more biti 54. V zadnjem možnem primeru dobimo vsoto $6n+15=54$ in $6n=39$, ta enačba nima rešitve v naravnih številih. Edina možna rešitev je, da se na tekmo peljejo 4 tekmovalci.

Ugotovitev, da je lahko tekmovalcev največ 6 .... **1 točka**
Izključitev možnosti dveh tekmovalcev. .... **1 točka**
Zapisna vsota števil sedežev v primeru treh tekmovalcev: $3n+3$ .... **1 točka**
Izračunana števila sedežev 17, 18, 19 .... **1 točka**
Izključitev te možnosti zaradi dveh praštevil .... **1 točka**
Zapis vsote za štiri tekmovalce: $4n+6$ .... **1 točka**
Izračunana števila sedežev in potrditev rešitve: 12, 13, 14, 15 .... **2 točki**
Izključitev možnosti petih tekmovalcev $5n+10\neq 54$ .... **1 točka**
Izključitev možnosti šestih tekmovalcev $6n+15\neq 54$ .... **1 točka**

4. Kot $\sphericalangle DMB=84°$ je zunanji kot trikotnika BCM. Označimo $\varphi=\sphericalangle CBE$. Potem je $\varphi+3\varphi=84°$ in $\varphi=21°$. V štirikotniku $ADME$ sta notranja kota pri A in M enaka $70°$ in $96°$ (sokot $\sphericalangle DMB$), kota pri D in E pa sta skladna, saj sta sokota skladnima kotoma $\sphericalangle BDC=\sphericalangle BEC=\beta$. Vsak od njiju meri potem $\frac{1}{2}(360°-70°-96°)=97°$. Torej $\beta=180°-97°=83°$. Kota $\sphericalangle EBA$ in $\sphericalangle ACD$ sta tudi skladna, zato lahko izračunamo $\sphericalangle MBD=180°-83°-84°=13°$. Notranji kot trikotnika ABC z vrhom v B meri $\varphi+13°=34°$, notranji kot z vrhom v C pa $3\varphi+13°=76°$. Koti v trikotniku ABC so $70°$, $34°$ in $76°$.



Skica z označenimi skladnimi koti .... **1 točka**
Ugotovitev ali upoštevanje, da je kot $\sphericalangle BMD=84°$ **zunanji kot trikotnika** BCM**.**

1 točka

Izračun $\varphi = 21^\circ$ .... **1 točka**

Ugotovitev, da sta dva kota v štirikotniku $ADME$ **skladna** .... **1 točka**

Izračun teh kotov 97° .... **1 točka**

Izračun $\beta = 83^\circ$ .... **1 točka**

Izračun kotov $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACD = 13^\circ$ .... **1 točka**

Zapisana ali upoštevana zveza notranji kot trikotnika ABC **z vrhom v** B**:** $\varphi + 13^\circ$
1 točka

Zveza za notranji kot z vrhom v C**:** $3\varphi + 13^\circ$ .... **1 točka**

Odgovor: Koti v trikotniku ABC **so** 70°**,** 34° **in** 76° .... **1 točka**

5. Aleš plača $\frac{1}{2}$ kupnine. Aleš, Cene in Drago so plačali skupaj trikrat toliko kot Bojan, torej je Bojan plačal $\frac{1}{4}$ kupnine. Aleš, Bojan in Drago so plačali skupaj štirikrat toliko kot Cene, torej je Cene plačal $\frac{1}{5}$ kupnine. Skupni delež Aleša, Bojana in Ceneta je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$. Za Draga ostane $\frac{1}{20}$ kupnine. 2000 EUR je $\frac{1}{20}$ cene gozda, gozd pa zato stane 40000 EUR.

Ugotovitev, da plača Bojan $\frac{1}{4}$ **zneska** .... **3 točke**

Ugotovitev, da plača Cene $\frac{1}{5}$ **zneska** .... **3 točke**

Izračun deleža prvih treh $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ .... **2 točki**

Izračunan delež Draga $\frac{1}{20}$ .... **1 točka**

Izračunana cena gozda 40000 **EUR** .... **1 točka**

Rešitve za 9. razred

1. Računajmo:

$$\left(\sqrt{4375}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{(169-144)\cdot 3}\cdot(5-2\sqrt{6})}{-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)}\cdot\sqrt{21}+2^1+2^0\right):\sqrt[4]{\frac{1}{256}}=$$

$$=\left(\sqrt{625\cdot 7}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{3}\right)\cdot 5\sqrt{3}\cdot(5-2\sqrt{6})}{-\left(\frac{1}{8}-1\right)}\cdot\sqrt{21}+3\right):\frac{1}{4}=$$

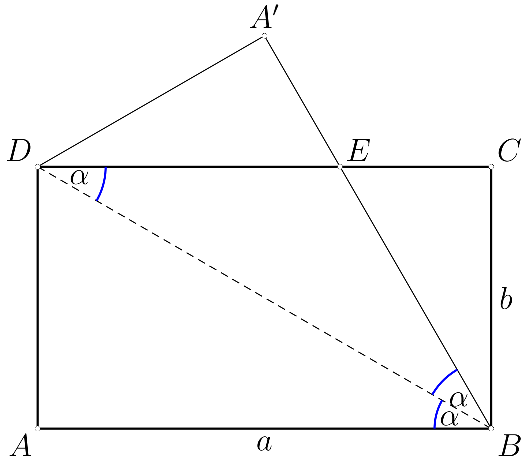
$$=\left(25\sqrt{7}\cdot\frac{\frac{5+2\sqrt{6}}{6}\cdot 5\sqrt{3}\cdot(5-2\sqrt{6})}{\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{7\cdot 3}+3\right)\cdot 4=$$

$$=\left(\frac{25\sqrt{7}\cdot(5+2\sqrt{6})\cdot 5\sqrt{3}\cdot(5-2\sqrt{6})\cdot 8\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 6}+3\right)\cdot 4=$$

$$=\left(\frac{25\cdot 7\cdot(25-4\cdot 6)\cdot 5\cdot 3\cdot 8}{7\cdot 6}+3\right)\cdot 4=(500+3)\cdot 4=2012$$

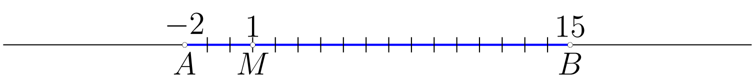
Delno korenjenje $\sqrt{4375}=25\sqrt{7}$ .... **1 točka**
Kvadrat dvočlenika $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{5+2\sqrt{6}}{6}$ .... **1 točka**
Korenjenje $\sqrt{(169-144)\cdot 3}=5\sqrt{3}$ .... **1 točka**
Produkt $(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=1$ .... **1 točka**
Izračun imenovalca $-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}:\frac{1}{2^3}\right)=\frac{7}{8}$ .... **1 točka**
Okrajšan ulomek 500 .... **2 točki**
Izračunana vsota $500+2^1+2^0=503$ .... **1 točka**
Izračunan četrti koren $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}=\frac{1}{4}$ .... **1 točka**
Rezultat: 2012 .... **1 točka**

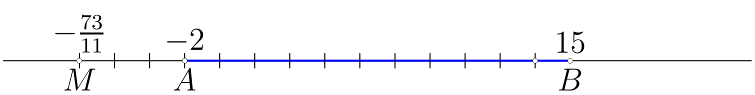
2. Ploščina pravokotnika $ABCD$ je enaka ab, ploščina trikotnika BCE pa $\frac{ab}{6} = \frac{|EC|\cdot b}{2}$, torej je $|EC| = \frac{a}{3} = \frac{8}{3}$ cm. Kota $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle BDC$ sta skladna, saj imata vzporedne krake (izmenična kota), prav tako je s tema kotoma (na sliki označena z α) skladen kot $\sphericalangle EBD$ in potemtakem je trikotnik DBE enakokrak. Zato je $|BE| = |DE| = \frac{2a}{3} = \frac{16}{3}$ cm. Torej je $|BE| = 2|EC|$ in trikotnik CEB je polovica enakostraničnega trikotnika. Sledi $\sphericalangle CBE = 30°$. Torej je $\sphericalangle DBA = 30°$ in je tudi trikotnik ABD polovica enakostraničnega trikotnika z višino $a = 8$ cm. Če označimo $d = |BD|$, mora zato veljati $8 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, kar nam da $d = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.



Zapis ploščine trikotnika BCE je $\frac{|EC|\cdot b}{2}$ .... **1 točka**
Izenačitev z eno šestino ploščine pravokotnika .... **1 točka**
Izračun $|EC| = \frac{8}{3}$ cm .... **1 točka**
Utemeljitev, da je EBD enakokrak trikotnik .... **2 točki**
Izračun $|BE| = \frac{16}{3}$ cm .... **1 točka**
Ugotovitev, da je trikotnik ECB polovica enakostraničnega trikotnika ... **1 točka**
Zapis velikosti kota $\sphericalangle CBE = 30°$ .... **1 točka**
Zapis diagonale z višino (a), npr. $a = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ .... **1 točka**
Izračun diagonale $d = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ .... **1 točka**

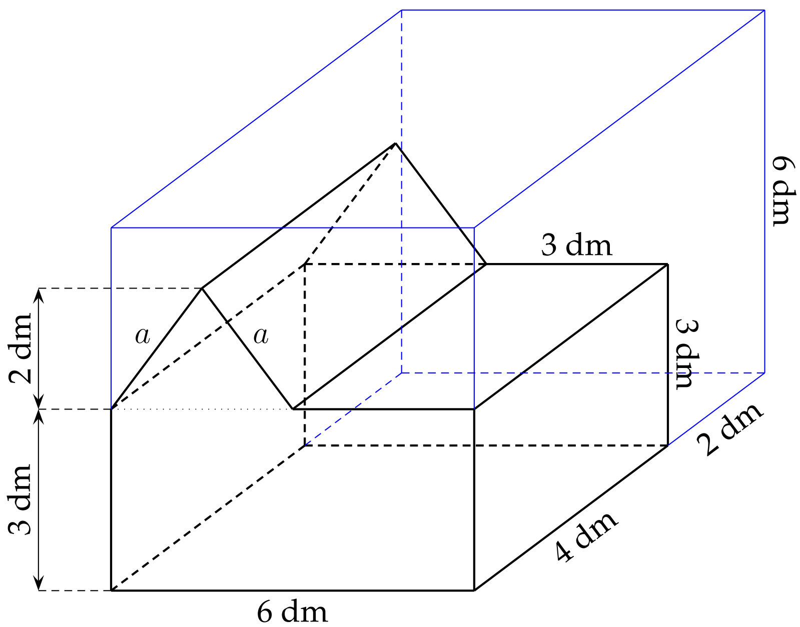
3. Točka M lahko leži na številski premici med točkama A in B, ali pa levo od A. V prvem primeru razdaljo med A in B (17 enot) razdelimo na $|AM| + |MB| = 3k + 14k = 17k = 17$. Zato je $k = 1$ in $|AM| = 3$. Koordinata točke M je 1, $M(1)$. Če točka M leži levo od točke A, je $|BM| = |AB| + |AM| = 17 + 3k = 14k$. Zato je $k = \frac{17}{11}$ in $|AM| = 4\frac{7}{11}$. Koordinata točke $M(-6\frac{7}{11})$.





Zapis $|AB| = 17$ .... **1 točka**
Vsota razdalj $|AM| + |MB| = 17$ .... **1 točka**
Upoštevanje razmerja razdalj: $3k + 14k = 17$ .... **1 točka**
Izračunan $k = 1$ .... **1 točka**
Možna koordinata $M(1)$ .... **1 točka**
Upoštevanje, da M **lahko leži levo od** A **(lahko slika)** .... **1 točka**
Zapis vsote razdalj: $|AM| + |AB| = |BM|$ .... **1 točka**
Upoštevanje razmerja: $3k + 17 = 14k$ .... **1 točka**
Izračun $k = \frac{17}{11}$ .... **1 točka**
Druga možna koordinata $M(-\frac{73}{11})$ .... **1 točka**

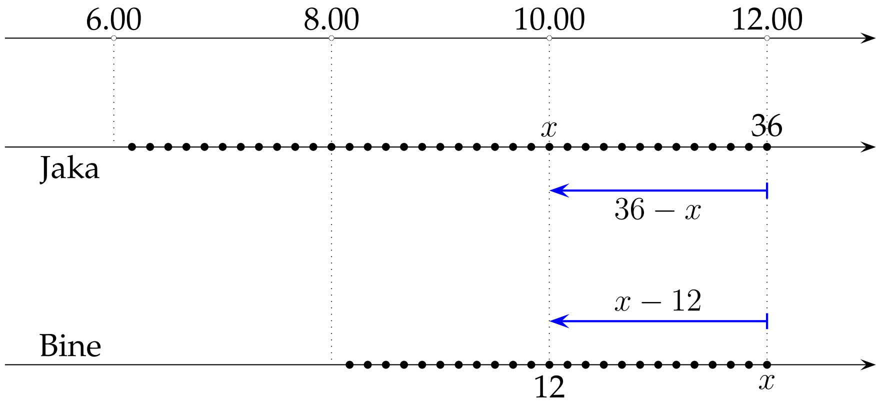
4. Kocka s stranico 6 dm ima prostornino 216 dm^3. Zagozdo sestavljata kvader (6 dm, 4 dm in 3 dm) s prostornino 72 dm^3 in tristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev enakokrak trikotnik z osnovnico 3 dm in višino na osnovnico 2 dm. Višina tristrane prizme je 4 dm in njena prostornina meri $3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{2} = 12$ dm^3. Prostornina zagozde je torej 84 dm^3, kar predstavlja $\frac{84}{216} = \frac{7}{18}$ kocke, delež odpadka je potem $\frac{11}{18}$. Zagozda je prizma z osnovno ploskvijo iz pravokotnika in enakokrakega trikotnika s skupno ploščino $6 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 21$ dm^2 in višino 4 dm. Obseg osnovne ploskve je $6 + 3 + 3 + 2a + 3$ cm, a dobimo s pomočjo Pitagorovega izreka in meri $\frac{5}{2}$ cm. Obseg osnovne ploskve je torej 20 cm. Površina prizme pa $2 \cdot 21 + 20 \cdot 4 = 122$ dm^2 $= 1.22$ m^2. Ker za 1 m^2 porabimo 0.1 l barve, ga za premaz skupno potrebujemo 0.122 l.



Prostornina kocke 216 **dm**^{3} .... **1 točka**
Izračun neznane stranice $a = \frac{5}{2}$ **dm** .... **1 točka**
Izračunana prostornina zagozde 72 **dm**$^3 + 12$ **dm**^{3} .... **(1 + 2) točke**
Izračunan delež odpadka $\frac{11}{18}$ .... **2 točki**
Izračunana površina 122 **dm**^{2} .... **2 točki**
(V zadnjih treh alinejah točkovnika pripada po ena točka tekmovalcu, ki uporablja pravilen postopek računanja prostornine, deleža in površine, čeprav z napačnimi podatki.)

Rezultat: potrebujemo 0.122 l barve .... **1 točka**

5. Jaka je imel ob 12.00 posajenih 36 dreves, Bine pa x. Pred nekaj časa je imel Jaka x posajenih dreves, Bine pa $\frac{36}{3} = 12$. Ker sta v vmesnem času posadila vsak enako število dreves, lahko zapišemo enačbo: $36 - x = x - 12$. Rešitev te enačbe $x = 24$, torej je imel Bine ob 12.00 posajenih 24 dreves. Ker je za vsakega porabil 10 minut, je skupaj delal 240 minut ali štiri ure in je moral začeti s sajenjem ob 8.00.



Zapis števila posajenih dreves ob 12.00 (36, x) .... **1 točka**
Ugotovitev, da je v času, ko je imel Jaka x dreves, Bine imel 12 dreves .. **2 točki**
Upoštevanje, da sta v vmesnem času zasadila enako število dreves ..... **2 točki**
Zapis enačbe: $36 - x = x - 12$ .... **2 točki**
Rešitev $x = 24$ .... **1 točka**
Izračunan čas sajenja dreves 4 ure .... **1 točka**
Izračunan začetek sajenja 8.00 .... **1 točka**