Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Jadranska 19
1000 Ljubljana

IN

Zavod RS za šolstvo
Poljanska 28
1000 Ljubljana

39. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

12. april 2003

7. razred

Navodila za šifriranje:
Na mizi imaš prijavni list, nalepko s šifro, tekmovalno polo formata A3 in pritožni list. Nalepko nalepi na prvo stran tekmovalne pole, prijavni list in pritožni list pa sta že opremljena s šifro. List z nalogami, prijavni list in pritožni list po tekmovanju odnesi s seboj. V primeru ugovora na vrednotenje izdelka **uporabi pritožni list**. Na prijavnem listu imaš uporabniško ime in geslo, ki ti omogočata, da takoj, ko bo tekmovalna komisija dosežek vnesla v strežnik, svoj dosežek vidiš na naslovu `http://www.dmfa.si`, povezava InfoServer, ali preko WAP telefona na naslovu `wap.dmfa.si`

Čas za reševanje je 120 minut.
Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno na tekmovalno polo, priloženi papir pa služi za razmišljanje.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

Dosežki bodo najhitreje (17.4.) vidni na internet naslovu `http://www.dmfa.si`, naloge in rešitve pa že danes.

1. naloga

Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{9}+\left(2^2\right)^2\cdot\frac{5^{\left(-15+3\cdot 7+\frac{12}{6}\right)}}{\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{25}}}\right)^5}=$$

---

2. naloga

17 članski kolektiv izdela na dan določeno število izdelkov. V ponedeljek dveh delavcev ni bilo na delo, vendar bi navzoči delavci radi izdelali predvideno število izdelkov.
Koliko odstotkov izdelkov več je moral izdelati vsak od navzočih delavcev?

---

3. naloga

Na travniku se vsak dan pasejo krave, trava pa ponovno ves čas enakomerno raste. Osem krav bi popaslo vso travo (s prirastom vred) v 10 dneh, 4 krave pa v 30 dneh. Vsaka krava pojé dnevno enako količino trave.
V kolikšnem času bi vso travo popaslo 12 krav, če trava ne bi ponovno rasla?

---

4. naloga

Dan je enakokrak trapez $ABCD$ z osnovnicama $a=\overline{AB}$, $c=\overline{CD}$ in višino $v=\overline{CE}$.
Kolikokrat je ploščina trapeza $ABCD$ večja od ploščine trikotnika $\triangle AEC$? Utemelji.

---

5. naloga

V notranjosti enakokrakega trikotnika $\triangle ABC$ ($\overline{AC}=\overline{BC}$, $\sphericalangle ACB=100^\circ$) leži točka T, tako da merita kota $\sphericalangle TAC=10^\circ$ in $\sphericalangle ACT=20^\circ$.
Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CTB$.

---

1. naloga

- $5^{-15+3\cdot 7+\frac{12}{6}} = 5^8$ 1t
- $\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{25}}}\right)^5 = 5^5$ 1t
- $3 + 16 \cdot \frac{5^8}{5^5} =$ 1t
- $= 3 + 16 \cdot 125 =$ 1t
- 2003 . . . . 1t

5t

---

2. naloga

Označimo z a število izdelkov, ki jih izdela na dan vsak delavec 17 članskega kolektiva.

- 17 delavcev izdela $17a$ izdelkov na dan 1t
- 15 delavcev, vsak izdela $(a + x)$ izdelkov 1t
- Enačba: $15(a + x) = 17a$ 1t
  $x = 13{,}3\ \%\ a$ 1t
- Odg.: Vsak od navzočih delavcev mora izdelati 13,3 % več izdelkov. 1t

5t

---

3. naloga

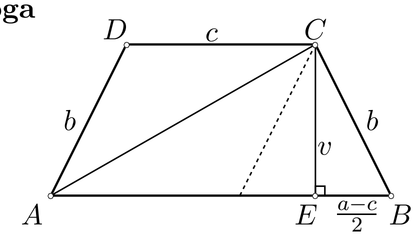
Označimo začetno količino trave s k, enodnevni prirast trave pa s p.
Nalogo rešimo s sklepanjem, npr.:

- 8 krav poje skupno: začetno količino k in 10 enodnevnih prirastov p
  80 $(8 \cdot 10)$ kravjih dnevnih obrokov pomeni $k + 10p$ 1t
- 4 krave pojedo skupno: začetno količino k in 30 enodnevnih prirastov p
  120 $(4 \cdot 30)$ kravjih dnevnih obrokov pomeni $k + 30p$ 1t
- 40 kravjih dnevnih obrokov: $(k + 30p) - (k + 10p) = 20p$ 1t
- En enodnevni prirast trave zadošča za dve kravi za en dan. 1t
  Če trava ne bi sproti rasla, bi travnik popaslo 6 krav v 10 dneh.
- Odg.: Če trava ne bi sproti rasla, bi travnik popaslo 12 krav v 5 dneh. 1t

5t

---

4. naloga



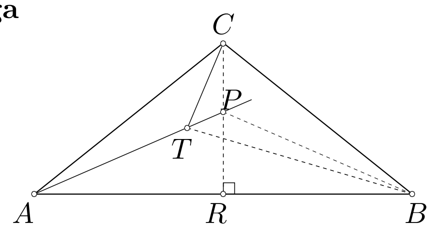
Npr.:
$p = \frac{a+c}{2} \cdot v$
• Ploščina trikotnika $\triangle AEC$:
$\overline{AE} = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$ 2t
$\overline{EC} = v$
$p_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot v$ 1t

• Ploščina trapeza je dvakrat večja od ploščine trikotnika. 2t

5t

---

5. naloga



Glede na sliko:
• $\sphericalangle TCR = 50° - 20° = 30°$ 1t
• $\sphericalangle PTC = 180° - 150° = 30° \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \triangle TPC$ je enakokrak ($\overline{PT} = \overline{PC}$) 1t
• $\sphericalangle TPC = 180° - 30° - 30° = 120°$ 1t
• $\triangle PTB \cong \triangle PCB$ (ujemata se v dveh stranicah in kotu med njima)$\Longrightarrow \sphericalangle PTB \cong \sphericalangle PCB = 50°$ 1t
• $\sphericalangle CTB = 30° + 50° = 80°$ 1t

5t

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Jadranska 19
1000 Ljubljana

IN

Zavod RS za šolstvo
Poljanska 28
1000 Ljubljana

39. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

12. april 2003

8. razred

Navodila za šifriranje:
Na mizi imaš prijavni list, nalepko s šifro, tekmovalno polo formata A3 in pritožni list. Nalepko nalepi na prvo stran tekmovalne pole, prijavni list in pritožni list pa sta že opremljena s šifro. List z nalogami, prijavni list in pritožni list po tekmovanju odnesi s seboj. V primeru ugovora na vrednotenje izdelka **uporabi pritožni list**. Na prijavnem listu imaš uporabniško ime in geslo, ki ti omogočata, da takoj, ko bo tekmovalna komisija dosežek vnesla v strežnik, svoj dosežek vidiš na naslovu `http://www.dmfa.si`, povezava InfoServer, ali preko WAP telefona na naslovu `wap.dmfa.si`

Čas za reševanje je 120 minut.
Izdelek piši <u>s črnilom</u> čitljivo in pregledno <u>na tekmovalno polo</u>, priloženi papir pa služi za razmišljanje.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

Dosežki bodo najhitreje (17.4.) vidni na internet naslovu `http://www.dmfa.si`, naloge in rešitve pa že danes.

1. naloga

Kolesar je ob 14^{00} odpeljal iz kraja A v kraj B. Vozil je s hitrostjo $24\frac{\text{km}}{\text{h}}$. V kraju B je počakal 20 minut in se s hitrostjo $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$ po isti poti vrnil v kraj A, kamor je prispel ob 18^{00}.
Izračunaj, koliko kilometrov je prevozil kolesar.

2. naloga

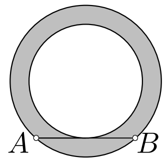
Izračunaj vrednosti števila m, tako da se bosta premici z enačbama $(2m+3)y+m+6=0$ in $(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$ sekali na ordinatni osi.

3. naloga

Studenec teče v jezero. Vsak dan priteče v jezero enaka količina vode. 183 konj bi popilo vso vodo v enem dnevu (torej bi v 24 urah izpraznili jezero). 37 konj bi izpraznilo jezero v 5 dneh.
V kolikšnem času bi popil vso vodo en konj?

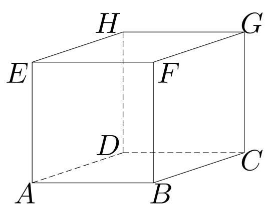
4. naloga

Dolžina daljice AB na sliki je 2 cm.
Koliko kvadratnih centimetrov meri ploščina krožnega kolobarja?



5. naloga

Kocko $ABCDEFGH$ z robom a presekamo z ravnino skozi središča (razpolovišča) robov AB, BC, CG, GH, HE in AE. Ploščina preseka je $75\sqrt{3}$ cm^2.
Izračunaj površino kocke.



REŠITVE NALOG

8. razred

Vsako nalogo ocenimo z 0 do 5 točk.

Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne.

1. naloga

- Čas vožnje: 4 ure 1t
- Označimo dolžino poti v eno smer z x.
  Dobimo enačbo: $\frac{x}{24}+\frac{1}{3}+\frac{x}{20}=4$ $\left(\text{ali } \frac{x}{24}+\frac{x}{20}=3\frac{2}{3}\right)$ 2t
  $x=40$ 1t
- Odgovor: Kolesar je prevozil 80 km. 1t

5t

2. naloga

- Upoštevamo, da je $x=0$ in dobimo iz 2. enačbe:
  $(m-1)y+m-2=0 \Longrightarrow y=\frac{2-m}{m-1}$ 1t
- To vstavimo v 1. enačbo:
  $(2m+3)\cdot\frac{2-m}{m-1}+m+6=0$ 1t
- $-m^2+6m=0$ (ali $m^2-6=0$) 1t
- $m(m-6)=0$
  $m_1=0$ 1t
  $m_2=6$ 1t

5t

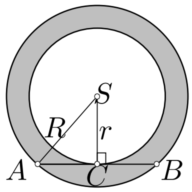
3. naloga

Označimo količino (prostornino) vode v jezeru z V_j, količino (prostornino) vode, ki v jezero priteče v 1 dnevu z V_{1d}.
Nalogo rešimo s sklepanjem, npr.:

- Po enem dnevu je v jezeru V_j+V_{1d} vode; en konj popije $\frac{V_j+V_{1d}}{183}$ 1t
- V 5 dneh je v jezeru $V_j+5\cdot V_{1d}$ vode; en konj popije $\frac{V_j+5\cdot V_{1d}}{37}$ $\left(\text{na dan } \frac{V_j+5\cdot V_{1d}}{5\cdot 37}\right)$ 1t
- Enačba: $\frac{V_j+V_{1d}}{183}=\frac{V_j+5\cdot V_{1d}}{5\cdot 37}$ 1t
  $V_{1d}=\frac{V_j}{365}$ 1t
- V x dneh je v jezeru $V_j+x\cdot V_{1d}$ vode.
  $V_j+x\cdot\frac{V_j}{365}=\frac{366x\cdot V_j}{183\cdot 365}$
  $x=365$ dni
  Odg.: En konj bi popil vso vodo v 1 letu. 1t

5t

4. naloga



- $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{AC} = 1$ cm 1t

Označimo polmer večjega kroga z R,
polmer manjšega kroga z r.

- $R^2 = r^2 + 1$ 1t
- Ploščina krožnega kolobarja:

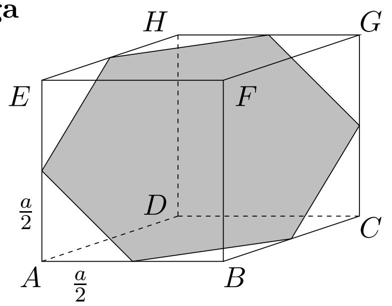
$p_k = \pi(R^2 - r^2)$, $R^2 - r^2 = 1$ 1t

- $p_k = \pi$ 1t
- $p_k \doteq 3{,}14\ \text{cm}^2$ 1t

5t

---

5. naloga



- Presek je pravilni šestkotnik s stranico $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ 1t
- Ploščina pravilnega šestkotnika:

$p = 6 \cdot (\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ 1t

$p = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$ 1t

- Rob kocke:

$\frac{3}{4}a^2\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$

$a = 10$ cm 1t

- Površina kocke: $P = 600\ \text{cm}^2$ 1t

5t