

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

### Skupina I

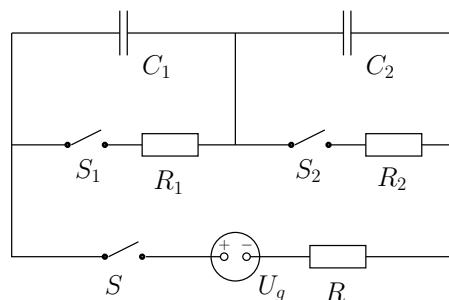
1. Na dolgem ravnem odseku dvotirne železniške proge miruje na vsakem tiru en vlak, prvi je tovorni, drugi potniški. Tovorni vlak je dolg 330 m, potniški pa 190 m. Vlaka začneta voziti istočasno drug proti drugemu, tovorni s pospeškom  $0,15 \text{ m/s}^2$  in potniški s pospeškom  $0,25 \text{ m/s}^2$ . Začetna razdalja med prednjima deloma lokomotiv je 500 m, lokomotiva vsakega od vlakov je na tistem krajišču vlaka, ki je bližje drugemu vlaku. Na opazovanem delu proge velja omejitev hitrosti 54 km/h. Oba vlaka pospešujeta do največje dovoljene hitrosti, nato vozita enakomerno z največjo dovoljeno hitrostjo.
  - a) Po kolikšnem času od začetka gibanja se prednja dela lokomotiv vlakov srečata?
  - b) Kolikšna je razdalja med prednjima deloma lokomotiv v trenutku, ko začneta oba vlaka voziti enakomerno?
2. Električni avtomobil Renault ZOE v 2,8 s enakomerno pospeši iz mirovanja do 40 km/h, ko doseže maksimalno moč. Od tam naprej pospešuje s konstantno močjo, enako moči, ki jo doseže po 2,8 s. Masa vozila je 1500 kg, zračni upor zanemarimo.
  - a) Kolikšen je pospešek avtomobila in kolikšna sila, ki ga pospešuje?
  - b) Kolikšna je trenutna moč elektromotorja pri 40 km/h? (*Namig:* Moč je premo sorazmerna s hitrostjo.) Nariši (prostorčno) graf moči v odvisnosti od časa za  $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$ .
  - c) Po kolikšnem času od starta doseže avtomobil hitrost 100 km/h?
  - d) Odpravimo se na izlet iz Maribora v Koper. Mesti sta po avtocesti oddaljeni 232 km. Povprečna poraba energije pri vožnji je 15 kWh/100 km, na pot se podamo s polnim 22 kWh akumulatorjem. Najmanj za koliko časa se moramo ustaviti na eni izmed avtocestnih hitrih polnilnic z močjo 40 kW, da nam ravno še uspe priti do cilja?
3. Na eno krajišče vrvice z gostoto 1,4 kg/L in prečnim presekom  $0,78 \text{ mm}^2$  je privezan balon, napolnjen s helijem, drugo krajišče pa prosto visi. Prostornina balona je 12 L, prazen pa tehta 10 g. Balon miruje nad gladino mirnega jezera. Gostota zraka je 1,21 g/L, gostota helija pa 0,17 g/L.
  - a) Kolikšna naj bo dolžina vrvice, da balon in vrvica mirujeta v zraku?
  - b) Kolikšna dolžina vrvice je pod vodo, ko je balon v ravnovesju, če je celotna dolžina vrvice 3,0 m?
  - c) Vrvico pri vprašanju b) prerežemo tik nad gladino. Kako se balon z vrvico giblje takoj po rezu? (Če ugotoviš, da se giblje enakomerno, podaj smer in velikost hitrosti, če ugotoviš, da se giblje pospešeno, pa smer in velikost pospeška.)

Skupina II

1. Polna plinska jeklenka s prostornino 20 L vsebuje 10 kg utekočinjene mešanice propan-butana s specifično sežigno toploto 48 MJ/kg in kilomolsko maso 50 kg/kmol. Jeklenko priključimo na plinski gorilnik.

- Koliko energije, ki bi jo lahko porabili za segrevanje, ostane v jeklenki, potem ko plamen ugasne, če je temperatura okolice  $-10^\circ\text{C}$  in tlak 1 bar? Plamen gori, če je tlak v jeklenki vsaj 0,2 bara večji od zunanjega.
- Izkoristek želimo povečati, zato del energije žrtvujemo za segrevanje jeklenke. Skupna toplotna kapaciteta jeklenke in okoliškega zraka je 8,0 kJ/K, toplotno kapaciteto plina pa lahko zanemarimo. Koliko dodatne koristne toplote pridobimo, če jeklenko segrejemo za 10 K? (Dovedena toplota, potrebna za segretje telesa s toplotno kapaciteto  $C$  za temperaturno razliko  $\Delta T$ , je  $Q = C\Delta T$ .)
- Na kolikšno temperaturo moramo segreti jeklenko, da pridobimo največ dodatne koristne toplote? Nalogo reši tako, da računaš razliko med dodatno toploto in toploto, potrebno za segrevanje jeklenke, v korakih po 10 K (vse dokler ne najdeš optimalne temperature).

2. Vezje na sliki priključimo na baterijo z gonilno napetostjo 9 V in zanemarljivim notranjim uporom. Vrednosti elementov na sliki so  $R = 9\ \Omega$ ,  $R_1 = 15\ \Omega$ ,  $R_2 = 3\ \Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 10\ \mu\text{F}$ . Vsa tri stikala so sprva razklenjena.



a) Najprej sklenemo samo stikalo  $S$ . Kolikšni sta napetosti na kondenzatorjih  $C_1$  in  $C_2$  po dovolj dolgem času?

- Nato sklenemo še stikalo  $S_2$ . (Stikalo  $S$  ostane sklenjeno, stikalo  $S_1$  ni sklenjeno.) Kolikšni sta sedaj končni napetosti na obeh kondenzatorjih?
- Na koncu sklenemo še stikalo  $S_1$ , tako da so vsa tri stikala sklenjena. Kolikšni sta sedaj končni napetosti na kondenzatorjih?

3. O žarnici vemo: ko je na žarnici napetost 3 V, teče skozi žarnico tok 80 mA. Žarnico priključimo na iztrošeno baterijo, ki ima gonilno napetost 3 V in notranji upor  $5\ \Omega$ . Pri vprašanjih a) in b) privzemi, da je upor žarnice neodvisen od temperature.

- Kolikšna je moč žarnice, ki ustreza zapisanima podatkom o žarnici?
- S kolikšno močjo sveti, ko jo priključimo na iztrošeno baterijo?
- Kolikšna bi morala biti gonilna napetost iztrošene baterije z notranjim uporom  $5\ \Omega$ , da bi žarnica svetila z močjo pri a)?
- V resnici se upor žarilne nitke v žarnici spreminja s temperaturo. Iz predpostavke, da je upor žarnice sorazmeren z absolutno temperaturo žarilne nitke, in predpostavke, da je moč žarnice, ki oddaja energijo s sevanjem, sorazmerna s četrto potenco absolutne temperature žarilne nitke, dobimo med uporom  $R$  in močjo  $P$  enačbo

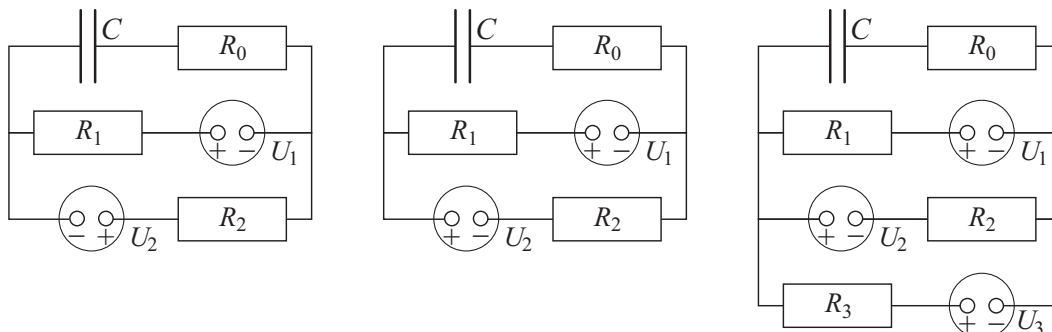
$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^4 = \frac{P}{P_0},$$

kjer je  $P_0$  moč žarnice in  $R_0$  upor žarnice, ko sveti z močjo, izračunano pri a).

- Iz rezultata, s kolikšno močjo sveti žarnica pri vprašanju b) in podane enačbe med uporom in močjo, izračunaj upor žarnice, ko je vezana na iztrošeno baterijo.
- Uporabi to vrednost upora in na novo izračunaj moč, s katero sveti žarnica.

Skupina III

1. Janez ima električne elemente: upornike z enakimi upori  $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 150 \Omega$ , kondenzator s kapaciteto  $C = 1 \text{ nF}$  in vire z gonilnimi napetostmi  $U_1 = 15 \text{ V}$  in  $U_2 = U_3 = 12 \text{ V}$  in zanemarljivimi notranjimi upori. Najprej sestavi električno vezje na levi shemi.



- Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?
  - Nato obrne polariteto vira 2 in dobi vezje na srednji shemi. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?
  - Nazadnje vezju iz vprašanja b) doda še upornik  $R_3$  in vir 3, da dobi shemo na desni. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?
2. Zaprt akvarij z dimenzijami  $80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  je poln umazane vode z absorpcijskim koeficientom  $k = 0,8 \text{ m}^{-1}$ . Vsaka od šestih sten akvarija je debela  $6 \text{ mm}$  in ima toplotno prevodnost  $0,03 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , voda v akvariju je dobro premešana.

*Pojasnilo:* Gostota svetlobnega toka v absorptivnem sredstvu pojema eksponentno z razdaljo  $x$  kot

$$j(x) = j(0) e^{-kx}.$$

- Na stransko ploskev akvarija ( $80 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ ) pravokotno vpada sončna svetloba z gostoto svetlobnega toka  $400 \text{ Wm}^{-2}$ . Na razdalji  $50 \text{ cm}$  se del svetlobnega toka absorbira, drugi del pa skozi nasprotno stransko ploskev zapusti akvarij. Odboje svetlobe na prehodu v akvarij in iz njega zanemari. Koliko energije se vsako sekundo absorbira v umazani vodi?
  - Za koliko je po dolgem času temperatura vode v akvariju višja od okoliške temperature?
  - Ko skrbnik akvarija zamenja umazano vodo s čisto, opazi, da je ob enakih svetlobnih pogojih temperatura v akvariju eno stopinjo nad zunanjo. Izračunaj absorpcijski koeficient čiste vode.
3. Na eno krajišče vrvice z gostoto  $1,4 \text{ kg/L}$ , prečnim presekom  $0,78 \text{ mm}^2$  in dolžino  $3,0 \text{ m}$  je privezan balon, napolnjen s helijem. Prostornina balona je  $12 \text{ L}$ , prazen pa tehta  $10 \text{ g}$ . Balon miruje nad gladino mirnega jezera, tako da je drugo krajišče v vodi. Temperatura je  $16 \text{ }^\circ\text{C}$ , tlak v balonu in okolici je  $1 \text{ bar}$ , kilomolska masa zraka je  $29 \text{ kg/kmol}$ , helija pa  $4 \text{ kg/kmol}$ .
- Kolikšna dolžina vrvice je pod vodo, ko je balon v ravnovesju?
  - S kolikšnim nihajnim časom zaniha, če ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege?

1. Podatki:  $d = 500$  m,  $a_1 = 0,15$  m/s<sup>2</sup>,  $l_1 = 330$  m,  $a_2 = 0,25$  m/s<sup>2</sup>,  $l_2 = 190$  m,  $v_0 = 54$  km/h = 15 m/s.

a) Potniški (hitreje pospešuje) vlak pospešuje  $t_2 = v_0/a_2 = 60$  s. V času  $t_2$  opravi pot  $s_2 = 450$  m. Očitno se prednja dela vlakov srečata, ko oba vlaka še pospešujeta. Torej velja

$$d = \frac{1}{2} a_1 t_a^2 + \frac{1}{2} a_2 t_a^2$$

in

$$t_a = \sqrt{2d/(a_1 + a_2)} = 50 \text{ s.}$$

[4 t.]

b) Tovorni vlak potrebuje  $t_1 = v_0/a_1 = 100$  s, da doseže hitrost  $v_0$ . Potniški vlak doseže to hitrost že prej, saj hitreje pospešuje. Končno hitrost je dosegel že ob času  $t_2 = v_0/a_2 = 60$  s in se od tega časa naprej giblje enakomerno. Ob času  $t_1$  opravi tovorni vlak pot

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

[2 t.]

potniški pa

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_0(t_1 - t_2).$$

[2 t.]

Razdalja med prednjima deloma vlakov je

$$r_b = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_0(t_1 - t_2) - d. = 1300 \text{ m.}$$

[2 t.]

2. Podatki:  $t_a = 2,8$  s,  $v_a = 40$  km/h,  $m = 1500$  kg,  $v_0 = 100$  km/h,  $w = 15$  kWh/100 km,  $W_a = 22$  kWh,  $P_p = 40$  kW,  $s = 232$  km.

a) Pospešek izračunamo iz enačbe za enakomerno pospešeno gibanje; silo pa iz 2. Newtonovega zakona:

$$a = \frac{v_a}{t_a} = 4,0 \text{ m/s}^2, \quad F = ma = 6,0 \text{ kN}.$$

[2 t.]

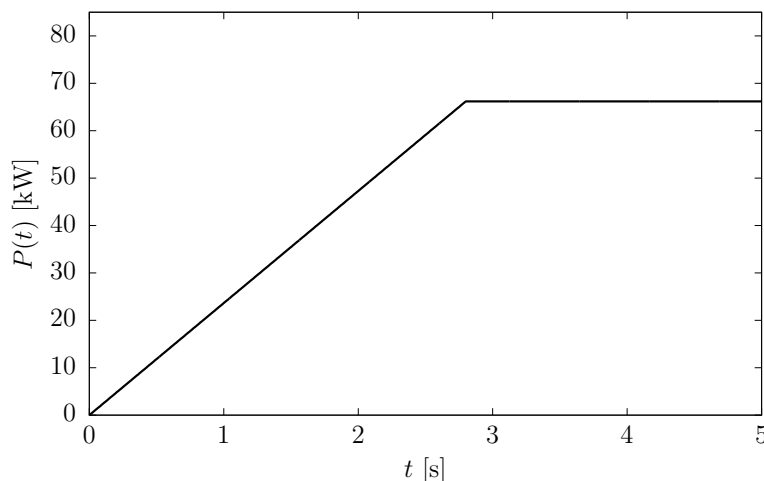
b) Moč premo sorazmerna s silo in hitrostjo; pri hitrosti 40 km/h je enaka

$$P = F v_a = 66,0 \text{ kW}$$

in jo doseže po  $t_1 = 2,8$  s.

[2 t.]

Po tem je moč konstantna.



[1 t.]

c) Povečanje kinetične energije avtomobila od hitrosti  $v_a$  do končne hitrosti  $v_0$  gre na račun dela. Ker je moč konstantna, je delo kar premo sorazmerno s časom,  $A = Pt$ . Velja

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = Pt, \quad t = \frac{m(v_0^2 - v_a^2)}{2P} = 7,4 \text{ s}.$$

Hitrost 100 km/h doseže po  $t = 2,8 \text{ s} + 7,4 \text{ s} = 10,2 \text{ s}$ .

[3 t.]

d) Celotna poraba energije je  $W = ws = 34,8$  kWh. Akumulator drži  $W_a = 22$  kWh, torej potrebujemo še  $\Delta W = W - W_a = 12,8$  kWh. To napolnimo v  $t = \Delta W / P_p = 0,32 \text{ h} = 19,2 \text{ min}$ .

[2 t.]

3. Podatki:  $\rho_{\text{vrv}} = 1,4 \text{ kg/L}$ ,  $S = 0,78 \text{ mm}^2$ ,  $V_b = 12 \text{ L}$ ,  $m_b = 10 \text{ g}$ ,  $\rho_{\text{zrak}} = 1,21 \text{ g/L}$ ,  $\rho_{\text{He}} = 0,17 \text{ g/L}$ ,  $l = 3,0 \text{ m}$ .

a) V ravnovesju je vzgon zraka enak teži balona, helija v balonu in vrvic:

$$\rho_{\text{zrak}} V_b g = m_b g + \rho_{\text{He}} V_b g + \rho_{\text{vrv}} S x g$$

[2 t.]

Za dolžino vrvic  $x$  sledi

$$x = \frac{(\rho_{\text{zrak}} - \rho_{\text{He}}) V_b - m_b}{\rho_{\text{vrv}} S} = 2,27 \text{ m} \approx 2,3 \text{ m}.$$

[1 t.]

b) V tem primeru vzgon zraka in vzgon vode na del vrvic, ki je pod vodo, uravnesi težo balona, helija v balonu in vrvic z dolžino  $l$ . Dolžino potopljenega dela vrvic označimo z  $z$ :

$$\rho_{\text{zrak}} V_b g + \rho_{\text{voda}} S z g = m_b g + \rho_{\text{He}} V_b g + \rho_{\text{vrv}} S l g$$

[2 t.]

Dobimo

$$z = \frac{m_b + \rho_{\text{vrv}} S l - (\rho_{\text{zrak}} - \rho_{\text{He}}) V_b}{\rho_{\text{voda}} S} = 1,02 \text{ m} \approx 1,0 \text{ m}.$$

[1 t.]

c) Prvi možni razmislek: Ko prerežemo vrvico, je dolžina vrvic, pritrjene na balon, manjša kot v primeru a). Sile niso v ravnovesju in zato se balon pospešeno dviga.

Drugi možni razmislek: Sila na potopljeni del vrvic kaže navzdol, saj je gostota vrvic večja od gostote vode. Ko vrvico prerežemo, pa prispevek odrezanega dela vrvic k vsoti sil manjka in sila na ostanek balon deluje navpično navzgor.

[2 t.]

Sila na balon s prerezano vrvico je enaka razliki med vzgonom zraka in vsoto teže balona s helijem in teže vrvic:

$$F = \rho_{\text{zrak}} V_b g - m_b g - \rho_{\text{He}} V_b g - \rho_{\text{vrv}} S (l - z) g = (\rho_{\text{vrv}} - \rho_{\text{voda}}) S z g = 3,2 \text{ mN}.$$

[1 t.]

Balon se giblje pospešeno s pospeškom

$$a = \frac{F}{m_b + m_{\text{He}} + m_{\text{vrv}}} = \frac{F}{m_b + \rho_{\text{He}} V_b + \rho_{\text{vrv}} S (l - z)} = 0,22 \text{ m/s}^2.$$

[1 t.]

1. Podatki:  $V = 20 \text{ L}$ ,  $m_0 = 10 \text{ kg}$ ,  $q = 48 \text{ MJ/kg}$ ,  $M = 50 \text{ kg/kmol}$ ,  $T_0 = -10^\circ \text{ C}$ ,  $p_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $\Delta p = 0,2 \text{ bar}$ ,  $C = 8,0 \text{ kJ/K}$ ,  $\Delta T = 10 \text{ K}$ .

Maso plina, ki ostane v jeklenki, izračunamo iz splošne plinske enačbe:

$$m = \frac{MpV}{RT_0} = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT_0} = 55 \text{ g}.$$

[2 t.]

Pri gorenju bi ostanek plina oddal  $Q = mq = 2,64 \text{ MJ}$  toplote.

[1 t.]

- b) Če jeklenko segrejemo na  $T = T_0 + \Delta T$ , ostane v jeklenki manj plina. Za segrevanje lahko porabimo

$$\Delta m = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT_0} - \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT} = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{R} \left[ \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + \Delta T} \right] = 2,0 \text{ g}$$

in pridobimo  $Q_{\text{odd}} = 96 \text{ kJ}$  toplote.

[2 t.]

Del te toplote se porabi za segrevanje okolice:  $Q_{\text{izg}} = C\Delta T = 80 \text{ kJ}$ .

[1 t.]

Pridobimo torej  $Q_{\text{odd}} - Q_{\text{izg}} = 16 \text{ kJ}$  koristne toplote.

[1 t.]

- c) Postopek nadaljujemo, tako da je v  $n$ -tem koraku temperatura plina  $T_n = T_0 + n\Delta T$  in pridobljena toplota enaka

$$Q_{\text{odd}}(n) = \frac{qM(p_0 + \Delta p)V}{R} \left[ \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + n\Delta T} \right]$$

[1 t.]

in izgube  $Q_{\text{izg}}(n) = nC\Delta T$ .

[1 t.]

Rezultati za nekaj  $n$ -jev so v tabeli:

$n$	$T_n$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$Q_{\text{odd}}$ [kJ]	$Q_{\text{izg}}$ [kJ]	$Q_{\text{kor}}$ [kJ]
1	0	96	80	16
2	10	186	160	26
3	20	270	240	30
4	30	348	320	28

Vidimo, da največ koristne toplote dobimo, če jeklenko segrejemo na  $20^\circ\text{C}$ .

[1 t.]



2. Podatki:  $U_g = 9 \text{ V}$ ,  $R = 9 \Omega$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$ .

a) Po dovolj dolgem času skozi vezje ne teče tok, zato je padec napetosti na uporniku  $R$  enak 0 in je vsa napetost na zaporedno vezanih kondenzatorjih  $C_1$  in  $C_2$  in velja  $U_g = U_1 + U_2$ .

[2 t.]

Ker imata kondenzatorja enaki kapaciteti, je na obeh enaka napetost. Sledi

$$U_1 = \frac{U_g}{2} = 4,5 \text{ V} \quad \text{in} \quad U_2 = \frac{U_g}{2} = 4,5 \text{ V}.$$

[1 t.]

b) Po dovolj dolgem času se kondenzator  $C_1$  napolni in skozi upornika  $R_2$  in  $R$  tok več ne teče. Zato sta padca napetosti na  $R_2$  in  $R$  enaka 0.

[2 t.]

Na kondenzatorju  $C_2$  je enaka napetost kot na uporniku  $R_2$ , torej  $U_2 = 0$ .

[1 t.]

Vsa napetost vira je na kondenzatorju  $C_1$ :

$$U_1 = U_g = 9,0 \text{ V}.$$

[1 t.]

c) Po dovolj dolgem času se kondenzatorja  $C_1$  in  $C_2$  napolnita in tok teče le skozi upornika  $R_1$  in  $R_2$  (in seveda  $R$ ). Tok je enak

$$I = \frac{U_g}{R + R_1 + R_2} = 0,33 \text{ A}.$$

[1 t.]

Napetost na  $C_1$  je enaka padcu napetosti na  $R_1$ :

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1 U_g}{R + R_1 + R_2} = 5,0 \text{ V}$$

in napetost na  $C_2$  padcu na  $R_2$ :

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2 U_g}{R + R_1 + R_2} = 1,0 \text{ V}.$$

[2 t.]

3. Podatki:  $U_0 = 3 \text{ V}$  (nazivna napetost),  $I_0 = 80 \text{ mA}$  (nazivni tok),  $U_g = 3 \text{ V}$ ,  $R_n = 5 \Omega$ .

a) Moč, izračunano iz podatkov za žarnico, imenujemo *nazivna* moč in je  $P_0 = U_0 I_0 = 240 \text{ mW}$ .

[1 t.]

b) Nazivni upor žarnice je  $R_0 = U_0 / I_0 = 37,5 \Omega$ .

[1 t.]

Zaradi notranjega upora baterija  $R_n = 5 \Omega$  teče skozi žarnico tok

$$I_a = \frac{U_g}{(R_0 + R_n)} = 70,6 \text{ mA}.$$

[1 t.]

Moč žarnice je

$$P_a = R_0 I_a^2 = \frac{U_g^2 R_0}{(R_0 + R_n)^2} = 187 \text{ mW} = 0,78 P_0.$$

[2 t.]

c) Gonilna napetost  $U'_g$  mora biti toliko višja, da je padec napetosti na žarnici enak nazivni napetosti  $U_0$ . Velja  $U'_g : (R_0 + R_n) = U_0 : R_0$ , zato sledi

$$U'_g = \frac{U_0 (R_0 + R_n)}{R_0} = 3,4 \text{ V}.$$

[2 t.]

d)

i) Izračunan moč  $P_a$  je manjša od  $P_0$ . Upor žarnice ocenimo po enačbi, ki povezuje upor in moč

$$R = R_0 (P_a / P_0)^{1/4} = 35,225 \Omega.$$

[1 t.]

ii) Od tu izračunamo izsevano moč žarnice kot

$$P_c = \frac{U_g^2 R}{(R + R_n)^2} = 196 \text{ mW} = 0,82 P_0. \quad (1)$$

[2 t.]

1. Podatki:  $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 150 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ nF}$ ,  $U_1 = 15 \text{ V}$ ,  $U_2 = U_3 = 12 \text{ V}$ .

a) Zaporedna vezava z dvema viroma, ki poganjata tok v isto smer, da za tok

$$I_a = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

[1 t.]

Skozi upornik  $R_0$  tok ne teče, zato je padec napetosti na  $R_0$  enak 0. Zaradi toka skozi upornik  $R_1$  je napetost na kondenzatorju

$$U_a = U_1 - I_a R_1 = \frac{U_1 R_2 - U_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_1 - U_2}{2} = 1,5 \text{ V} \quad (2)$$

[2 t.]

in naboj

$$e_a = U_a C = 1,5 \text{ nAs}.$$

[1 t.]

b) Tokrat vir 2 poganja tok v nasprotno smer, a ker je  $U_1 > U_2$ , teče tok v isto smer kot prej in je enak

$$I_b = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

[1 t.]

Ustrezna napetost in naboj na kondenzatorju sta po vrsti

$$U_b = U_1 - I_b R_1 = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_1 + U_2}{2} = 13,5 \text{ V}, \quad (4)$$

$$e_a = U_a C = 13,5 \text{ nAs}. \quad (5)$$

[1 t.]

c) Po dolgem času, ko se na kondenzatorju vzpostavi končna napetost, je veja s kondenzatorjem in upornikom  $R_0$  neaktivna (po njej ne teče tok), zato imamo opravka le s tremi različnimi tokovi  $I_1$ ,  $I_2$  in  $I_3$ , ki jih definiramo pozitivno, ko tečejo, kot bi jih določala napetost vira  $U_1$ , ki je največja. Lahko bi izbrali drugače, a tako je velika verjetnost, da bodo izračunane vrednosti tokov pozitivne. Da torej tokovi tečejo v smereh, ki jih predvidevamo. Kirchhoffov izrek v vozlišču zahteva

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (6)$$

medtem ko se Kirchhoffova zakona v zanki z upornikoma  $R_1$  in  $R_2$  ter v zanki z upornikoma  $R_2$  in  $R_3$  po vrsti glasita

$$U_1 - U_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2, \quad (7)$$

$$U_2 - U_3 = I_3 R_3 - I_2 R_2. \quad (8)$$

[2 t.]

Iz (8) dobimo zaradi  $U_2 = U_3$  in  $R_2 = R_3$ :

$$I_2 = I_3 \frac{R_3}{R_2} = I_3. \quad (9)$$

Iz (6) in (9) dobimo

$$I_1 = I_3 \frac{R_2 + R_3}{R_3} = 2I_2. \quad (10)$$

Iz enačbe (7) sledi

$$U_1 - U_2 = I_2(2R_1 + R_2), \quad I_2 = \frac{U_1 - U_2}{2R_1 + R_2} = 6,67 \text{ mA}$$

in  $I_1 = 2I_2 = 13,33 \text{ mA}$ .

[1 t.]

Zaradi toka skozi upornik  $R_1$  je napetost na kondenzatorju

$$U_c = U_1 - I_1 R_1 = U_1 - \frac{2(U_1 - U_2)}{3} = 13,0 \text{ V}. \quad (11)$$

Od tu je naboj enak

$$e_c = U_c C = 13,0 \text{ nAs}.$$

[1 t.]

Zaradi kompletnosti podajamo še splošni izraz za primer, ko upori niso enaki. Iz (7), (9) in (10) dobimo

$$I_3 = \frac{(U_1 - U_2)R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (12)$$

in

$$I_1 = \frac{(U_1 - U_2)(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (13)$$

Zaradi toka skozi upornik  $R_1$  je napetost na kondenzatorju

$$U_c = U_1 - I_1 R_1 = \frac{U_1 R_2 R_3 + U_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (14)$$

2. Podatki:  $a = 80 \text{ cm}$ ,  $b = 50 \text{ cm}$ ,  $c = 40 \text{ cm}$ ,  $j_0 = 400 \text{ Wm}^{-2}$ ,  $k = 0,8 \text{ m}^{-1}$ ,  $d = 6 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,03 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $t = 1 \text{ s}$ ,  $\Delta T' = 1 \text{ K}$ .

a) V akvarij vstopa svetlobni tok  $P_0 = j_0 S$ , kjer je  $S = ac$ . Zaradi absorpcije se na poti do zadnje stene gostota toka zmanjša na  $j_1 = j(b) = j_0 e^{-kb}$ , zato izstopa manj svetlobnega toka,  $P_1 = j_1 S$ . Skupaj voda absorbira razliko teh dveh svetlobnih tokov:

$$P_{\text{abs}} = P_0 - P_1 = ac j_0 (1 - e^{-kb}) = 42 \text{ W}.$$

Vsako sekundo se absorbira toplota  $Q = P_{\text{abs}} t = 42 \text{ J}$ .

[3 t.]

b) Absorbirana toplota segreva vodo, vse dokler se absorbirani toplotni tok v vodi ne izenači s toplotnim tokom, ki uhaja skozi stene akvarija zaradi temperaturne razlike  $\Delta T$  med temperaturo vode v akvariju in temperature okolice:

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{prev}} = S \frac{\lambda \Delta T}{d}.$$

[2 t.]

Površina akvarija je  $S = 2(ab + bc + ca) = 1,84 \text{ m}^2$ . Temperaturna razlika je

$$\Delta T = \frac{P_{\text{abs}} d}{\lambda S} = 4,6 \text{ K}.$$

[2 t.]

c) V tem primeru je prejeta moč enaka moči, ki se prevaja skozi stene pri temperaturni razliki  $\Delta T'$ :

$$P'_{\text{abs}} = P'_{\text{prev}} = S \frac{\lambda \Delta T'}{d} = 9,2 \text{ W}.$$

[1 t.]

Iz enačbe za absorbirano moč pri absorpcijskem koeficientu  $k'$ :

$$P'_{\text{abs}} = ac j_0 (1 - e^{-k'b})$$

sledi

$$k' = -\frac{1}{b} \ln \left( 1 - \frac{P'_{\text{abs}}}{ac j_0} \right) = 0,15 \text{ m}^{-1}.$$

[2 t.]

3. Podatki:  $\rho_{\text{vrv}} = 1,4 \text{ kg/L}$ ,  $S = 0,78 \text{ mm}^2$ ,  $V_b = 12 \text{ L}$ ,  $m_b = 10 \text{ g}$ ,  $l = 3,0 \text{ m}$ ,  $T = 16^\circ\text{C}$ ,  $M_{\text{zrak}} = 29 \text{ kg/kmol}$ ,  $M_{\text{He}} = 4 \text{ kg/kmol}$ ,  $p = 1 \text{ bar}$ .

a) Vzgon zraka in vzgon vode na del vrvice, ki je pod vodo, uravnovesi težo balona, helija v balonu in vrvice z dolžino  $l$ . Dolžino potopljenega dela vrvice označimo s  $h$ :

$$\rho_{\text{zrak}}V_b g + \rho_{\text{voda}}Shg = m_b g + \rho_{\text{He}}V_b g + \rho_{\text{vrv}}Slg.$$

[2 t.]

Gostoti zraka in helija izračunamo iz splošne plinske enačbe  $pV = mRT/M$  oziroma  $\rho = m/V = pM/RT$ :

$$\rho_{\text{zrak}} = \frac{pM_{\text{zrak}}}{RT} = 1,21 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_{\text{He}} = \frac{pM_{\text{He}}}{RT} = 0,17 \text{ kg/m}^3.$$

[1 t.]

Iz enačbe za ravnovesje balona sledi

$$h = \frac{m_b + \rho_{\text{vrv}}Sl - (\rho_{\text{zrak}} - \rho_{\text{He}})V_b}{\rho_{\text{voda}}S} = 1,02 \text{ m} \approx 1,0 \text{ m}.$$

[1 t.]

b) Če vrvice potegnemo navzdol za  $x$ , se poveča vzgon za težo dodatno izpodrinjene vode v prostornini  $Sx$ :

$$F = g\rho_{\text{voda}}Sx.$$

[2 t.]

Sila kaže proti ravnovesni legi in je premo sorazmerna z odmikom iz ravnovesne lege, tako kot pri nihalu na vijačno vzmet. Koeficientu vzmeti ustreza izraz

$$k = g\rho_{\text{voda}}S.$$

[1 t.]

Balon z vrvice niha z nihajnim časom

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

[1 t.]

pri čemer je  $m$  vsota mas praznega balona, helija in vrvice:

$$m = m_b + \rho_{\text{He}}V_b + \rho_{\text{vrv}}Sl.$$

[1 t.]

Izračunamo

$$k = g\rho_{\text{voda}}S = 7,64 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}, \quad m = 14,2 \text{ g}$$

in

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 8,9 \text{ s.}$$

[1 t.]