Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. V trenutno veljavni prometni zakonodaji je omejitev hitrosti v naselju 50 km/h, včasih pa je bila 60 km/h. V nalogi nas zanima, kako sprememba prometnih predpisov vpliva na varnost v prometu. Obravnavamo dogodek, ko se želi voznik zaradi nepričakovane situacije čim hitreje ustaviti. Za reakcijski čas voznika vzamemo 1 s; to je čas, ki mine od zaznave nepričakovane situacije do začetka voznikovega zaviranja.

   a) Kolikšno pot prevozi avtomobil od trenutka, ko zazna voznik nepričakovano situacijo v prometu, pa do zaustavitve, če je prej vozil s konstantno hitrostjo 50 km/h? Med zaviranjem je pojemek avtomobila 12 m/s^2.

   b) Isti avtomobil vozi po isti cesti s hitrostjo 60 km/h in voznik zazna nepričakovano situacijo v prometu. S kolikšno hitrostjo še vozi avtomobil na razdalji, ki je enaka prevoženi poti iz primera a)?

   Prometni predpisi pri slabših vremenskih pogojih ne določajo dodatnih kvantitativnih omejitev. V teh primerih moramo hitrost prilagoditi pogojem na cesti.

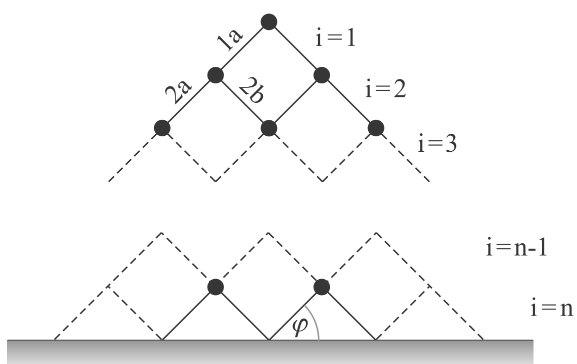
   c) S kolikšno hitrostjo še smemo voziti po zasneženi cesti, da bo pot od zaznave do zaustavitve enaka kot v primeru a)? Na zasneženi cesti je pojemek avtomobila med zaviranjem 3 m/s^2.

2. Navpična simetrična struktura na sliki je sestavljena iz majhnih kroglic z maso 150 g in togih nosilcev z zanemarljivo maso. Posamezen nosilec zdrži silo 12 N. Temeljni nosilci so vpeti v podlago. Kot φ na sliki je 45°.

   a) Nariši sile na kroglico na vrhu strukture in izračunaj silo, s katero nosilec (1a) deluje na kroglico.

   b) Nariši sile na kroglico, ki je v stičišču nosilcev (1a), (2a) in (2b), in izračunaj sili na nosilca (2a) in (2b).

   c) Iz največ koliko nadstropij (n na sliki) je lahko sestavljena struktura, da temeljni nosilci še zdržijo?



3. Lahka elastika z dolžino 0,5 m in s prožnostnim koeficientom 5 N/m visi s stropa. Na spodnje krajišče elastike pritrdimo majhno kroglico z maso 50 g. Na elastiko namestimo še eno kroglico z enako maso, ki lahko brez trenja drsi po elastiki. Dvignemo jo do stropa in spustimo.

   a) Do kolikšne največje dolžine se raztegne elastika po prožnem trku kroglic? [Če veš, kolikšni sta hitrosti dveh enakih teles po prožnem centralnem trku, pri čemer je eno telo pred trkom mirovalo, ta rezultat lahko uporabiš in ti ga ni treba dokazati.]

   Pritrjeno kroglico s spodnjega krajišča elastike odstranimo in tam naredimo lahek majhen vozel (dolžina visečega dela elastike se zanemarljivo malo spremeni), tako da druga kroglica ne more zdrsniti z elastike. Drugo kroglico spet dvignemo do stropa in spustimo.

   b) Do kolikšne največje dolžine se raztegne elastika?

Skupina II

1. Čaj navadno pripravimo tako, da vodo zavremo, nato jo nalijemo v skodelico s čajnim filtrom in počakamo, da se ohladi, preden ga spijemo. Ko se nam mudi, bi radi čaj na hitro ohladili. Poleg skodelice s čajem vzamemo še eno enako prazno skodelico ter čaj prelivamo iz ene v drugo, pri čemer skodelico, ki je v danem koraku prazna, ohladimo na temperaturo vode iz pipe, preden vanjo spet nalijemo čaj. V vsakem koraku počakamo, da se vzpostavi toplotno ravnovesje. Na ta način temperatura zelo hitro pada s koraki prelivanja.

   V skodelici z maso $m_s = 300\,\mathrm{g}$ je čaj z maso $m = 200\,\mathrm{g}$ in začetno temperaturo $T_0 = 90\,^\circ\mathrm{C}$. Temperatura vode iz pipe je $T_p = 15\,^\circ\mathrm{C}$, specifična toplota snovi, iz katere je skodelica, je $c_s = 1000\,\mathrm{J/kgK}$ in specifična toplota čaja $c = 4200$ J/kgK. Toplotne izgube v okolico in spremembo mase čaja zaradi izhlapevanja zanemarimo.

   a) Kolikšna je temperatura čaja T_1 po tem, ko ga enkrat prelijemo v skodelico, ki je ohlajena na temperaturo vode iz pipe?
   b) Rezultat iz a) zapišemo v obliki $T_1 = \alpha T_0 + \beta$. Kolikšna sta koeficienta α in β?
   c) S pomočjo rezultata pri b) izračunaj temperaturo čaja po treh prelitjih.

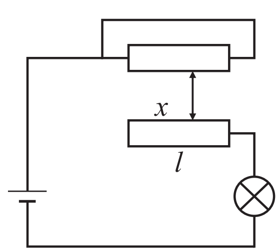
2. V laboratoriju uporabljajo v bazenu s kemično čisto vodo poseben merilni sistem, ki opozarja na morebitno naraščanje vodne gladine. Del sistema je ploščati kondenzator, sestavljen iz dveh navpičnih ravnih vzporednih kovinskih plošč, ki sta široki 0,5 m, visoki 3 m in medsebojno razmaknjeni 0,5 cm. Pri normalni višini gladine vode v bazenu je pod vodo ravno 1 m plošč. Med ploščama je napetost 1000 V, zaporedno z izvirom pa je vezan tudi ampermeter.

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja pri normalni gladini vode?
   b) Dežurni delavec je opazil, da kaže ampermeter konstanten tok 3,5 μA. Kolikšna je hitrost dviganja gladine vode v bazenu?

   Dielektričnost vode je $\varepsilon = 80$. Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε, se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

3. Dva enaka linearna upornika (upor je premo sorazmeren z dolžino) z dolžino l in maksimalnim uporom po $R_0 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ sta zvezana z žarnico in baterijo, kot kaže slika. Oba drsnika na upornikih uravnavamo s skupnim vrtljivim gumbom, ki hkrati določa enaka položaja drsnikov.

   a) Nariši nadomestno vezje. Vrednosti uporov v nadomestnem vezju izrazi z R_0, x in l.
   b) V kakšnem razmerju (x/l) mora drsnik deliti upornika, da bo žarnica svetila z nazivno močjo 0,1 W? Žarnica sveti z nazivno močjo, ko je na njej napetost 6 V. Napetost baterije je 12 V, notranji upor baterije pa je zanemarljiv.



Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

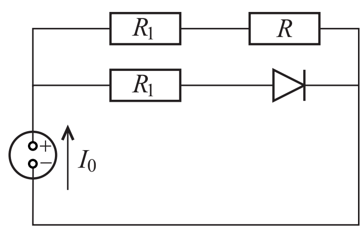
1. Kolesar se pelje po ravni cesti s konstantno hitrostjo 5 km/h. Vozi v šesti prestavi, v kateri je razmerje med številom zob sprednjega in zadnjega verižnika 34/17. Izbira pa lahko še med petimi zadnjimi verižniki, ki imajo po vrsti 20, 23, 26, 29 in 32 zob (kolo ima skupaj šest prestav). V razdalji 10 m pred vznožjem klanca z naklonom 20° pričně poganjati pedala s konstantnim navorom 100 Nm.

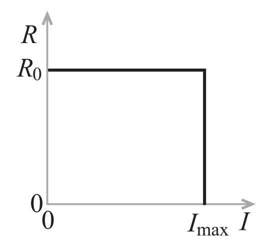
   a) S kolikšnim pospeškom se giblje med poganjanjem pedala pred vznožjem klanca?
   b) Kolikšno hitrost doseže ob vznožju klanca?
   c) Kolikšno pot vzdolž klanca prevozi, preden se ustavi, če poganja pedala ves čas s konstantnim navorom 100 Nm?
   d) V katero naslednjo (nižjo) prestavo mora prestaviti, da se ne bo ustavil?

   Masa kolesarja skupaj s kolesom je 60 kg, polmer zadnjega kolesa je 30 cm. Trenje v ležajih in zračni upor zanemari.

2. V vezju so generator stalnega toka (tokovni izvir), dioda in upori. Generator poganja, ne glede na obremenitev, ves čas konstanten tok $I_0 = 100$ mA. Upor diode je odvisen od toka, ki teče skozi diodo, kot kaže graf na sliki; dokler ne preseže mejnega toka $I_{\max} = 10$ mA, ima konstanten upor $R_0 = 1$ kΩ, nato pa pade upor na nič. Upor $R_1 = 10$ Ω.

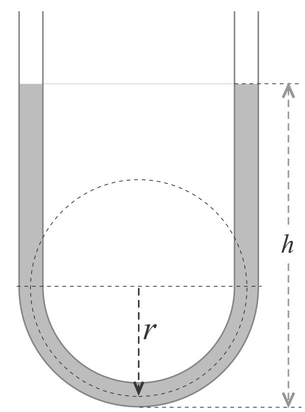
   a) Kolikšna moč se porablja na uporniku R, če ima upor 50 Ω?
   b) Kolikšna pa, če ima upor 150 Ω?
   c) Kolikšen mora biti R, da bo porabljal največjo moč?





3. Cev z okroglim presekom, ki ima notranji polmer 1 cm, zavijemo za kot 180°, v obliko črke U. Cev je v zavoju oblikovana tako, da poteka po polkrogu z radijem $r = 6$ cm v sredini cevi (glej sliko).

   a) V U cev nalijemo vodo do višine $h = 15$ cm, merjeno od najnižje točke cevi. S kolikšno frekvenco zaniha voda v cevi, če jo malo izmaknemo iz ravnovesne lege (na primer v eno ustje rahlo pihnemo)?
   b) Eno ustje cevi neprodušno zamašimo. Kolikšna je sedaj frekvenca nihanja, če je cev zamašena na višini 20 cm od najnižje točke cevi, drugo ustje cevi pa pustimo odprto? *Namig*: spremembe so hitre, za majhne x velja $(1+x)^{-a} \approx 1 - ax$.



   Gostota vode je 1000 kg/m^3, zračni tlak je 1 bar, razmerje specifičnih toplot za zrak je $\kappa = 1{,}4$.

Regijsko tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2014

21. marec 2014

Kazalo

1 Skupina I – rešitve

1. *Podatki:* $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$, $v_1 = 60\,\mathrm{km/h}$, $a = 12\,\mathrm{m/s^2}$, $a_s = 3\,\mathrm{m/s^2}$, $t_r = 1\,\mathrm{s}$.

   a) Za zaviranje porabi $t_z = v_0/a$ in pri tem opravi pot

$$s_z = v_0 t - \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2a}\,.$$

   Prištejemo še pot, ki jo prevozi enakomerno v času t_r

$$s_0 = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} = 21{,}9\,\mathrm{m}\,.$$

   [4 *t.*]

   b) V tem primeru se na koncu poti s_0 giblje s končno hitrostjo. Označimo jo z v. Za zaviranje porabi $t_z = (v_1 - v)/a$ in opravi skupno pot

$$s_0 = v_1 t_r + v_1 t_z - \tfrac{1}{2}at_z^2 = v_1 t_r + \frac{v_1(v_1 - v)}{a} - \frac{(v_1 - v)^2}{2a} = v_1 t_r + \frac{(v_1 - v)^2}{2a}\,.$$

   Od tod izluščimo

$$v = \sqrt{v_1^2 - 2a(s_0 - v_1 t_r)} = 12{,}3\,\mathrm{m/s} = 44\,\mathrm{km/h}\,.$$

   [3 *t.*]

   c) V tem primeru začetne hitrosti v ne poznamo; za pot pa velja enaka zveza kot v primeru a):

$$s_0 = v t_r + \frac{v^2}{2a_s}$$

   Za v dobimo kvadratno enačbo

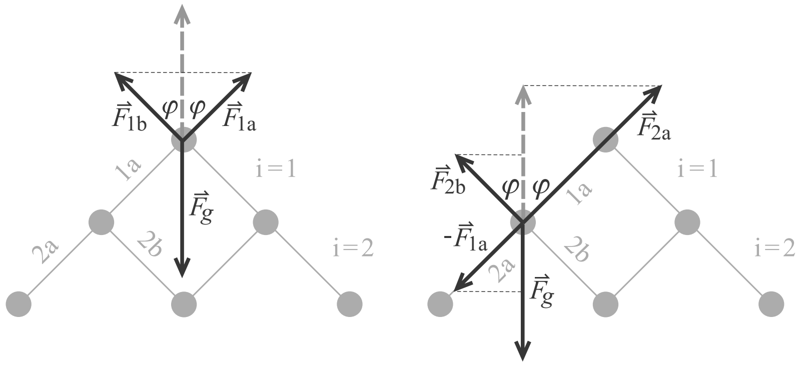
$$v^2 + 2a_s t_r v - 2a_s s_0 = 0\,.$$

   Smiselna je le pozitivna rešitev:

$$v = \sqrt{a_s^2 t_r^2 + 2a_s s_0} - a_s t_r = 8{,}9\,\mathrm{m/s} = 32\,\mathrm{km/h}\,.$$

   [3 *t.*]

2. *Podatki:* $m = 150$ g, $F_{\max} = 12$ N, $\varphi = 45°$.



a) b)

a) Iz ravnovesja v navpični smeri dobimo

$$F_g = F_{1a}\cos\varphi + F_{1b}\cos\varphi = F_{1a}\frac{1}{\sqrt{2}} + F_{1b}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zaradi simetrije sta sili F_{1b} in F_{1a} po velikosti enaki. Dobimo

$$F_{1a} = \frac{F_g}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} = 1{,}04\,\mathrm{N}\,.$$

[3 *t.*]

b) Sile na kroglico so v ravnovesju. V vodoravni smeri velja:

$$F_{2a}\sin\varphi = F_{1a}\sin\varphi + F_{2b}\sin\varphi$$

in v navpični

$$F_{2a}\cos\varphi + F_{2b}\cos\varphi = F_{1a}\cos\varphi + F_g\,.$$

Upoštevamo $\cos\varphi = \sin\varphi = 1/\sqrt{2}$ in dobimo

$$F_{2a} = F_g\sqrt{2} = 2{,}08\,\mathrm{N}\,, \qquad F_{2b} = \frac{F_g}{\sqrt{2}} = 1{,}04\,\mathrm{N}\,.$$

[4 *t.*]

c) Najbolj so obremenjene prečke na robovih strukture. Z nadaljevanjem postopka pri b) hitro uvidimo

$$F_{ia} = i\,\frac{F_g}{\sqrt{2}}\,, \qquad i = 1, \ldots n\,.$$

Da se nosilec ne bo porušil, mora veljati

$$F_{na} < F_{\max}\,, \qquad n < \frac{F_{\max}\sqrt{2}}{F_g} = \frac{F_{\max}\sqrt{2}}{mg} = 11{,}5\,.$$

Največ je lahko 11 nadstropij. [3 *t.*]

3. *Podatki:* $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $k = 5\,\mathrm{N/m}$, $m = 50\,\mathrm{g}$.

a) Ko obesimo na konec elastike kroglico, se elastika raztegne za $x_0 = mg/k = 0{,}10\,\mathrm{m}$, kar sledi iz ravnovesja sil. [1 *t.*]

Ob prožnem trku kroglic z enakimi masami se vsa kinetična energija prenese na spodnjo kroglico. Zgornja tako obmiruje, spodnja pa se začne gibati navzdol s hitrostjo $v = \sqrt{2g(l + x_0)} = 3{,}42\,\mathrm{m/s}$. [2 *t.*]

Končen razteg elastike izračunamo iz pogoja za ohranitev energije. Na začetku ima druga kroglica kinetično in potencialno energijo, če potencialno energijo merimo glede na višino, na kateri se zaustavi. Na koncu ima prožnostno energijo, pri kateri pa moramo upoštevati, da je bila elastika na začetku že raztegnjena:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgx = \tfrac{1}{2}k(x + x_0)^2 - \tfrac{1}{2}kx_0^2\,.$$

Kinetična energija je enaka spremembi potencialne energije prve kroglice:

$$mg(l + x_0) + mgx = \tfrac{1}{2}kx^2 + kx_0x\,.$$

Ker je $x_0 = mg/k$, je zadnji člen enak kar mgx, in se odšteje z enakim členom na levi. Od tod dobimo rezultat

$$x = \sqrt{\frac{2mg}{k}(l + x_0)} = 0{,}34\,\mathrm{m}\,.$$

[3 *t.*]

Celotna dolžina elastike pa je

$$l' = l + x_0 + x = 0{,}94\,\mathrm{m}\,.$$

(Priznamo oba odgovora.)

b) V tem primeru elastika sprva ni raztegnjena. Pogoj za ohranitev energije je

$$mg(l + x) = \frac{kx^2}{2}\,.$$

Dobimo kvadratno enačbo za x

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgl}{k}\,,$$

katere smiselna rešitev je

$$x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right) = x_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2l}{x_0}}\right) = 0{,}43\,\mathrm{m}\,.$$

[4 *t.*]

Celotna dolžina elastike pa je

$$l' = l + x = 0{,}93\,\mathrm{m}\,.$$

(Priznamo oba odgovora.)

2 Skupina II – rešitve

1. *Podatki:* $m_s = 300$ g, $m = 200$ g, $T_0 = 90$ °C, $T_p = 15$ °C, $c_s = 1000$ J/kgK, $c = 4200$ J/kgK.

   a) Čaj odda toploto skodelici in se pri tem ohladi na zmesno temperatura T_1, skodelica pa segreje na to temperaturo. Velja

   $$mc(T_0 - T_1) = m_s c_s (T_1 - T_p)\,, \qquad T_1 = \frac{mcT_0 + m_s c_s T_p}{mc + m_s c_s} = 70\ ^\circ\mathrm{C} = 343\ \mathrm{K}\,.$$

   [4 *t.*]

   b) Iz zgornjega rezultata razberemo, da je koeficient pred T_0 enak

   $$\alpha = \frac{mc}{mc + m_s c_s} = 0{,}737$$

   in prosti člen

   $$\beta = \frac{m_s c_s T_p}{mc + m_s c_s} = 3{,}95\ ^\circ\mathrm{C} = 76\ \mathrm{K}\,.$$

   Prva vrednost velja v primeru, ko temperature vstavljamo v °C, druga pa za K. [3 *t.*]

   c) Zveza, ki smo jo zapisali pri b) velja za poljubno temperaturo T_0, saj koeficienta nista odvisna od T_0. Uporabimo jo, da dobimo temperature pri drugem in tretjem prelitju:

   $$T_2 = \alpha T_1 + \beta = 56\ ^\circ\mathrm{C} = 329\ \mathrm{K}\,.$$
   $$T_3 = \alpha T_2 + \beta = 45\ ^\circ\mathrm{C} = 318\ \mathrm{K}\,.$$

   [3 *t.*]

2. *Podatki:* $h = 3$ m, $l = 0{,}5$ m, $d = 0{,}5$ cm, $U = 1000$ V, $I = 3{,}5\ \mu$A, $\varepsilon = 80$.

a) Kondenzator, v katerem imamo dva dielektrika (v našem primeru vodo in zrak) lahko obravnavamo kot dva vzporedno vezana kondenzatorja, v enem imamo samo zrak, v drugem pa samo vodo. Kapaciteto C ploščatega kondenzatorja s ploščino plošč S, razmikom med ploščama d in dielektrikom, ki ima dielektričnost ε izračunamo po enačbi:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{1}$$

Pri dviganju gladine se bo spreminjala ploščina obeh vzporedno vezanih kondenzatorjev. Če merimo koordinato x od spodnjega roba plošč do vodne gladine, lahko obe ploščini zapišemo kot $S_1 = (h-x)l$ in $S_2 = xl$, kjer smo z l označili širino plošč. Skupna kapaciteta obeh vzporedno vezanih kondenzatorjev ima potem obliko

$$C = \frac{\varepsilon_0(h-x)l}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 xl}{d}. \tag{2}$$

[3 *t.*]

b) Naboj na ploščah kondenzatorja je $e = CU$, vendar zaradi premikanja vodne gladine in s tem spreminjanja kapacitete kondenzatorja ni stacionaren, temveč se s časom spreminja, steče električni tok. Tok, ki ga žene napetostni izvir, teče tudi skozi zaporedno vezani ampermeter in je enak $I = \Delta e/\Delta t = U\Delta C/\Delta t$. [2 *t.*]

Spreminjanje kapacitete je odvisno le od dviganja vodne gladine, torej od spremenljivke x, ne pa od velikosti in deleža potopljene plošče na začetku, tako dobimo:

$$I = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{U\varepsilon_0 l}{d}\left(-\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}\right). \tag{3}$$

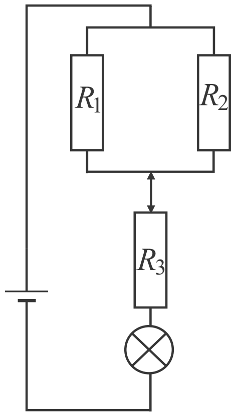
[3 *t.*]

Uvedemo hitrost dviganja vodne gladine $v = \Delta x/\Delta t$ in dobimo:

$$I = \frac{U\varepsilon_0 l}{d}\,(\varepsilon - 1)\,v. \tag{4}$$

Iz zgornjega izraza hitro izračunamo, da se pri izmerjenem toku vodna gladina giblje z hitrostjo 5 cm/s. [2 *t.*]

3. *Podatki:* $U_0 = 12$ V, $P = 0{,}1$ W, $U = 6$ V, $R = 1000\ \Omega$.



a)Vezje kaže slika.

Vrednosti uporov so

$$R_1 = \frac{x}{l}\, R_0\,, \qquad R_2 = \frac{(l-x)}{l}\, R_0\,, \qquad R_3 = \frac{(l-x)}{l}\, R_0 = R_2\,.$$

[4 *t*.]

b) Izračunajmo najprej postopoma nadomestni upor vezja na sliki

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,, \qquad R_{12} = \frac{x(l-x)}{l^2}\, R_0$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = \left[\frac{x(l-x)}{l^2} + \frac{(l-x)}{l}\right] R_0 = \frac{l^2 - x^2}{l^2}\, R_0\,.$$

[3 *t*.]

Da bo žarnica svetila z nazivno močjo, mora biti na njej nazivna napetost U. Na upornikih mora biti napetost $U_0 - U$. Ker je $U_0 = 2U$, je napetost enaka napetosti na žarnici. To pa pomeni, da je nadomestni upor enak uporu žarnice:

$$R_{123} = R_z\,, \qquad R_z = \frac{U^2}{P} = 360\ \Omega\,.$$

Dobimo enačbo

$$\frac{l^2 - x^2}{l^2} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) = \frac{R_z}{R_0} = 0{,}36\,,$$

z rešitvijo

$$\frac{x}{l} = 0{,}8\,.$$

[3 *t*.]

Če ne upoštevamo konkretnih podatkov za napetosti, dobimo splošni rezultat

$$\frac{x}{l} = \sqrt{1 - \frac{(U_0 - U)R_z}{UR_0}}\,.$$

3 Skupina III – rešitve

1. *Podatki:* $v_0 = 5$ km/h, $s_0 = 10$ m, $\varphi = 20°$, $m = 60$ kg, $M_0 = 100$ Nm, $r = 30$ cm, $\eta_0 = 34/17$.

   a) Navor na zadnjem kolesu je enak prestavnemu razmerju, pomnoženem z navorom na pogonskem zobniku

   $$M = \frac{M_0}{\eta} = 50\,\mathrm{Nm}\,.$$

   Navor na zadnje kolo uravnovesi sila lepenja, ki deluje na stiku med kolesom in podlago[1]. Velja

   $$F_l r = M\,, \qquad F_l = \frac{M}{r} = 167\,\mathrm{N}$$

   in je pospešek kolesarja med poganjanjem enak

   $$a_0 = \frac{F_l}{m} = 2{,}78\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

   [4 *t.*]

   Ta del naloge lahko rešimo tudi z delom: Prvi vrtenju pogonskega zobnika opravi kolesar delo $A = M_0\varphi_1$, če je φ_1 zasuk verižnika. Če ni izgub, opravi pogonska sila kolesa enako delo: $A = F_k s_2 = F_k r \varphi_2$, pri čemer je φ_2 zasuk zadnjega kolesa. Od tod sledi

   $$M_0\varphi_1 = F_k r\varphi_2\,, \qquad F_k = \frac{M_0}{r\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} = \frac{M_0}{r\eta}\,,$$

   saj sta kota zasuka v *obratnem* sorazmerju s prestavnim razmerjem (zobnik z manj kolesi se hitreje vrti). Sila F_k je po velikosti enaka sili lepenja.

   b) Končno hitrost v izračunamo iz zvez

   $$v = v_0 + a_0 t \qquad s = v_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2\,,$$

   ali kar iz znane enačbe

   $$2a_0 s_0 = v^2 - v_0^2\,.$$

   Dobimo

   $$v = \sqrt{v_0^2 + 2a_0 s_0} = 7{,}58\,\mathrm{m/s}\,.$$

   [2 *t.*]

[1]Strogo gledano je to res v primeru, da je zadnje kolo zelo lahko. Doma razmisli, kako sta sila lepenja in navor povezana, če bi imelo kolo znaten vztrajnostni moment.

Nalogo je možno rešiti tudi z energijskim izrekom, tako da pri spremembi kinetične energije upoštevamo še delo navora $A = M_0\varphi$, $\varphi = s/r$.

c) Na klancu deluje na kolesarje še rezultanta sile podlage in teže – dinamična komponenta teže

$$F_d = mg\sin\varphi = 201\,\mathrm{N}\,.$$

Sila je večja od pogonske sile F_l, zato se kolesar giblje premo pojemajoče s pojemkom

$$a_p = \frac{F_d - F_k}{m} = 0{,}576\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Kolesar se ustavi v času $t = v/a_p$ in v tem času opravi pot

$$s_k = \frac{v^2}{2a_p} = 50\,\mathrm{m}\,.$$

[2 *t*.]

Tudi ta del je možno rešiti z energijskim izrekom, podobno kot primer b).

d) Da se na klancu ne bo ustavil, mora biti sila lepenja večja od dinamične komponente teže:

$$F_l > F_d\,, \qquad \frac{M_0}{\eta r} > mg\sin\varphi\,, \qquad \eta < \frac{M_0}{mgr\sin\varphi} = 1{,}65\,.$$

Računamo po vrsti: $34/20 = 1{,}70$; $34/23 = 1{,}48\ldots$ Razmerje $34/23$ je že pravo:

$$\eta = \frac{34}{23}\,.$$

Prestaviti mora v četrto prestavo. [2 *t*.]

2. *Podatki:* $I_0 = 100$ mA, $I_{\max} = 10$ mA, $R_0 = 1$ kΩ, $R_1 = 10\ \Omega$.

Pri nalogi najprej naredimo račun ob predpostavki, da je tok skozi diodo manjši od kritičnega, in za upor diode vzamemo R_0. Če se izkaže, da to ne velja, postavimo upor na 0.

a) V tem primeru imamo dva para zaporedno vezanih upornikov z uporoma $R_1 + R$ in $R_1 + R_0$, vezanih vzporedno. Tok v zgornji veji (glej sliko v besedilu naloge) je enak

$$I_R = \frac{R_1 + R_0}{R_1 + R + R_1 + R_0} I_0 = 94{,}4\ \mathrm{mA}\,,$$

v spodnji pa

$$I_D = \frac{R_1 + R}{2R_1 + R + R_0} I_0 = 5{,}6\ \mathrm{mA}\,,$$

kar je manj od kritičnega toka in postopek je pravilen. Iskana moč je

$$P_R = RI_R^2 = 0{,}45\ \mathrm{W}\,.$$

[3 *t*.]

b) Če računamo tako kot v primeru a) dobimo $I_D = 13{,}7$ mA, kar je več od kritičnega toka. Upor R_0 postavimo na 0. Tedaj sledi

$$I_R = \frac{R_1}{2R_1 + R} I_0 = 5{,}9\ \mathrm{mA}\,,$$

in

$$P_R = RI_R^2 = 5{,}2\ \mathrm{mW}\,.$$

[3 *t*.]

c) Če R povečujemo, se moč na njem tudi povečuje, a se hkrati povečuje tudi tok skozi diodo. (Sklep lahko utemeljimo s poskušanjem.) Moč bo največja tedaj, ko skozi diodo teče mejni tok:

$$I_D = \frac{R_1 + R}{2R_1 + R + R_0} I_0 = I_{\max}\,.$$

Izluščimo R:

$$R = \frac{(2R_1 + R_0)I_{\max} - R_1 I_0}{I_0 - I_{\max}} = 102\ \Omega\,.$$

[4 *t*.]

3. *Podatki:* $r_n = 1$ cm, $r = 6$ cm, $h = 15$ cm, $\rho = 1000$ kg/m^3, $p_o = 1$ bar, $\kappa = 1{,}4$.

a) Če malo pihnemo v levo ustje, se v levi polovici cevi gladina spusti za določeno višino, označimo jo z x, v desni polovici pa prav toliko dvigne. Pojavi se tlačna razlika $\Delta p = \rho g\, 2x$, in posledično sila $F = S\Delta p$, ki potiska vodo proti ravnovesni leg. Sila je premo sorazmerna z odmikom, tako kot pri nihalu na vijačno vzmet:

$$F = S\Delta p = S\rho g\, 2x = kx\,, \qquad k = 2S\rho g = 2\pi r_n^2 \rho g\,.$$

kjer je k koeficient, ekvivalenten koeficientu vijačne vzmeti. Po podobnosti z nihanjem vijačne vzmeti zapišemo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

pri čemer je masa enaka masi vode v stolpcu

$$m = \rho V = \rho \pi r_n^2 \left(2(h - r - r_n) + \pi r\right)\,.$$

Dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,\pi r_n^2 \rho g}{\rho \pi r_n^2 \left(2(h - r - r_n) + \pi r\right)}} = \sqrt{\frac{2g}{2(h - r - r_n) + \pi r}}\,.$$

Izračunamo

$$\omega = 7{,}50\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}19\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

[6 *t.*]

b) V tem primeru se zrak v zaprtem delu krči in širi. Zaradi tega se pojavi dodatna sila $F = S(p - p_0)$, pri čemer je p tlak v zaprtem delu in p_0 zunanji zračni tlak. Zapišemo enačbo adiabate

$$pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa\,, \qquad p = p_0 V_0^\kappa V^{-\kappa}\,.$$

Prostornino stisnjenega zraka zapišimo kot $V = V_0 + \Delta V = V_0 + Sx$, kjer je x odmik od ravnovesne lege, tako kot v primeru a).

$$p = p_0 V_0^\kappa (V_0 + Sx)^{-\kappa} = p_0 V_0^\kappa V_0^{-\kappa} \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\kappa} = p_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-\kappa} \approx p_0 \left(1 - \kappa \frac{x}{l}\right)\,,$$

pri čemer smo z l označili višino zraka v zaprtem delu cevi in upoštevali, da je odmik mnogo manjši od te višine. Nad gladino se torej pojavi dodatna sila

$$F_a = S(p - p_0) = -\frac{\kappa p_0 S}{l}\, x\,, = -k_a x\,, \qquad k_a = \kappa \frac{p_0 S}{l}\,.$$

To ustreza povečanemu koeficientu vzmeti pri nihalu na vijačno vzmet, tako da se frekvenca nihanja poveča

$$\omega' = \sqrt{\frac{k + k_a}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho g + \kappa \frac{p_0}{l}}{\rho(2(h - r - r_n) + \pi r)}}\,.$$

Dobimo

$$\omega' = 78\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad \nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = 12{,}4\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

[4 *t.*]