Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

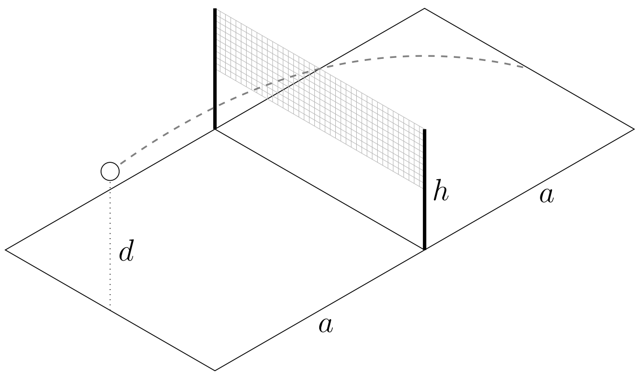
Skupina I

1. Odbojkar udari žogo točno nad sredino zadnje črte igrišča na višini $d = 3{,}05$ m. Igrišče ima obliko pravokotnika, ki ga mreža deli na dve kvadratni polji s stranico $a = 9{,}00$ m, višina zagornjega roba mreže je $h = 2{,}45$ m. Pri vseh vprašanjih privzemi, da je žoga točkasto telo.

   a) V prvem poskusu odleti žoga po udarcu v vodoravni smeri s tolikšno začetno hitrostjo, da bi ravno zadela sredino zadnje črte nasprotnega polja. Kolikšna je začetna hitrost žoge?

   b) Ali v primeru a) žoga preleti mrežo? Odgovor utemelji z računom.

   c) Na kolikšni višini točno nad sredino zadnje črte mora odbojkar udariti žogo v vodoravni smeri, da bo sredino igrišča prečkala tik nad mrežo in padla na tla ravno na sredini zadnje črte nasprotnega polja?

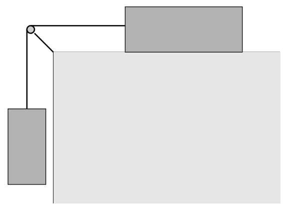


2. Utež z maso 2 kg je z lahko prožno vrvico preko lahkega škripca povezana s klado z maso 4 kg, ki miruje na vodoravni površini mize kot kaže slika. Prožnostni koeficient vrvice je 100 N/m, koeficient lepenja med klado in mizo je 0,3, koeficient trenja pa 0,2. Utež najprej podpiramo z roko ravno toliko, da je vrvica med klado in škripcem vodoravna in med škripcem in utežjo navpična, a ni napeta. Roko umaknemo in utež začne padati.

   a) Za kolikšno višino se spusti utež do trenutka, ko se prične klada premikati?

   b) Kolikšen je v tem trenutku pospešek uteži?

   c) Kolikšen je takrat pospešek klade?



3. V merilnem valju z notranjim polmerom 9 cm sega voda do višine 20 cm. Žoga iz porozne snovi je ravno toliko manjša od valja, da se še lahko neovirano premika znotraj valja (v računih za polmer žoge vzemi kar 9 cm). Porozna snov je prepletena z mnogo med seboj povezanimi kanalčki (porami) različnih dolžin in premerov, stene por so iz snovi z določeno gostoto. Primer porozne snovi je spužvasta goba za pomivanje. Voda lahko počasi pronica v ali skozi porozno snov. Ko je žoga iz porozne snovi suha, pore napolnjuje zrak. Ko je žoga dovolj dolgo v vodi, pore napolni voda, ki izrine ves zrak.

   a) Suho žogo počasi spustimo v vodo v valju. Ko v žogo še ne prodre nič vode, je potopljena do polovice. Na kolikšni višini nad dnom valja je takrat najvišja točka na žogi?

   b) V žogo pronica voda in po dolgem času je potopljena na dnu valja. Takrat sega voda do višine 24 cm. Izračunaj delež prostornine žoge, ki ga predstavljajo pore.

   c) Kolikšna je gostota snovi, iz katere so stene por?

   d) Ko damo suho žogo v vodo (vprašanje a), v žogo pronica voda in žoga počasi tone. Do kolikšne višine sega voda v trenutku, ko je žoga tik pod gladino?

Skupina II

1. Matic živi v pritlični hiši z dvema enakima stanovanjema. Stanovanji med seboj deli notranja stena z debelino 15 cm in površino 20 m^2. Preostale stene Matičevega stanovanja s površino 60 m^2 in strop s površino 64 m^2 mejijo z zunanjostjo. Debelina stropa in zunanjih sten je 20 cm. Zunanja temperatura je 0 °C, v sosednjem stanovanju je temperatura ves čas 24 °C. Toplotne izgube skozi tla zanemari. Toplotna prevodnost notranje stene je 1,2 W/m K, zunanjih sten in stropa 0,07 W/m K.

   a) S kolikšno močjo greje peč v Matičevem stanovanju, da je v njem stalna temperatura 24 °C?

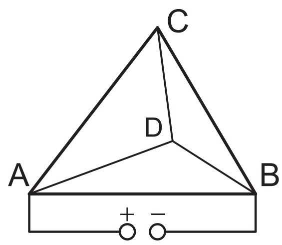
   b) Zaradi podražitve ogrevanja se Matic odloči, da bo znižal temperaturo v stanovanju na 20 °C. Sosed se za znižanje temperature v svojem stanovanju ne odloči. Za koliko odstotkov se zmanjša moč peči v Matičevem stanovanju?

   c) Matic se domisli varčevanja na račun sosednjega stanovanja. Skozi notranjo steno, ki si jo deli s sosedom, izvrta luknje pravokotno na steno in vanje vstavi valjaste železne palice s prečnim presekom 10 cm^2 in z dolžino, ki je enaka debelini notranje stene. Najmanj koliko palic mora vstaviti v steno, da bo v svojem stanovanju ohranjal temperaturo vsaj 20 °C in mu ne bo potrebno plačevati ogrevanja? Toplotna prevodnost železa je 80 W/m K.

2. Ema šest enakih ravnih vodnikov zvari v tetraeder, da vsak vodnik tvori enega od robov pravilne tristrane piramide, kot kaže slika. Na oglišči A in B priključi vir s stalno napetostjo 0,50 V.

   a) Ko Ema po nerodnosti pretrga vodnik med ogliščema A in C, je tok skozi vir 400 mA. Kolikšen je upor posameznega vodnika, ki tvori rob piramide?

   b) Ema krajišči pretrganega vodnika stakne, da ima vodnik med ogliščema A in C spet enak upor kot vsak drug vodnik med oglišči. Razmisli, kolikšen tok teče skozi vodnik med ogliščema C in D. Kolikšen tok teče skozi vir?

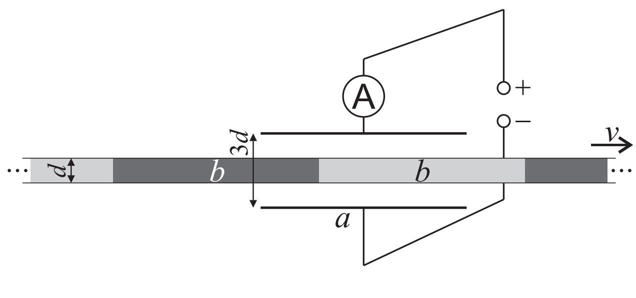


   c) Da ji ne bi bilo potrebno ves čas držati skupaj pretrganih delov vodnika med ogliščema A in C, ju Ema zvari skupaj. Zvarjeni vodnik ima upor 2,8 Ω, kar je različno od upora preostalih petih vodnikov. Kolikšen tok sedaj teče skozi vir?

3. Kondenzator sestavljata kvadratni plošči s stranico $a = 10$ cm, ki sta razmaknjeni za $3d = 0{,}3$ mm. Kondenzator vežemo v vezje z ampermetrom in virom napetosti $U = 1$ kV, kot kaže slika. V kondenzator vstavimo $a = 10$ cm širok trak z debelino $d = 0{,}1$ mm, ki ima izmenične pasove z dielektričnostjo 3 (temno na sliki) in 1 (svetlo na sliki). Slika je v navpični smeri povečana, da se bolje vidi debelina traku d in razmik med ploščama $3d$. Dolžina vsakega pasu (b na sliki) je enaka $b = a = 10$ cm; deli traku z enako dielektričnostjo so kvadratne oblike. Trak po širini zapolni ves kondenzator.

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 1? Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 3?

   b) Trak vlečemo s hitrostjo $v = 1$ m/s v vodoravni smeri, kot kaže slika. Kolikšen tok kaže ampermeter?



   c) Grafično prikaži odvisnost toka od časa. Čas štejemo od trenutka, ko začne v kondenzator vstopati del traku z dielektričnostjo 3.

Skupina III

1. Decembra lani so iz Francoske Gvajane izstrelili v vesolje do zdaj največji vesoljski teleskop imenovan James Webb. Poslali so ga k drugi Lagrangevi točki, imenovani točka L2. Točka L2 leži na premici Zemlja-Sonce na večji oddaljenosti od Sonca kot Zemlja in na takem mestu, da je skupna gravitacijska sila Zemlje in Sonca na telo ravno pravšnja, da telo kroži okoli Sonca z enakim obhodnim časom kot Zemlja. Ker teleskop energijo za delovanje prejema s sončimi celicami in je točka L2 ves čas v Zemljini senci, so teleskop utirili v tako imenovano Halo orbito okoli točke L2. Oddaljenost Zemlje od Sonca je mnogo večja od oddaljenosti točke L2 od Zemlje. Polmer Halo orbite teleskopa okoli točke L2 je mnogo manjši od razdalje med točko L2 in Zemljo. Vse orbite so krožne. Vplive gravitacijskih sil Lune in ostalih planetov na gibanje teleskopa zanemari.

   a) Izračunaj oddaljenost točke L2 od Zemlje.

   b) Izračunaj obhodni čas teleskopa pri kroženju v Halo orbiti okoli točke L2.

2. Plošča z debelino 5 cm miruje na klancu z naklonom 15°. Koeficient trenja med klancem in ploščo je odvisen od temperature plošče na stiku s podlago T. Odvisnost opišemo z enačbo $k(T) = k_0 T_0/T$, kjer je $k_0 = 0{,}3$ in $T_0 = 300$ K stalna zunanja temperatura. Temperaturi v enačbi za $k(T)$ morata biti izraženi v kelvinih. Gostota plošče je 2 kg/dm^3, toplotna prevodnost plošče je 1,3 W/m K.

   a) Ploščo rahlo potisnemo po klancu navzdol. Najmanj kolikšno stalno temperaturo mora imeti, da se ne ustavi?

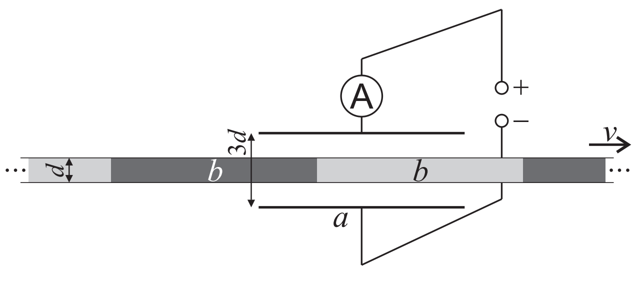
   V drugem primeru ploščo potiskamo s konstantno hitrostjo po klancu navzdol, dokler se v njej ne vzpostavi stacionarno stanje, tedaj je temperatura zgornje ploskve plošče ves čas T_0, temperatura spodnje ploskve plošče pa se ne spreminja več. Zanemari toplotni tok skozi stranske ploskve plošče. Na spodnji ploskvi prehaja v ploščo polovica toplote, ki se sprošča zaradi dela sile trenja.

   b) Najmanj kolikšna mora biti hitrost plošče, da se ne začne ustavljati, ko jo prenehamo potiskati?

3. Kondenzator sestavljata kvadratni plošči s stranico $a = 10$ cm, ki sta razmaknjeni za $3d = 0{,}3$ mm. Kondenzator vežemo v vezje z ampermetrom in virom napetosti $U = 1$ kV, kot kaže slika. V kondenzator vstavimo $a = 10$ cm širok trak z debelino $d = 0{,}1$ mm, ki ima izmenične pasove z dielektričnostjo 3 (temno na sliki) in 1 (svetlo na sliki). Slika je v navpični smeri povečana, da se bolje vidi debelina traku d in razmik med ploščama $3d$. Dolžina vsakega pasu (b na sliki) je enaka $b = a = 10$ cm; deli traku z enako dielektričnostjo so kvadratne oblike. Trak po širini zapolni ves kondenzator.

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 1? Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 3?

   b) Trak vlečemo s hitrostjo $v = 2$ m/s v vodoravni smeri, kot kaže slika. Kolikšen tok kaže ampermeter?



   c) Grafično prikaži odvisnost toka od časa. Čas štejemo od trenutka, ko začne v kondenzator vstopati del traku z dielektričnostjo 3.

   d) Na drugem grafu prikaži odvisnost toka od časa za primer, ko je dolžina delov traku s konstantno dielektričnostjo enaka $b = 2a$.

1. $d = 3{,}05$ m, $a = 9{,}00$ m, $h = 2{,}45$ m.

a) V navpični smeri žoga prosto pada. Za čas padanja t velja:

$$d = \tfrac{1}{2}gt^2\,, \qquad t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 0{,}79\ s\,.$$

1: pravilen izraz za čas padanja

V tem času v vodoravni smeri prepotuje razdaljo $2a$ s hitrostjo

$$v_0 = \frac{2a}{t} = 22{,}8\ \mathrm{m/s} \approx 23\ \mathrm{m/s}\,.$$

1: pravilen izraz za v_0

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

b) Žoga prispe do mreže v polovičnem času; v tem času se spusti za

$$d_m = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{gt^2}{8} = 0{,}76\ \mathrm{m}$$

1: pravilen izraz za spust na mestu mreže

in se na višini $h' = d - d_m = 2{,}29$ m dotakne mreže.

1: pravilna numerična vrednost za višino žoge na mestu mreže

Žoga torej ne preleti mreže, saj je $h' < h$.

1: sklep

[3 t.]

c) Za novo višino d' in čas preleta igrišča t' velja:

$$d' = \tfrac{1}{2}gt'^2\,, \qquad t' = \sqrt{\frac{2d'}{g}}\,,$$

Po času $t'/2$ mora biti tik nad mrežo.

1: zapis t' in pogoja za prelet

Torej se v tem času spusti ravno za razliko med začetno višino in višino mreže:

$$d' - h = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{t'}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,d', \qquad h = \frac{3}{4}\,d'\,,$$

1: pravilen zapis razlike višin s t'

1: pravilna zveza med h in d'

od koder lahko takoj izrazimo začetno višino:

$$d' = \frac{4}{3}\,h = 3{,}27\ \mathrm{m} \approx 3{,}3\ \mathrm{m}\,.$$

1: pravilna numerična vrednost

[4 t.]

2. $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $k = 100$ N/m, $k_l = 0{,}3$, $k_t = 0{,}2$.

a) Klada se premakne, ko sila v vrvici F preseže silo lepenja.

$$F \geq m_2 g k_l \,,$$

1: zapis pogoja za premik klade

V mejnem primeru za raztezek vrvice h velja:

$$F = kh \,, \qquad h = \frac{m_2 g k_l}{k} = 12 \text{ cm} \,.$$

Utež se torej spusti za 12 cm.

1: pravilen splošni izraz za raztezek

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

b) Na utež deluje teža in sila vrvice v nasprotni smeri. Vsota sil je enaka masi pomnoženi s pospeškom uteži:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F$$

1: pravilen zapis Newtonovega zakona in obeh sil

$$F = kh = m_2 g k_l \,,$$

$$a_1 = g\left(1 - \frac{m_2 k_l}{m_1}\right) = 3{,}9 \text{ m/s}^2 \,.$$

1: ugotovitev, da je sila vrvice enaka kot pri a)

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

c) Takoj, ko se klada premakne, nanjo deluje sila trenja (in nič več sila lepenja).

1: ugotovitev, da trenje nadomesti lepenje

Ker je ta sila manjša od sile lepenja, se klada prične gibati pospešeno, s pospeškom a_2:

$$m_2 a_2 = F - m_2 g k_t = m_2 g k_l - m_2 g k_t = m_2 g (k_l - k_t) \,,$$

1: ugotovitev, da je sila vrvice v trenutku premika tolikšna kot pri a)

$$a_2 = g(k_l - k_t) = 0{,}98 \text{ m/s}^2 \approx 1{,}0 \text{ m/s}^2 \,.$$

1: pravilen izraz za pospešek uteži

1: pravilna numerična vrednost

[4 t.]

3. $R = 9$ cm, $H = 20$ cm, $\rho_0 = 1$ kg/dm^3, $h_b = 24$ cm.

a) Označimo z $V_0 = 4\pi R^3/3$ prostornino krogle s polmerom R in s H višino gladine, ko v merilnem valju ni žoge. Ko suha žoga plava, je v vodo potopljena polovica žoge, kar pomeni, da je skupna prostornina vode in polovice žoge enaka prostornini valja z višino h in osnovno ploskvijo πR^2

$$\pi R^2 H + \frac{1}{2}V_0 = \pi R^2 H + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h\,,$$

kar nam da za višino gladine $h = H + 2R/3 = 26$ cm.

1: ugotovitev, da je potrebno prostornini vode dodati polovico prostornine krogle

1: izračunana višina gladine 26 cm ali enačba za najvišjo točko, v kateri upošteva polmer krogle

Najvišja točka na žogi je še za polmer R višje:

$$h_a = h + R = H + \frac{5R}{3} = 35\,\text{cm}.$$

1: pravilen končni rezultat $h_a = 35$ cm

[3 t.]

b) Ko je žoga na dnu, so vse pore napolnjene z vodo, gladina je takrat na višini $h_b = 24$ cm. Označimo delež prostornine žoge, ki ga predstavljajo pore, z η. Ohranjanje prostornin nam da

$$\pi R^2 h_b = \pi R^2 H + (1-\eta)V_0 = \pi R^2 H + (1-\eta)\frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

kjer drugi člen na desni predstavlja prostornino sten por v žogi oziroma tisti del prostornine potopljene žoge, ki ga ne zapolnjuje voda v porah.

1: ugotovitev, da voda zapolni v žogi prostornino por ηV_0 in da za stene ostane $(1-\eta)V_0$ prostornine

1: pravilno zapisana enačba, iz katere se da izračunati η

Enačbo poenostavimo v $4R - 3(h_b - H) = 4\eta R$ in za η dobimo

$$\eta = 1 - \frac{3(h_b - H)}{4R} = 1 - \frac{3\cdot 4\,\text{cm}}{4\cdot 9\,\text{cm}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

1: pravilen končni rezultat $\eta = 2/3$

[3 t.]

c) V žogi prazen prostor v porah predstavlja $\eta = 2/3$ celotne prostornine in stene por $1-\eta = 1/3$ celotne prostornine. Masa sten por je enaka masi žoge, ki je iz podatkov pri a) delu enaka masi izpodrinjene vode $m = \rho_0 V_0/2$. Gostota sten por ρ je masa sten ulomljeno s prostornino sten, kar nam da

$$\rho = \frac{m}{(1-\eta)V_0} = \frac{\rho_0 V_0}{2(1-\eta)V_0} == \frac{\rho_0}{2(1-\eta)} = \frac{1}{2/3}\rho_0 = \frac{3}{2}\rho_0 = 1{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\,.$$

1: pravilno nastavljena enačba, iz katerega se da izračunati ρ

1: pravilen končni rezultat $\rho = 1{,}5$ kg/dm^3

[2 t.]

d) Ko je žoga tik pod gladino, še vedno velja ravnovesje sil, in je celotna masa v krogli s polmerom R (torej na mestu, ki ga zaseda z vodo delno prepojena žoga) enaka masi izpodrinjene vode, torej je prostornina V vode v žogi ravno tolikšna, da je masa z vodo delno prepojene žoge enaka masi vode s prostornino V_0

$$\rho_0 V_0 = (1-\eta)\rho V_0 + \rho_0 V\,,$$

oziroma

$$V = V_0\left(1 - (1-\eta)\frac{\rho}{\rho_0}\right) = V_0\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}V_0\,.$$

1: pravilno nastavljena enačba bilance prostornin za lego žoge tik pod gladino

Zdaj ponovno pogledamo bilanco prostornin

$$\pi R^2 h_d = \pi R^2 H + V_0 - V = \pi R^2 H + \frac{1}{2} V_0 = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3\,,$$

kar nam da

$$h_d = H + \frac{2R}{3} = h = 26\,\mathrm{cm}.$$

1: pravilen končni rezultat $h_d = 26$ cm.
[2 t.]

Če tekmovalec do rezultata $h_d = h = 26$ cm pride na podlagi pravilnega razmisleka (opisano spodaj), dobi obe točki.

Do istega rezultata lahko pridemo z razmislekom. Ko voda postopno pronica v pore, žoga plava, a se njena najvišja točka spušča proti gladini. Če si kot "žogo" mislimo samo snov, ki tvori stene por, je masa žoge konstantna in se sila vzgona ne spreminja, dokler žoga plava na gladini. Na začetku vodo izpodriva del sten por, ki je pod gladino, in zrak, ki je v porah pod gladino. Ko voda vdira v pore, se prostornina zraka pod gladino zmanjšuje, da se ohranja sila vzgona, žoga tone in vodo izpodriva vse več sten por. Gladina vode se ne spreminja, saj vsak mililiter zraka pod gladino nadomesti mililiter snovi, ki tvorijo stene por. Zato je gladina vode, dokler žoga plava, na isti višini kot pri vprašanju a) in je enaka $h = 26$ cm. Gladina se začne spuščati šele, ko se žoga potaplja pod gladino, saj takrat zraka, ki ga iztisne iz por voda, ne nadomešča več snov, iz katere so stene por, ker je ta snov že vsa pod vodno gladino.

1. $S_n = 20\ \mathrm{m}^2$, $S_z = 60\ \mathrm{m}^2$, $S_s = 64\ \mathrm{m}^2$, $d_n = 15$ cm, $d_z = 20$ cm, $T_z = 0$ °C, $T_s = 24$ °C, $T_n = 20$ °C, $\lambda_n = 1{,}2$ W/m K, $\lambda_n = 0{,}07$ W/m K, $\lambda_{Fe} = 80$ W/m K, $S_{Fe} = 10\ \mathrm{cm}^2$.

a) Moč peči mora biti enaka toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop, skozi notranjo steno pa ni izmenjave toplote, ker sta stanovanji pri enaki temperaturi:

$$P = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_s - T_z)}{d_z} = 1040\ \mathrm{W}\,.$$

1: ugotovitev, da ni prevajanja skozi notranjo steno in da prispevajo le zunanje stene in strop
1: pravilen izraz za moč
1: pravilna numerična vrednost
[3 t.]

b) Ko se temperatura Matičevega stanovanja zniža na T_n, steče toplotni tok tudi iz sosednjega stanovanja, ki prispeva k ogrevanju Matičevega stanovanja, tok skozi zunanje stene in strop pa se zmanjša:

$$P' + \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z}\,.$$

1: pravilen zapis bilance z upoštevanjem notranje stene
Moč peči je v tem primeru enaka

$$P' = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z} - \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} = 228\ \mathrm{W}\,,$$

1: pravilen izraz za moč
kar predstavlja znižanje

$$\eta = \frac{P - P'}{P} = 78\ \%\,.$$

1: pravilna numerična vrednost za izkoristek
[3 t.]

c) Skozi posamezno palico teče v Matičevo stanovanje dodatni toplotni tok

$$P_1 = \frac{\lambda_{Fe} S_1(T_n - T_z)}{d_n} = 2{,}13\ \mathrm{W}\,.$$

V mejnem primeru je toplotni tok iz sosednjega stanovanja skozi notranjo steno in N palic enak toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop:

$$\frac{\lambda_n(S_n - NS_1)(T_s - T_n)}{d_n} + NP_1 = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z}\,,$$

pri čemer smo upoštevali, da se površina notranje stene zmanjša za NS_1. Izraz na levi preuredimo:

$$\frac{\lambda_n(S_n - NS_1)(T_s - T_n)}{d_n} + \frac{\lambda_{Fe} NS_1(T_n - T_z)}{d_n} = \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} + \frac{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)NS_1(T_s - T_n)}{d_n}\,.$$

1: pravilna bilanca tokov
1: upošteva zmanjšanje površine notranje stene

Izluščimo

$$\begin{aligned} N &= \frac{d_n}{(\lambda_{Fe}-\lambda_n)S_1(T_s-T_n)}\left(\frac{\lambda_z(S_z+S_s)(T_n-T_z)}{d_z}-\frac{\lambda_n S_n(T_s-T_n)}{d_n}\right) \\ &= \frac{d_n P'}{(\lambda_{Fe}-\lambda_n)S_1(T_s-T_n)} = \frac{P'}{P_1}\frac{\lambda_{Fe}}{(\lambda_{Fe}-\lambda_n)} = 109\,. \end{aligned}$$

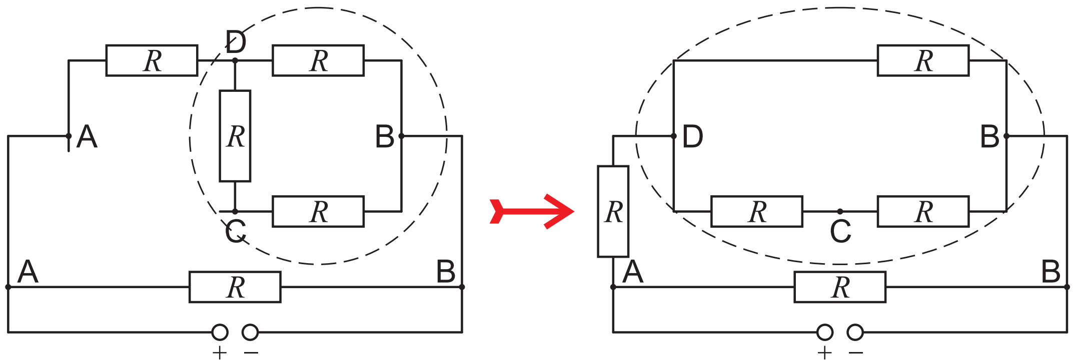
1: pravilen izraz za N
1: pravilna numerična vrednost
Ker je v našem primeru $\lambda_{Fe} \gg \lambda_n$, lahko končni izraz poenostavimo

$$N \approx \frac{P'}{P_1} = 108\,.$$

[4 t.]
Priznamo vse 4 točke za zadnji rezultat, če je podana (naknadna) utemeljitev, da smo lahko zmanjšanje površine notranje stene zanemarili, ker je $NS_1 \ll S_n$, sicer le 3 t.

2. $U = 0{,}5$ V, $I_a = 400$ mA, $R_1 = 2{,}8\ \Omega$.

a) Nadomestno vezje, ko je vodnik med ogliščema A in C prekinjen, kaže slika levo. Na sliki desno je vezje preoblikovano, da se nazorneje vidi, kateri uporniki so vezani vzporedno in kateri zaporedno. Točke A, B, C in D na shemi vezave ustrezajo enako označenim ogliščem na sliki tetraedra v nalogi. Na sliki levo je posebej označeno, da sta obe točki A na tetraedru ista točka, enako velja za točki B.



1: ugotovitev, da je vezava ekvivalentna shemi na desni sliki

Upor črtkano obkroženega dela je

$$R_a' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2R}{3}.$$

Za nadomestni upor celotnega vezja dobimo

$$R_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + R_a'}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + 2R/3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{3}{5R}\right)^{-1} = \left(\frac{5+3}{5R}\right)^{-1} = \frac{5R}{8}.$$

1: določitev nadomestnega upora vezja ali zveza med izmerjenim tokom I_a in U, ki vsebuje samo upor enega vodnika R in številke

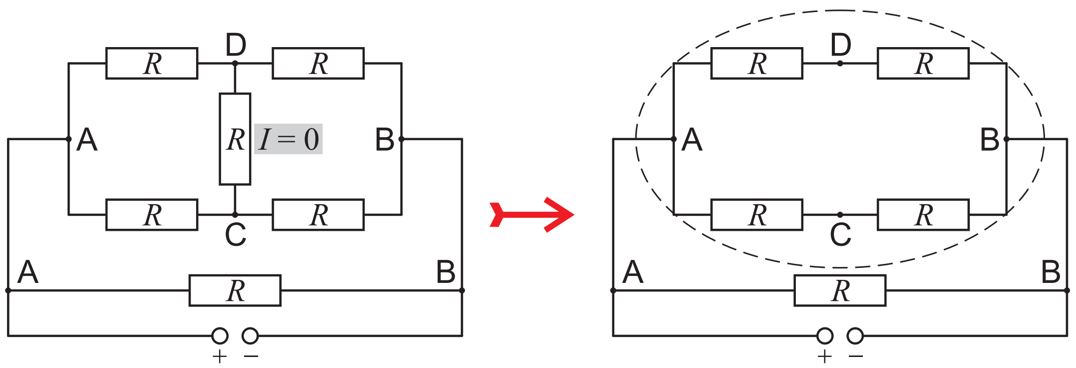
Podatki v nalogi nam dajo

$$U = I_a R_a = \frac{5 I_a R}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{8U}{5I_a} = 2\,\Omega\,.$$

1: pravilna končni izraz in vrednost $R = 2\ \Omega$
[3 t.]

b) Ker so vsi vodniki enaki, zaradi simetrije po vodniku med ogliščema C in D tok ne teče (slika levo), saj sta na enakem potencialu.
1: ugotovitev, da zaradi simetrije tok med ogliščema C in D ne teče

Vezje se zato poenostavi v vezje na sliki desno.



Upor črtkano obkroženega dela na sliki desno je

$$R_b' = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = R\,.$$

1: pravilna nadomestna shema vezave in ugotovitev $R_b' = R$

Nadomestni upor celotnega vezja je

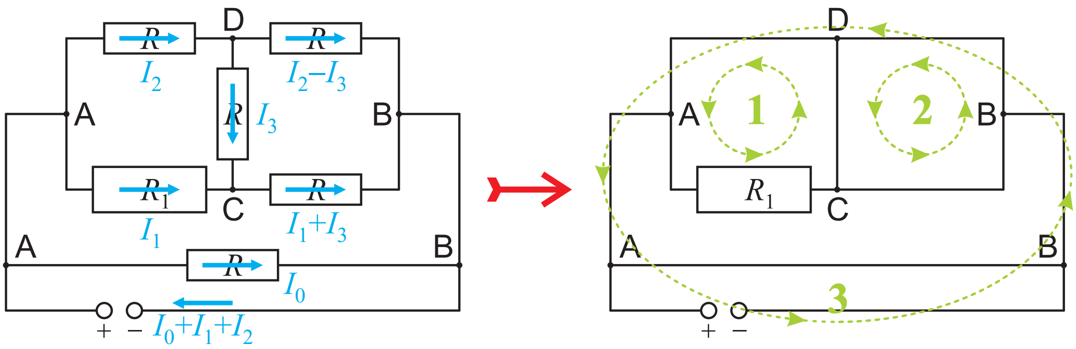
$$R_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_b'}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{R}{2}\,.$$

Iskani tok je

$$I_b = \frac{U}{R_b} = 500\,\mathrm{mA}.$$

1: pravilen končni rezultat $I_b = 500$ mA.
[3 t.]

c) Simetrije ni več, ker je upor $R_1 = 2{,}8\ \Omega$ med ogliščema A in C različen od uporov vodnikov med ostalimi pari oglišč R, kot kaže shema vezja levo. Označeni so tokovi skozi posamezne dele vezja. Iskani tok skozi vir je $I_c = I_0 + I_1 + I_2$.



1: smiselno označeni tokovi, podobno kot je narejeno na shemi levo

Tok I_0 dobimo zlahka $I_0 = U/R = 250$ mA.

Tokova I_1 in I_2, ki ju moramo še določiti, poiščemo z uporabo Kirchhoffovega izreka o napetostih po zaključenih zankah, pri čemer so zanke, ki jih uporabimo, oštevilčene na sliki desno. V enačbah se pojavi tudi tok I_3 v vodniku med ogliščema C in D, ki zaradi $R_1 \neq R$ sedaj ni nič. Pri zapisu enačb za napetosti se držimo dogovora, da v smeri toka potencial na uporniku pade oziroma je napetost negativna. Zanke 1 (A-C-D-A), 2 (C-B-D-C) in 3 (B-D-A-vir-B) na desni sliki dajo po vrsti enačbe

$$\begin{aligned}
-I_1R_1 + I_3R + I_2R &= 0\,, \qquad (1)\\
-(I_1 + I_3)R + (I_2 - I_3)R - I_3R &= 0\,, \qquad (2)\\
(I_2 - I_3)R + I_2R - U &= 0\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

1: za neodvisne zanke zapisane enačbe za napetosti

Z vpeljavo $x \equiv R_1/R = 1{,}4$ in upoštevajoč $U/R = I_0$ dobimo preglednejši zapis istih enačb

$$\begin{aligned}
xI_1 - I_2 - I_3 &= 0\,, \qquad (1)\\
I_1 - I_2 + 3I_3 &= 0\,, \qquad (2)\\
2I_2 - I_3 &= I_0\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Iz (2) izrazimo $I_1 = I_2 - 3I_3$ in rezultat nesemo v (1), kar nam da

$$(x-1)I_2 - (3x+1)I_3 = 0$$

oziroma

$$I_2 \;=\; \frac{3x+1}{x-1} I_3\,. \qquad \mathbf{(1+2)}$$

1: reševanje enačb za tokove in vsaj en korak, ki zmanjša število neznanih tokov s 3 (I_1, I_2, I_3) oziroma 4 (I_1, I_2, I_3, I_0) za eno neznanko, ki ni I_0

Ko (**1**+**2**) vstavimo v (**3**) dobimo

$$2\frac{3x+1}{x-1}I_3 - I_3 = I_0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_3 = \frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{0{,}4}{10}I_0 = \frac{1}{25}I_0 = 10\,\mathrm{mA}.$$

Zdaj iz (**1**+**2**) izračunamo

$$I_2 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 = \frac{5{,}2}{10}I_0 = \frac{13}{25}I_0 = 130\,\mathrm{mA}$$

in nato iz (**2**) še

$$I_1 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 - 3\frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{4}{5x+3}I_0 = \frac{2}{5}I_0 = 100\,\mathrm{mA}.$$

Za tok skozi vir dobimo

$$I_c = I_0 + I_1 + I_2 = \left(1 + \frac{4}{5x+3} + \frac{3x+1}{5x+3}\right) I_0 = \frac{8(x+1)}{5x+3}I_0 = \frac{48}{25}I_0 = 480\,\mathrm{mA}.$$

1: pravilen rezultat za tok skoti vir $I_c = 480$ mA
[4 t.]

3. $a = 10$ cm, $d = 0{,}1$ mm, $U = 1$ kV, $b = a = 10$ cm, $\varepsilon = 3$, $v = 1$ m/s.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3}C_0\,,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2/d = 8{,}9 \cdot 10^{-10}$ F$= 0{,}89$ nF in je $C_1 = 0{,}30$ nF.

1: pravilen izraz za kapaciteto praznega kondenzatorja

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 = \frac{3}{7}C_0 = 0{,}38\,\mathrm{nF}.$$

1: pravilno nastavljen izraz (recipročna vrednost skupne kapacitete je vsota recipročnih vrednosti kapacitet) za kapaciteto dveh zaporedno vezanih kondenzatorjev

1: pravilen izraz za kapaciteto z delom traku z dielektričnostjo ε polnega kondenzatorja

1: pravilne vrednosti obeh kapacitet $C_1 = 0{,}30$ nF in $C_\varepsilon = 0{,}38$ nF

[4 t.]

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε, ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\epsilon,x} = \frac{x}{a}C_\varepsilon \qquad \text{in} \qquad C_{1,(a-x)} = \frac{a-x}{a}C_1\,.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\epsilon,x} + C_{1,(a-x)} = \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 + \frac{a-x}{a}\cdot\frac{1}{3}C_0 = \frac{1}{3}C_0 + \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0$$

1: ugotovitev, da je potrebno zapisati skupno kapaciteto vzporedno vezanih kondenzatorjev, kar pomeni seštevanje kapacitet

Ko se trak giblje s hitrostjo v, je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε. Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\frac{2}{21}C_0 = 0{,}848\,\mathrm{nF/s} \approx 0{,}85\,\mathrm{nF/s}.$$

1: ugotovitev, da se navidezno spreminja velikost plošč posameznega kondenzatorja – enemu kot $x(t)$ in drugemu kot $a - x(t)$ – in da je spreminjanje skupne kapacitete linearna funkcija časa

Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

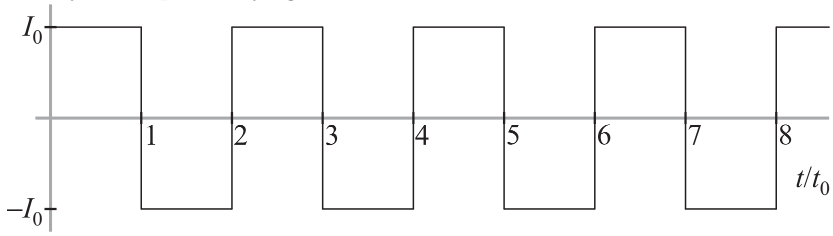
Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U, se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U\frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm\frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}UC_0 = \pm 0{,}848\,\mu\mathrm{A} \approx \pm 0{,}85\,\mu\mathrm{A}.$$

1: pravilna zveza med intervalno linearnim spreminjanjem kapacitete s časom in posledično intervalno konstantnim tokom skozi ampermeter

Ampermeter kaže tok velikosti $I_0 = 0{,}85\,\mu$A.
1: pravilen končni rezultat $I_0 = 0{,}85\,\mu$A
[4 t.]

c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0{,}1$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε, tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf



1: pravilna oblika grafa: pravokoten periodičen, enaki polperiodi, enaka amplituda navzgor in navzdol
1: pravilne vrednosti, perioda je $2t_0 = 0{,}2$ s, amplituda je $I_0 = 0{,}85\,\mu$A
[2 t.]

1. razdalja Sonce-Zemlja $d = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, masa Sonca $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Krožno frekvenco kroženja Zemlje okoli Sonca izpeljemo iz Newtonovega zakona:

$$m_Z a_r = m_Z \Omega^2 d = \frac{G m_Z m_S}{d^2}\,, \qquad \Omega^2 = \frac{G m_S}{d^3}\,.$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje Zemlje okoli Sonca

Telo z maso m v L2 naj kroži z enako frekvenco Ω na razdalji l od Zemlje in $d + l$ od Sonca:

$$m(d + l)\Omega^2 = \frac{G m m_S}{(d + l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2}\,.$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje telesa v L2 okoli Sonca

Upoštevamo gornji izraz za Ω^2 in okrajšamo m in G:

$$\frac{m_S(d + l)}{d^3} = \frac{m_S}{(d + l)^2} + \frac{m_Z}{l^2}$$

1: pravilna zveza, ki povezuje masi Sonca in Zemlje z obema razdaljama

Izluščimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{l^2} &= \frac{m_S}{m_Z}\left(\frac{d + l}{d^3} - \frac{1}{(d + l)^2}\right) = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{(d + l)^3 - d^3}{d^3\,(d + l)^2} = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3d^2\,l + 3d\,l^2 + l^3}{d^3(d + l)^2} \\ &\approx \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3d^2\,l}{d^3\,d^2}\,.\end{aligned}$$

Upoštevali smo $l \ll d$ in v števcu zanemarili člena $3dl^2$ in l^3 v primerjavi z $3d^2l$ in v imenovalcu l v primerjavi z d.

1: tekmovalec se zaveda, da mora izraz za l razviti po majhnih l/d

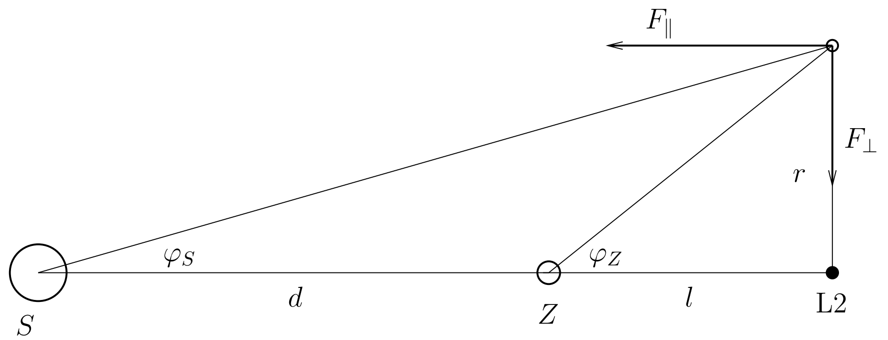
Po preureditvi sledi

$$\frac{1}{l^2} = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3l}{d^3}\,, \qquad \frac{d^3}{l^3} = \frac{3m_S}{m_Z}\,, \qquad l = d\,\sqrt[3]{\frac{m_Z}{3m_S}} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,d = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

1: pravilen končni izraz za l

[5 t.]

b) Na sliki so prikazane komponente rezultante sil na teleskop na oddaljenosti r od točke L2. Predpostavljamo, da je r mnogo manjši od l. (Na sliki je zaradi preglednosti razdalja r narisana pretirano velika.)



Komponenta vsote sil, vzporedna z zveznico Sonce-Zemlja, je enaka:

$$F_\parallel = \frac{G m m_S}{(d + l)^2}\cos\varphi_S + \frac{G m m_Z}{l^2}\cos\varphi_Z \approx \frac{G m m_S}{(d + l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2}\,,$$

pri čemer smo upoštevali $r \ll l$ in $r \ll d$, kar pomeni, da sta kota zelo majhna in velja $\cos\varphi_Z \approx 1$ in $\cos\varphi_S \approx 1$. Sila je praktično enaka kot v točki L2, kar zagotavlja, da je obhodni čas teleskopa okoli Sonca enak Zemljinemu. Pomeni tudi, da mora teleskop krožiti na konstantni razdalji glede na Zemljo in glede na Sonce, torej v ravnini, pravokotni na zveznico Sonce-Zemlja-L2.

1: tekmovalec se zaveda, da teleskop kroži okoli L2 v ravnini, pravokotni na zveznico

Za kroženje okoli L2 je odgovorna komponenta vsote gravitacijskih sil, pravokotna na zveznico:

$$F_\perp = \frac{Gmm_S}{(d+l)^2}\sin\varphi_S + \frac{Gmm_Z}{l^2}\sin\varphi_Z$$

1: pravilen izraz za komponenti sil, ki sta odgovorni za kroženje okoli L2

$$F_\perp \approx \frac{Gmm_S}{(d+l)^2}\tan\varphi_S + \frac{Gmm_Z}{l^2}\tan\varphi_Z = \frac{Gmm_S}{(d+l)^2}\,\frac{r}{(d+l)} + \frac{Gmm_Z}{l^2}\,\frac{r}{l}\,.$$

Ker so koti po predpostavki majhni, smo lahko sinuse nadomestili s tangensi. Upoštevajmo še $l \ll d$ in izraz za l, izpeljan pri a):

$$F_\perp = \frac{Gmm_S\,r}{d^3} + \frac{Gmm_Z\,r}{l^3} = \frac{Gmm_S\,r}{d^3} + \frac{3Gmm_S\,r}{d^3} = \frac{4Gmm_S\,r}{d^3}\,.$$

1: komponenti sil, izraženi z r

Zapišimo še Newtonov zakona za kroženje s frekvenco $\omega_\perp$:

$$ma_r = m\omega_\perp^2 r = \frac{4Gmm_S\,r}{d^3}\,,$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje okoli L2

od koder takoj sledi

$$\omega_\perp^2 = \frac{4Gm_S}{d^3} = 4\Omega^2\,,$$

oziroma

$$\omega_\perp = 2\Omega\,, \qquad \text{ali} \qquad t_\perp = \tfrac{1}{2}T_Z = 6 \text{ mesecev}\,,$$

pri čemer je T_Z zemeljsko leto.

1: pravilna povezava z obhodnim časom Zemlje

[5 t.]

2. $d = 5$ cm, $\varphi = 15°$, $k_0 = 0{,}3$, $T_0 = 300$ K, $\rho = 2$ kg/dm^3, $\lambda = 1{,}3$ W/m K.

a) Plošča se giblje z enakomerno hitrostjo, ko dinamična sila uravnovesi trenje:

$$mg\sin\varphi = kmg\cos\varphi\,,$$

1: zapis pogoja za enakomerno gibanje plošče
od koder sledi za koeficient trenja $k = \tan\varphi$,
in iz podane enačbe za odvisnost koeficienta trenja od temperature:

$$T = \frac{k_0T_0}{k} = \frac{k_0T_0}{\tan\varphi} = 336\ \text{K} = 63\ °\text{C}\,.$$

1: pravilen izraz za T
1: pravilna numerična vrednost
[3 t.]

b) Ko plošča doseže stacionarno stanje, se temperatura spodnje ploskve T ustali, in polovica toplote, ki se sprošča na stiku, se prevaja skozi ploščo do zgornje ploskve na temperature T_0.
2: pravilen opis bilance tokov v stacionarnem stanju (lahko tudi implicitno)

Polovica sproščene toplote je enaka polovici dela trenja:

$$P_{tr} = \tfrac{1}{2}F_{tr}v = \tfrac{1}{2}k(T)mg\cos\varphi\, v$$

1: pravilen izraz za sproščeno toploto
in je enaka toplotnemu toku skozi ploščo:

$$P_{prev} = \frac{\lambda S(T - T_0)}{d}\,,$$

kjer je S površina plošče.
1: pravilen izraz za toplotni tok skozi ploščo
Velja $m = \rho Sd$, temperatura spodnje ploskve T in koeficient trenja k pa sta povezana z zvezo, izpeljano pri a). Iz $P_{tr} = P_{prev}$ sledi:

$$\tfrac{1}{2}k\rho Sdg\cos\varphi\, v = \frac{\lambda S(T - T_0)}{d}\,.$$

1: pravilen zapis bilance tokov
Velja $k = \tan\varphi$ in sledi

$$v = \frac{2\lambda(T - T_0)}{d^2\rho g\tan\varphi\cos\varphi} = \frac{2\lambda(T - T_0)}{d^2\rho g\sin\varphi} = 7{,}357\ \text{m/s} \approx 7{,}4\ \text{m/s}\,.$$

1: pravilen izraz za v
1: pravilna numerična vrednost
[7 t.]

3. $a = 10$ cm, $d = 0{,}1$ mm, $U = 1$ kV, $b = a = 10$ cm, $\varepsilon = 3$, $v = 2$ m/s.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3}C_0\,,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2/d = 8{,}9\cdot 10^{-10}$ F$= 0{,}89$ nF in je $C_1 = 0{,}30$ nF.
1: pravilen izraz za kapaciteto praznega kondenzatorja

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 = \frac{3}{7}C_0 = 0{,}38\,\text{nF}.$$

1: pravilen izraz za kapaciteto z delom traku z dielektričnostjo ε polnega kondenzatorja
1: pravilne vrednosti obeh kapacitet $C_1 = 0{,}30$ nF in $C_\varepsilon = 0{,}38$ nF
[3 t.]

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε, ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\epsilon,x} = \frac{x}{a}C_\varepsilon \qquad \text{in} \qquad C_{1,(a-x)} = \frac{a-x}{a}C_1\,.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\epsilon,x} + C_{1,(a-x)} = \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 + \frac{a-x}{a}\cdot\frac{1}{3}C_0 = \frac{1}{3}C_0 + \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0\,.$$

1: ugotovitev, da je potrebno zapisati skupno kapaciteto vzporedno vezanih kondenzatorjev, kar pomeni seštevanje kapacitet

Ko se trak giblje s hitrostjo v, je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε. Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0 = 20\,\text{s}^{-1}\cdot\frac{2}{21}C_0 = 1{,}695\,\text{nF/s} \approx 1{,}70\,\text{nF/s}.$$

1: ugotovitev, da se navidezno spreminja velikost plošč posameznega kondenzatorja – enemu kot $x(t)$ in drugemu kot $a - x(t)$ – in da je spreminjanje skupne kapacitete linearna funkcija časa

Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

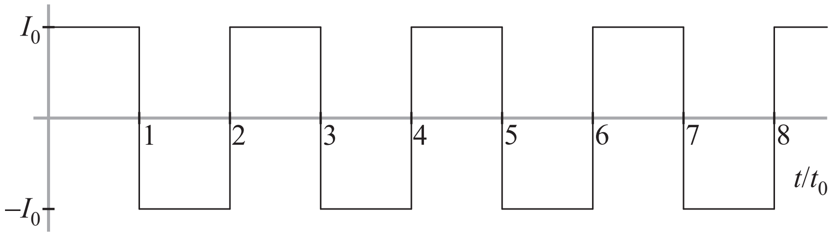
Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U, se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U\frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm\frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}UC_0 = \pm 1{,}695\,\mu\text{A} \approx \pm 1{,}70\,\mu\text{A}.$$

1: pravilna zveza med intervalno linearnim spreminjanjem kapacitete s časom in posledično intervalno konstantnim tokom skozi ampermeter

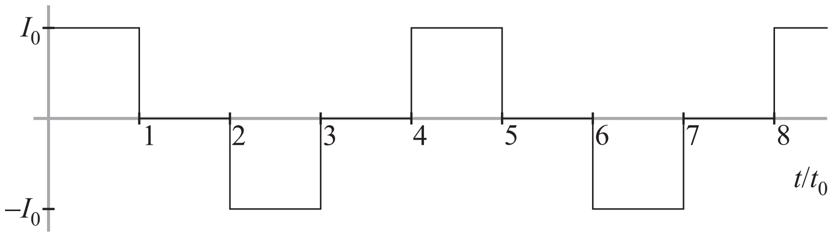
Ampermeter kaže tok velikosti $I_0 = 1{,}70\,\mu$A.
1: pravilen končni rezultat $I_0 = 1{,}70\,\mu$A
[4 t.]

c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0{,}05$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε, tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf



1: pravilna oblika grafa: pravokoten periodičen, enaki polperiodi, enaka amplituda navzgor in navzdol
1: pravilne vrednosti, perioda je $2t_0 = 0{,}2$ s, amplituda je $I_0 = 1{,}70\,\mu$A
[2 t.]

d) Ko je $b = 2a$ se pojavijo poleg intervalov, v katerih kapaciteta s časom linearno narašča ali pada, tudi intervali, ko se kapaciteta ne spreminja, zato je takrat tudi tok skozi ampermeter enak nič. Intervalu konstantnega toka v trajanju $t_0 = a/v = 0{,}05$ s sledi interval enake dolžine, ko je tok enak nič in je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo ε. V naslednjem intervalu dolžine t_0 ($2t_0 < t < 3t_0$) je tok enako velik kot v prvem intervalu, a negativen. Sledi interval, ko je tok enak nič, nato se vse skupaj ponovi. Amplituda toka je enaka kot pri c), $I = \pm I_0$. Časovna odvisnost je grafično prikazana na sliki



1: pravilna oblika grafa glede na graf pri c): med zaporednima intervaloma s konstantnim tokom $\pm I_0$ je vedno časovno enako dolg interval s tokom nič
[1 t.]