Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

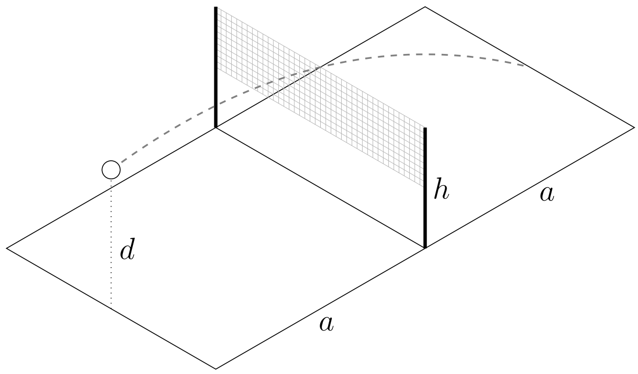
60. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Velenje, 9. 4. 2022

Skupina I

1. Odbojkar udari žogo točno nad sredino zadnje črte igrišča na višini $d = 2{,}30$ m. Igrišče ima obliko pravokotnika, ki ga mreža deli na dve kvadratni polji s stranico $a = 9{,}00$ m, višina zagornjega roba mreže je $h = 2{,}45$ m. Privzemi, da je žoga točkasto telo.

   S kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom glede na vodoravnico mora po servisu odleteti žoga, da leti tik nad mrežo in se tal dotakne točno na sredini zadnje črte na nasprotni strani?

   Namig: Namesto z velikostjo hitrosti in kotom raje računaj s komponentama hitrosti v vodoravni in navpični smeri.

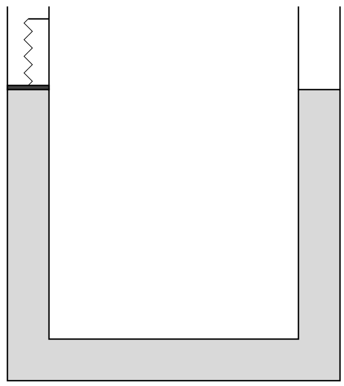


2. V cevi s kvadratnim profilom in presekom 1 cm^2 je voda. Cev ima obliko, ki jo kaže slika, razdalja med sredinama krakov je 50 cm. Levi krak tesno zapira bat, povezan z vzmetjo s koeficientom 2,5 N/m. Bat se lahko po kraku giblje brez trenja.

   a) Na začetku sega voda v levem kraku do višine 40 cm, v desnem pa do višine 15 cm. Je vzmet skrčena ali raztegnjena? Kolikšen je raztezek oziroma skrček vzmeti?

   b) Koliko vode moram naliti v desni krak, da se višini gladin izenačita, kot kaže slika?

   c) Cev iz vprašanja b) zavrtimo za 45° v smeri urinega kazalca. Kraki so dovolj visoki, da voda pri tem ne izteče. Kolikšen je premik bata in v katero smer (navzgor ali navzdol po kraku)?



3. Telovadec z maso 75 kg skače po trampolinu. Prožno opno trampolina v nalogi opišemo kot lahek prožen trak, ki ima dolžino 2,4 m, kadar ni obremenjen. Na trdno ogrodje trampolina je trak napet tako, da ima dolžino 3 m in je vodoraven, ko je trampolin prazen.

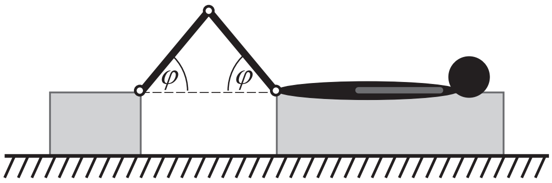
   a) Kolikšen je prožnostni koeficient traku, če se pod mirujočim telovadcem, ki stoji na sredini, spusti za 20 cm pod nivo vodoravnega traku praznega trampolina?

   b) Telovadec počasi počepne, da se trak med počepom ne premika. Nato se zelo hitro odrine navpično navzgor in med odrivom popolnoma iztegne noge. Roke ima ves čas nepremično iztegnjene ob telesu. S kolikšno največjo silo deluje na trak, če se med odrivom trak pod njegovimi stopali spusti za 55 cm pod nivo vodoravnega traku praznega trampolina?

   c) Med celotnim skokom ima telovadec roke nepremično ob telesu in iztegnjene noge. Na kolikšni višini nad vodoravnim nivojem praznega trampolina so stopala telovadca, ko je v najvišji točki skoka?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Anže počiva tako, da leži na kavču in opira noge na počivalnik (stol enake višine kot kavč) z maso 10 kg, kot kaže slika. Ker počiva in ima sproščene mišice, delujejo kolk, koleno in stik stopala s počivalnikom kot brez trenja vrtljive osi (ležaji). Vsaka Anžetova noga ima maso 12 kg. Masa nog je enakomerno porazdeljena po dolžini od stopala do kolka. Privzemi, da je dolžina noge od stopala do kolena enaka 50 cm in enaka dolžini noge od kolena do kolka.



a) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med počivalnikom in podlago, da lahko Anže počiva s popolnoma sproščenimi mišicami in je kot med obema deloma vsake noge in vodoravnico $\varphi = 50°$ (glej sliko)?

b) S kolikšnim navorom in v kateri smeri (v smeri urinega kazalca ali v nasprotni smeri) morajo v kolku delovati mišice, da preprečijo zdrs počivalnika, če je koeficient lepenja med počivalnikom in podlago 0,2 in kot med obema deloma vsake noge in vodoravnico 30°?

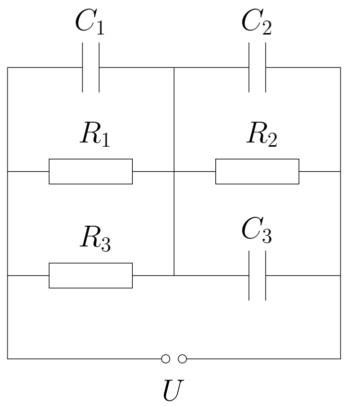
60. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Velenje, 9. 4. 2022

Skupina II

1. V vezju na sliki je napetost vira $U = 24$ V, upori upornikov so $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ kΩ in kapacitete kondenzatorjev $C_1 = C_2 = 1000$ μF ter $C_3 = 4700$ μF.

   a) Kolikšni so naboji na posameznih kondenzatorjih?

   b) Kolikšni so ti naboji takoj po tem, ko vir odklopimo in priključka, kjer je bil vezan vir, kratko sklenemo?



2. Zračno plovilo na vroč zrak (toplozračni balon) sestavljajo košara, gorilnik in ogrodje, ki imajo skupaj maso $m_k = 200$ kg, ter balon, ki je narejen iz najlonske tkanine z gostoto $\rho_t = 1100$ kg/m^3, toplotno prevodnostjo $\lambda = 0{,}3$ W/m K ter debelino $d = 0{,}1$ mm. Balon je okrogle oblike s polmerom $r = 9$ m. Tkanina je obdelana tako, da ne prepušča zraka, in prenese temperaturo do $T_1 = 100\,°$C. Predpostavi, da se v balonu zadržuje samo vroč zrak, ki ga segreva gorilnik, brez izpušnih plinov gorilnika. Tlak zraka znotraj in zunaj balona je $p_0 = 1$ bar. Temperatura okoliškega zraka je $T_0 = 25\,°$C.

   a) Kolikšna je največja masa bremena, ki ga smemo naložiti v košaro, da plovilo še lebdi?

   V najpreprostejšem približku balon oddaja energijo v okolico sorazmerno z razliko med temperaturo zunanje površine balona T in temperaturo okoliškega zraka T_0. Gostoto toplotnega toka lahko zapišemo kot $j = \alpha(T - T_0)$, kjer je sorazmernostni koeficient $\alpha = 6$ W/m^{2}K. Ker je tkanina, iz katere je balon, zelo tenka, je razlika temperatur površine tkanine znotraj in zunaj balona $\Delta T = T_v - T$ veliko manjša od razlike med temperaturo vročega zraka v balonu T_v in okoliškega zraka T_0.

   b) V košari je breme z maso $m_0 = 300$ kg. Kolikšna je temperatura zraka v balonu T_v, da plovilo lebdi? Kolikšen toplotni tok gorilnik tedaj dovaja zraku v balonu?

   c) Kolikšna je v primeru b) razlika temperatur notranje in zunanje površine tkanine, iz katere je balon?

3. Ione z osnovnim nabojem pospešujemo s konstantno napetostjo U_0. Odklanjamo jih v prečnem homogenem električnem in prečnem homogenem magnetnem polju. Gostota magnetnega polja je 0,10 T, jakost električna polja pa tolikšna, da se ioni ^{12}C ravno ne odklonijo. Kolikšna je pospeševalna napetost U_0, da se ioni ^{14}C v istem magnetnem in električnem polju odklonijo za 2 mm, ko prepotujejo razdaljo prvih 20 cm od vstopa v področje, kjer sta polji?

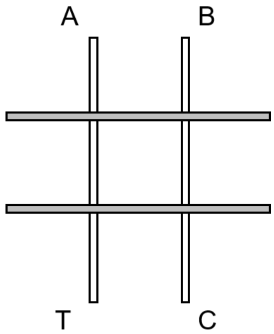
   Iz masnega števila A izračunamo maso atoma kot $m = Au$, kjer je $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg atomska masna enota. Masno število A za atom ^{12}C je 12 in za ^{14}C 14.

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Štiri enako dolge žice zvarimo v pravilno mrežo, da se stikajo ravno na tretjinah svojih dolžin, kot kaže slika. Žice so iz dveh različnih snovi. Specifični upor navpičnih žic (snov 1) označimo z ζ_1, specifični upor vodoravnih žic (snov 2) z ζ_2. Posamezna žica je dolga $l = 30$ cm in ima polmer $r = 0{,}05$ mm. Če med točki T in A priključimo vir napetosti $U = 1$ V z zanemarljivim notranjim uporom, teče skozi vir tok $I_{\mathsf{A}} = 1{,}56$ A. Ko isti vir vežemo med točki T in B, teče skozi vir tok $I_{\mathsf{B}} = 0{,}52$ A.

   a) Kolikšna sta specifična upora ζ_1 in ζ_2?

   b) Kolikšen tok teče skozi isti vir, ko ga priključimo med točki T in C?



60. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Velenje, 9. 4. 2022

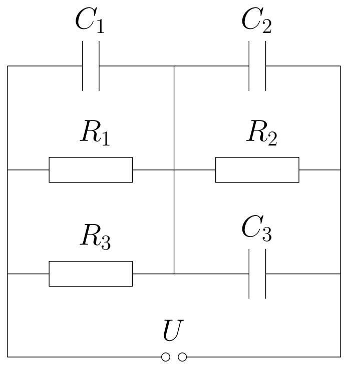
Skupina III

1. V vezju na sliki je napetost vira $U = 24$ V, upori upornikov so $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ kΩ in kapacitete kondenzatorjev $C_1 = C_2 = 1000$ μF ter $C_3 = 4700$ μF.

   a) Kolikšni so naboji na posameznih kondenzatorjih?

   b) Kolikšni so ti naboji takoj po tem, ko vir odklopimo in priključka, kjer je bil vezan vir, kratko sklenemo?

   c) Kolikšni so tedaj tokovi skozi posamezne upornike?



2. Zračno plovilo na vroč zrak (toplozračni balon) sestavljajo košara, gorilnik in ogrodje, ki imajo skupaj maso $m_k = 200$ kg, ter balon, ki je narejen iz najlonske tkanine z gostoto $\rho_t = 1100$ kg/m^3, toplotno prevodnostjo $\lambda = 0{,}3$ W/m K ter debelino $d = 0{,}1$ mm. Balon je okrogle oblike s polmerom $r = 9$ m. Tkanina je obdelana tako, da ne prepušča zraka, in prenese temperaturo do $T_1 = 100\,^\circ$C. Predpostavi, da se v balonu zadržuje samo vroč zrak, ki ga segreva gorilnik, brez izpušnih plinov gorilnika. Tlak zraka znotraj in zunaj balona je $p_0 = 1$ bar. Temperatura okoliškega zraka je $T_0 = 25\,^\circ$C.

   a) Kolikšna je največja masa bremena, ki ga smemo naložiti v košaro, da plovilo še lebdi?

   Balon oddaja energijo v ozračje prek konvekcije in sevanja. Gostota toplotnega toka zaradi konvekcije je sorazmerna z razliko med temperaturo zunanje površine balona T in okoliškega zraka T_0, $j = \alpha(T - T_0)$, kjer je $\alpha = 3$ W/m^{2}K konvekcijska konstanta. Zunanja površina balona ima odbojnost (albedo) $a = 0{,}7$. Ker je tkanina, iz katere je balon, zelo tenka, je razlika temperatur površine tkanine znotraj in zunaj balona $\Delta T = T_v - T$ veliko manjša od razlike med temperaturo vročega zraka v balonu T_v in okoliškega zraka T_0.

   b) *Oceni*, kolikšna je v primeru a) razlika temperatur notranje in zunanje površine tkanine, iz katere je balon.

   c) V košari je breme z maso $m_0 = 300$ kg. Kolikšna je temperatura zraka v balonu T_v, da plovilo lebdi? Kolikšen toplotni tok gorilnik tedaj dovaja zraku v balonu?

3. Metka najde dve tanki leči, ki imata enak premer, a je videti, da imata različne optične lastnosti. Na krajišče kartonaste valjaste cevi z dolžino 10 cm pritrdi prvo lečo, da optična os leče sovpada s simetrijsko osjo cevi. Ko lečo obrne navzgor proti Soncu, da je os cevi poravnana s sončnimi žarki, pri nobeni oddaljenosti od spodnjega krajišča cevi ne uspe zbrati sončne svetlobe. Krajišče, kjer je prva leča, označi s številko 1 in na spodnje krajišče, ki ga označi s številko 2, pritrdi drugo lečo. Tudi drugo lečo pritrdi tako, da optična os sovpada s simetrijsko osjo cevi. Ko Metka zdaj obrne cev, da je optična os vzporedna svetlobi, ki prihaja od Sonca, in je proti Soncu obrnjeno krajišče 1, se na nasprotni strani sončna svetloba zbere na razdalji 4 cm od krajišča 2. Ko cev obrne, da je proti Soncu obrnjeno krajišče 2, se sončna svetloba zbere na razdalji 6 cm od krajišča 1.

   a) Kolikšni sta goriščni razdalji leče na krajišču 1 in leče na krajišču 2?

   b) Metka nato 20 cm pred krajišče 1 postavi svečo z 2,8 cm visokim plamenom. Optična os leč je vodoravna, plamen se nahaja na optični osi. Kje nastane slika plamena in kako velika je?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Na vsako krajišče lahke vzmeti, ki ima neobremenjena dolžino 100 cm in prožnostni koeficient 5,0 N/m, je pritrjena utež z maso 0,40 kg. Eno utež držimo, druga pa visi pod njo na vzmeti, ki ju povezuje. Uteži mirujeta, vzmet med utežema je navpična. V nekem trenutku spustimo zgornjo utež. Zračni upor zanemari.

   a) S kolikšno frekvenco nihata uteži med prostim padom?
   b) Skiciraj graf, ki prikazuje, kako se razdalja med utežema spreminja s časom. Čas merimo od trenutka, ko zgornjo utež spustimo iz rok. Na grafu označi osi in enote ter podatke značilnih točk.
   c) Določi lego zgornje in lego spodnje uteži glede na prvotno lego zgornje uteži 0,2 s po tem, ko zgornjo spustimo.

1. $d = 2{,}30$ m, $a = 9{,}00$ m, $h = 2{,}45$ m.

   a) Komponenti začetne hitrosti žoge naj bosta v_x in v_y, t pa čas preleta igrišča. V vodoravni smeri je gibanje enakomerno, v navpični pa met z začetno hitrostjo v_y:

$$2a = v_x t\,, \qquad d = v_y t - \tfrac{1}{2} g t^2\,.$$

(delno 2 t.)
Žoga doseže mrežo v polovičnem času in tedaj se mora dvigniti ravno za $h - d$:

$$h - d = v_y\,\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{t}{2}\right)^2 = v_y\,\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\,g t^2\,.$$

(delno 2 t.)
Enačbo najprej pomnožimo z 2 in odštejemo od enačbe za d:

$$2d - h = \frac{1}{4}\,g t^2\,, \qquad \text{od koder sledi} \qquad t = 2\sqrt{\frac{2d-h}{g}} = 1{,}03 \text{ s}$$

in za vodoravno komponento

$$v_x = \frac{2a}{t} = 17{,}5 \text{ m/s}\,.$$

Enačbo za $h - d$ pomnožimo s 4 in od dobljenega izraza odštejemo enačbo za d:

$$4h - 3d = v_y t \qquad \text{in od tod} \qquad v_y = \frac{4h - 3d}{t} = 2{,}8 \text{ m/s}\,.$$

(delno 4 t.) Končno izračunamo še velikost začetne hitrosti in kot, ki ga hitrost tvori z vodoravnico:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 17{,}7 \text{ m/s} \approx 18 \text{ m/s}\,, \qquad \tan\alpha = \frac{v_x}{v_y}\,, \qquad \alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{v_x}{v_y}\right) = 9{,}1^\circ \approx 9^\circ.$$

(delno 2 t.)
[10 t.]

2. $S = 1\ \text{cm}^2$, $d = 50$ cm, $k = 2{,}5$ N/m, $h_1 = 40$ cm, $h_1 = 15$ cm, $\varphi = 45°$.

a) V levem kraku je pod batom podtlak, $p = p_0 - \rho g(h_1 - h_2)$ in *raztezek* vzmeti meri

$$s = \frac{S\Delta p}{k} = \frac{S\rho g(h_1 - h_2)}{k} = 9{,}8\ \text{cm} \approx 10\ \text{cm}\,.$$

[3 t.]

b) Ko se gladini izenačita, je tlak pod batom enak zunanjemu in vzmet ni raztegnjena. Pomeni, da se mora gladina v levem kraku dvigniti za s, ki smo ga izračunali pri a). V obeh krakih torej sega gladina vode do višine $h_1 + s = 50$ cm. V desni krak moramo natočiti prostornino vode

$$V = S(h_1 - h_2 + 2s) = 44{,}6\ \text{cm}^3 \approx 45\ \text{cm}^3.$$

[2 t.]

c) V levi cevi je ponovno podtlak in vzmet je *raztegnjena*; raztezek označimo z x. Potem je v levem kraku dolžina stolpca vode $h_1 + s - x$, v desnem pa $h_1 + s + x$. Ker smo cev nagnili za 45°, je višina gladine vode v desnem kraku, merjena glede na najnižjo točko cevi, enaka $y_2 = (h_1 + s + x)/\sqrt{2}$ in v levem $y_1 = (h_1 + s + d - x)/\sqrt{2}$.

(delno 2 t.)

Podtlak pod batom je enak

$$\Delta p = \rho g(y_1 - y_2) = \rho g\,\frac{(d - 2x)}{\sqrt{2}}.$$

Iz enačbe za ravnovesje bata:

$$kx = S\Delta p = S\rho g\,\frac{(d - 2x)}{\sqrt{2}}$$

sledi za *raztezek* vzmeti

$$x = \frac{S\rho g d}{\sqrt{2}(k + \sqrt{2}S\rho g)} = 8{,}9\ \text{cm} \approx 9\ \text{cm}\,.$$

(delno 3 t.)

[5 t.]

3. $m = 75$ kg, $l_0 = 2{,}4$ m, $l = 3{,}0$ m, $h_1 = 20$ cm, $h_2 = 55$ cm.

a)

Trak po dolžini razdelimo na dva enaka dela in vsak del z obravnavajmo kot elastično vzmet s koeficientom k'. Ker se polovica traku pri enaki natezni sili raztegne le za polovico celotnega raztezka traku, je elastični koeficient polovice traku k' dvakrat večji kot za cel trak, $k' = 2k$.

Polovica traku se pod mirujočim telovadcem raztegne za

$$s_1 = l_1 - \tfrac{1}{2}l_0\,, \qquad l_1 = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2 + h_1^2}\,, \qquad s_1 = 31{,}3 \text{ m}\,.$$

Navpična komponenta sile F_1, ki napenja polovico traku, uravnovesi polovico teže telovadca,

$$\tfrac{1}{2}mg = F_1 \sin\varphi\,, \qquad \sin\varphi = \frac{h_1}{l_1}\,, \qquad F_1 = \frac{mgl_1}{2h_1}\,,$$

kjer je φ kot, ki ga tvori trak z vodoravnico. Zvezo lahko izpeljemo tudi iz podobnih trikotnikov. Koeficient polovičnega traku je

$$k' = \frac{F_1}{s_1} = \frac{mgl_1}{2s_1h_1} = 8{,}9 \text{ kN/m}\,,$$

za cel trak pa $k = \frac{1}{2}k' = 4{,}45$ kN/m.

[4 t.]

b)

Postopek je podoben kot pri a), le da sedaj namesto teže nastopa odrivna sila F:

$$F = 2F_2\,\frac{h_2}{l_2} = \frac{2k's_2h_2}{l_2}\,, \qquad l_2 = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2 + h_2^2} = 160 \text{ cm}\,, \qquad s_2 = l_2 - \tfrac{1}{2}l_0 = 40 \text{ cm}\,.$$

Odrivna sila je potem

$$F = \frac{4ks_2h_2}{l_2} = 2{,}45 \text{ kN}\,.$$

[3 t.]

c)

Razlika prožnostnih energij dveh vzmeti, ki sta na začetku raztegnjeni vsaka za $s_2 = 40$ cm, na koncu pa za $s_0 = (l - l_0)/2 = 30$ cm, se pretvori v potencialno energijo telovadca:

$$2\,\tfrac{1}{2}k'(s_2^2 - s_0^2) = mgz\,,$$

kjer je z enak razliki višin težišča; ker lahko telovadca obravnavamo kot togo telo, se za toliko dvignejo tudi njegova stopala. Glede na nivo praznega trampolina, pa so njegova stopala na višini:

$$h = z - h_2 = \frac{2k(s_2^2 - s_0^2)}{mg} - h_2 = 29 \text{ cm}\,.$$

[3 t.]

4. $m = 12$ kg, $m_S = 10$ kg, $l = 50$ cm.

a) $\varphi = 50°$

Naj bo m masa polovice nog. Štejmo tudi obe nogi skupaj za eno, tako da m ustreza vsemu pod kolenom.

Simetrija in bilanca sil nam povesta, da vsak stol nosi težo ene noge v navpični smeri. V vodoravni smeri pa imamo potisk, ki ustreza ravnovesju navorov. Če vrtišče postavimo v koleno, imamo bilanco navora za polovico noge:

$$mg(l/2)\cos\varphi + F_x l \sin\varphi - mgl\cos\varphi = 0 \tag{1}$$

od koder

$$F_x = mg\frac{1}{2\tan\varphi} \tag{2}$$

Če hočemo, da stol miruje, mora lepenje uravnovesit F_x, pri čemer je normala vsota teže polovice nog in celega stola.

$$k_l = \frac{F_x}{(m_S + m)g} = 0{,}23 \tag{3}$$

[4 t.]

b) $\varphi = 30°$, $k = 0{,}2$

Za drugi del naloge, pa imamo tudi neznano silo v kolenu (ki je prej nismo potrebovali). V kolenu na stegno deluje sila v desno, ki je enaka lepenju, navzgor pa sila, ki je enaka razliki med normalno komponento stola in težo spodnjega dela nog, $F_y = F_\perp - mg$, kar dobimo iz ravnovesja sil na spodnjo polovico nog.

Navori na spodnji del noge so podobno kot prej,

$$mg(l/2)\cos\varphi + F_l l \sin\varphi - F_\perp l\cos\varphi = 0, \tag{4}$$

pogoj zdrsa stola pa

$$F_l = k(m_S g + F_\perp). \tag{5}$$

(delno 1 t.)

Navori na stegno glede na kolk, ki so zdaj neničelni, so torej

$$M = mg(l/2)\cos\varphi - F_y l\cos\varphi - F_l l\sin\varphi\,, \tag{6}$$

pri čemer pozitivni navori pomenijo vrtenje v smeri urinega kazalca.

Zdaj moramo to zložiti skupaj in eliminirati neznane sile $F_\perp$, F_y in F_l.

Poračunajmo normalo:

$$mg(1/2)\cos\varphi + k(m_S g + F_\perp)\sin\varphi - F_\perp\cos\varphi = 0, \tag{7}$$

$$F_\perp = \frac{mg(1/2)\cos\varphi + k m_S g\sin\varphi}{\cos\varphi - k\sin\varphi} = 79\ \text{N}. \tag{8}$$

(delno 2 t.)

Navor lažje izračunamo numerično, analitični izračun pa je koristen za preverjanje pravilnosti:

$$M = mg(l/2)\cos\varphi - (F_\perp - mg)l\cos\varphi - k(m_S g + F_\perp)l\sin\varphi. \tag{9}$$

$$M = gl\cos\varphi\frac{m\cos\varphi - 2k(m + m_S)\sin\varphi}{\cos\varphi - k\sin\varphi} = 33{,}2\ \text{Nm} \approx 33\ \text{Nm}\,. \tag{10}$$

(delno 2 t.)

Navor vrti v smeri urinega kazalca. (delno 1 t.)

Ničla števca sovpada z rešitvijo prvega dela. Ničla imenovalca ustreza kotu, pri katerem ne glede na silo ne moremo premagati lepenja.

[6 t.]

1. $U = 24$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ kΩ, $C_1 = C_2 = 1000$ μF, $C_3 = 4700$ μF.

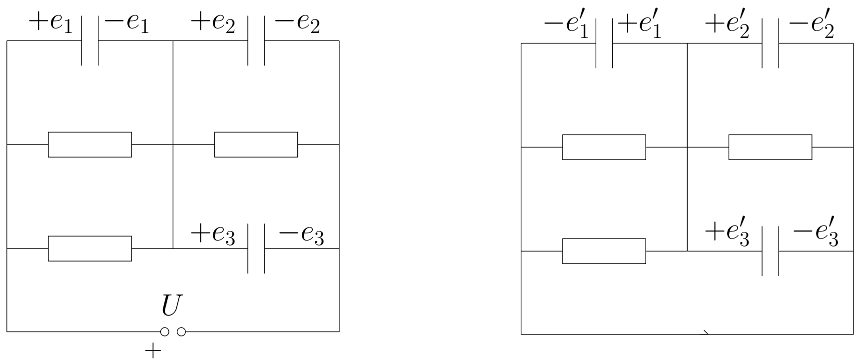
a)

Tok teče skozi vzporedno vezana upornika R_1 in R_3 ter njima zaporedno vezan upornik R_2 (glej sliko pri besedilu naloge). Ker je nadomestni upor vzporedno vezanih upornikov enak $R' = R_1R_3/(R_1 + R_3) = 50$ kΩ — kar je ravno polovica R_2 — se napetost razdeli v razmerju 1:2. Napetost na C_1 je tako $U/3$, na C_2 in C_3 pa $2U/3$. Naboji na kondenzatorjih so

$$e_1 = C_1\,\frac{U}{3} = 8\ \text{mAs}\,, \qquad e_2 = C_2\,\frac{2U}{3} = 16\ \text{mAs}\,, \qquad e_3 = C_3\,\frac{2U}{3} = 75{,}2\ \text{mAs} \approx 75\ \text{mAs}\,.$$

[3 t.]

b)



Če je bil na levem priključku vira pozitivni pol (leva slika), se je na levih elektrodah kondenzatorjev nabral pozitivni naboj, izračunan pri a), na desnih pa negativni. Takoj po sklenitvi priključkov se naboji na elektrodah prerazporedijo in sicer tako, da je na levi elektrodi C_1 sedaj negativni pol, na desni pa pozitivni, tako kot na levih elektrodah C_2 in C_3 (desna slika). Vsota pozitivnega in negativnega naboja se ohranja:

$$e_1' + e_2' + e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\,.$$

(delno 3 t.)

Napetost U' na C_1 je nasprotno enaka napetosti na C_2 in C_3. Za velikosti velja:

$$U' = \frac{e_1'}{C_1} = \frac{e_2'}{C_2} = \frac{e_3'}{C_3} \qquad \text{in} \qquad e_2' = \frac{C_2}{C_1}\,e_1' = e_1'\,, \qquad e_3' = \frac{C_3}{C_1}\,e_1' = 4{,}7\,e_1'\,.$$

Iz prve enačbe sledi

$$e_1' = \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{1 + \dfrac{C_2}{C_1} + \dfrac{C_3}{C_1}} = 12{,}4\ \text{mAs} \approx 12\ \text{mAs}$$

(delno 2 t.)

in

$$e_2' = 12{,}4\ \text{mAs} \approx 12\ \text{mAs}\,, \qquad e_3' = 58{,}4\ \text{mAs} \approx 58\ \text{mAs}\,.$$

(delno 2 t.)

Do enakega rezultata pridemo tudi, če predpostavimo nasprotno polariteto vira.

[7 t.]

2. $m_k = 200$ kg, $\rho_t = 1100$ kg/m^3, $\lambda = 0{,}3$ W/m K, $d = 0{,}1$ mm, $r = 9$ m, $T_1 = 100$ °C$=373$ K, $T_0 = 25$ °C$=298$ K, $p_0 = 1$ bar$=10^5$ Pa, $\alpha = 6$ W/m^{2}K, $m_0 = 300$ kg.

a)
Masa tkanine m_t, iz katere je balon, je

$$m_t = 4\pi r^2 d\rho_t = 111{,}97 \text{ kg} \approx 112 \text{ kg}.$$

Ravnovesje sil, ko balon lebdi, da enačbo

$$[m_k + m_t + m + m_z(T_v)]\, g = F_v = m_z(T_0)g\,, \tag{1}$$

kjer je m masa bremena v košari, T_v temperatura vročega zraka v balonu, F_v sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjenega zraka $m_z(T_0)g$ (pri temperaturi okoliškega zraka T_0!) in $m_z(T_v)$ masa vročega zraka v balonu. Masa $m_z(T)$ je masa zraka v balonu pri temperaturi T in je

$$m_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M}{RT}\,,$$

kjer je $\rho_z(T)$ gostota zraka pri temperaturi T, $R = 8300$ J/kmol K splošna plinska konstanta in $M = 29$ kg/kmol kilomolska masa zraka.

Ker nas zanima največja masa bremena m_b, mora biti takrat sila vzgona največja, torej temperatura zraka v balonu najvišja dopustna $T_v = T_1$. Dobimo

$$m_b = \frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) - m_k - m_t = 407{,}9 \text{ kg} \approx 408 \text{ kg} \sim 410 \text{ kg}.$$

[4 t.]

b)
Temperaturo zraka v balonu T_v izračunamo iz enačbe (1), ko za maso bremena m vstavimo m_0

$$T_v = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{3R(m_k + m_t + m_0)}{4\pi r^3 p_0 M}\right)^{-1} = 359{,}4 \text{ K} \approx 360 \text{ K}.$$

Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, lahko privzamemo pri izračunu toplotnih izgub, da ima zunanja površina balona enako temperaturo kot zrak v notranjosti balona $T = T_v$. Toplotni tok P, ki ga moramo dovajati zraku v balonu je

$$P = jS = 4\pi r^2 j(T_v) = 4\pi r^2 \alpha(T_v - T_0) = 375{,}21 \text{ kW} \approx 375 \text{ kW}.$$

[3 t.]

c)
Gostota toplotnega toka s površja balona v okolico je

$$j(T) = \alpha(T - T_0)\,,$$

kjer je T temperatura zunanje površine balona. Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, tudi tu privzamemo pri izračunu toplotnih izgub kar $T = T_v$ in dobimo

$$j_0 = \alpha(T_v - T_0)\,, \tag{2}$$

Ta toplotni tok mora teči tudi skozi steno balona s prevajanjem

$$j_0 = \lambda\frac{\Delta T}{d}\,,$$

kjer je $\Delta T = T_v - T$ iskana razlika temperatur površine tkanine v balonu in na zunanji strani. Gostoti toplotnih tokov izenačimo in dobimo

$$\Delta T = \frac{d\alpha(T_v - T_0)}{\lambda} = 0{,}1229 \text{ K} \approx 0{,}12 \text{ K}.$$

Vidimo, da bi, če bi bili natančni, morali v enačbi (2) namesto $T = T_v = 359{,}4$ K, vzeti $T = T_1 - \Delta T = 359{,}3$ K. Razlika med $359{,}4 - 298 = 61{,}4$ in $359{,}3 - 298 = 61{,}3$ je očitno zanemarljiva in približek $T = T_1$ v (2) upravičen.
[3 t.]

3. $B = 0{,}10$ T, $l = 20$ cm, $s = 2$ mm, $m_{12} = 12\ u$, $m_{14} = 14\ u$.

Za pospeševanje ^{12}C z napetostjo U_0 velja

$$\tfrac{1}{2} m_{12} v^2 = e_0 U_0\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{12}}}\,.$$

(delno 2 t.)
V prečnem polju elektrostatska sila uravnovesi magnetno:

$$e_0 E = e_0 v B$$

(delno 2 t.)
Hitrost v' ionov ^{14}C je nekoliko manjša, tako da na njih deluje v prečni smeri sila:

$$F = e_0 E - e_0 v' B = e_0 B (v - v')\,, \qquad v' = \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{14}}}\,.$$

(delno 2 t.)
Zaradi te sile se ioni uklonijo, tako kot delec pri vodoravnem metu, le da namesto težnega pospeška upoštevamo le pospešek zaradi sile F, $a = F/m_{14}$, saj je teža iona zaradi majhne mase zanemarljiva. Ker je odklon zelo majhen, lahko predpostavimo, da je vodoravna komponenta sile konstantna in enaka v'. Ion kombinirano polje preleti v času $t = l/v'$ in se odkloni za s:

$$s = \tfrac{1}{2} a t^2 = \frac{F l^2}{2 m_{14} v'^2} = \frac{F l^2}{4 e_0 U_0} = \frac{e_0 B l^2}{4 e_0 U_0} (v - v') = \frac{e_0 B l^2}{4 e_0 U_0}\, v \left(1 - \frac{v'}{v}\right)$$

Upoštevamo še enkrat zvezo med hitrostjo in pospeševalno napetostjo:

$$s = \frac{e_0 B l^2}{4 e_0 U_0} \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{12}}} \left(1 - \sqrt{\frac{m_{12}}{m_{14}}}\right) = \frac{e_0 B l^2}{\sqrt{8 e_0 U_0 m_{12}}} \left(1 - \sqrt{\frac{12}{14}}\right) \equiv \frac{e_0 B l^2}{\sqrt{8 e_0 U_0 m_{14}}} \left(\sqrt{\frac{14}{12}} - 1\right).$$

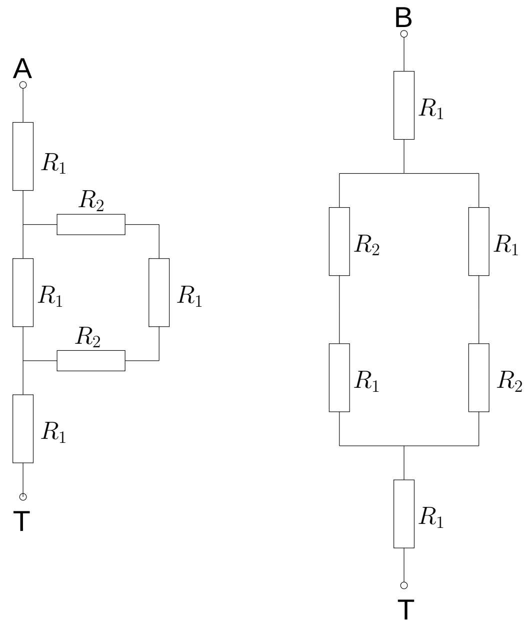
Končno izluščimo U_0:

$$U_0 = \frac{e_0 B^2 l^4}{8 m_{12} s^2} \left(1 - \sqrt{\frac{12}{14}}\right)^2 \equiv \frac{e_0 B^2 l^4}{8 m_{14} s^2} \left(\sqrt{\frac{14}{12}} - 1\right)^2 = 22 \text{ kV}\,.$$

(delno 4 t.)
[10 t.]

Neobvezno: Preverimo, da je vpliv gravitacije zanemarljiv: hitrost ionov ^{14}C je $v' = \sqrt{2e_0U_0/m_{14}} = 5{,}6 \cdot 10^5$ m/s, polje preletijo v 0,36 μs in se zaradi gravitacije na tej razdalji uklonijo za 0,006 nm.

4. $l = 30$ cm, $r = 0{,}05$ mm, $U = 1$ V, $I_{\mathsf{A}} = 1{,}56$ A, $I_{\mathsf{B}} = 0{,}52$ A.



(delno 2 t.)

a) Upor tretjine ene ali druge žice lahko izrazimo z njeno dolžino $l/3$, polmerom r in specifičnim uporom ζ_i, kjer je $i = 1$ za navpične žice in $i = 2$ za vodoravne žice

$$R_i = \frac{l\zeta_i}{3\pi r^2}\,.$$

Očitno je, da bomo ζ_i zlahka določili, ko določimo vrednosti obeh uporov ene tretjine navpične žice R_1 in ene tretjine vodoravne žice R_2. Nadomestno vezje, izraženo z upori R_1 in R_2, ko vežemo vir med točki T in A oziroma T in B, kažeta sliki zgoraj. Označimo z $R_{\mathsf{A}} = U/I_{\mathsf{A}} = 1/1{,}56\ \Omega = 0{,}641\ \Omega$ in $R_{\mathsf{B}} = U/I_{\mathsf{B}} = 1/0{,}52\ \Omega = 1{,}923\ \Omega$. Končni rezultati so lepše zapisani, če opazimo, da sta tokova v razmerju $\eta = 3/1 = 3$ oziroma da velja $R_{\mathsf{B}} = \eta R_{\mathsf{A}}$, ni pa to nujno za rešitev naloge. Iz obeh shem dobimo dve enačbi:

$$R_A = 2R_1 + \frac{R_1(2R_2 + R_1)}{2(R_1 + R_2)} \qquad (1)$$

$$R_B = 2R_1 + \frac{R_1 + R_2}{2} \qquad (2)$$

(delno 2 t.)

Imamo dve enačbi z dvema neznankama, ker enačba (1) ni linearna, gre reševanje najlažje, če iz (2) izrazimo ali R_1 ali R_2 in to vstavimo v (1), kar nam da kvadratno enačbo z dvema rešitvama, od katerih je ena nesmislena. Enačbo (2) lahko preoblikujemo v

$$R_2 = 2R_{\mathsf{B}} - 5R_1 \qquad \text{ali} \qquad 5R_1 = 2R_{\mathsf{B}} - R_2\,.$$

Do končne rešitve pridemo v vsakem primeru, a iz kvadratne enačbe za R_2 je, kot bomo videli, laže oceniti, katera od dveh rešitev je smislena in katera fizikalno nesmiselna. Enačbo (1) množimo z $2(R_1 + R_2)$, da se znebimo ulomkov. Ko enačbo še malo preuredimo, dobimo

$$2R_{\mathsf{A}}R_1 + 2R_{\mathsf{A}}R_2 = 5R_1^2 + 6R_2R_1 \qquad (3)$$

Ker smo iz (2) lepo izrazili $5R_1$, enačbo (3) pomnožimo s 5, da dobimo

$$2R_{\mathsf{A}} \cdot 5R_1 + 10R_{\mathsf{A}}R_2 = (5R_1)^2 + 6R_2 \cdot 5R_1\,.$$

V enačbo vstavimo $5R_1 = 2R_\mathsf{B} - R_2$ in dobimo

$$2R_\mathsf{A}(2R_\mathsf{B} - R_2) + 10R_\mathsf{A}R_2 = (2R_\mathsf{B} - R_2)^2 + 6R_2(2R_\mathsf{B} - R_2)\,,$$

kar nam da kvadratno enačbo

$$5R_2^2 - 8(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A}) - 4R_\mathsf{B}(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A}) = 0\,.$$

Medklic: Iz te enačbe se takoj vidi, da bi iz meritev $R_\mathsf{B} = R_\mathsf{A}$ sledilo $R_2 = 0$, kar sledi tudi iz obeh shem na sliki zgoraj.
Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$R_2 = \frac{4(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A})}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A})^2 + 5R_\mathsf{B}(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A})/4} = \frac{4(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A})}{5}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{5R_\mathsf{B}}{4(R_\mathsf{B} - R_\mathsf{A})}}\right)\,.$$

Vidimo, da bi rešitev z "−" dala $R_2 < 0$, kar je fizikalno nesmisleno, torej je prava rešitev tista s predznakom "+". Če upoštevamo še $R_\mathsf{B} = \eta R_\mathsf{A}$, dobimo kompakten zapis

$$R_2 = R_\mathsf{A}\frac{4(\eta - 1)}{5}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{5\eta}{4(\eta - 1)}}\right) = R_\mathsf{A}\frac{8}{5}\left(1 + \frac{\sqrt{46}}{4}\right) = R_\mathsf{A}\frac{2}{5}\left(4 + \sqrt{46}\right) = 2{,}7647\ \Omega.$$

(delno 3 t.)
in od tu

$$R_1 = R_\mathsf{A}\frac{2}{25}\left(11 - \sqrt{46}\right) = 0{,}2163\ \Omega.$$

Končno dobimo

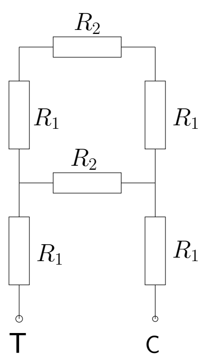
$$\zeta_1 = \frac{3\pi r^2 R_1}{l} = 1{,}699 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}\,,$$

kar ustreza specifičnemu uporu bakra. Za ζ_2 dobimo podobno

$$\zeta_2 = \frac{3\pi r^2 R_2}{l} = 2{,}171 \cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{m} \approx 22 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}\,,$$

kar približno ustreza svincu.
(delno 1 t.)
[8 t.]

b)



Iz sheme vidimo, da je nadomestni upor R_C, ko vežemo vir med točki T in C, enak

$$R_\mathsf{C} = 2R_1 + \frac{R_2(2R_1 + R_2)}{2(R_1 + R_2)} = 1{,}915\ \Omega$$

in tok skozi vir

$$I_\mathsf{C} = \frac{U}{R_\mathsf{C}} = 0{,}5221\ \mathrm{A} \approx 0{,}52\ \mathrm{A} \sim I_\mathsf{B}\,,$$

kar je zelo blizu I_B. Zares sta R_B in R_C po velikosti zelo podobna. Razlika je

$$R_\mathsf{B} - R_\mathsf{C} = R_1 \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} = 0{,}0363\, R_1 = 7{,}8 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

oziroma

$$\frac{R_\mathsf{B} - R_\mathsf{C}}{R_\mathsf{B}} = 4 \cdot 10^{-3}\,.$$

[2 t.]

1. $U = 24$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ kΩ, $C_1 = C_2 = 1000$ μF, $C_3 = 4700$ μF.

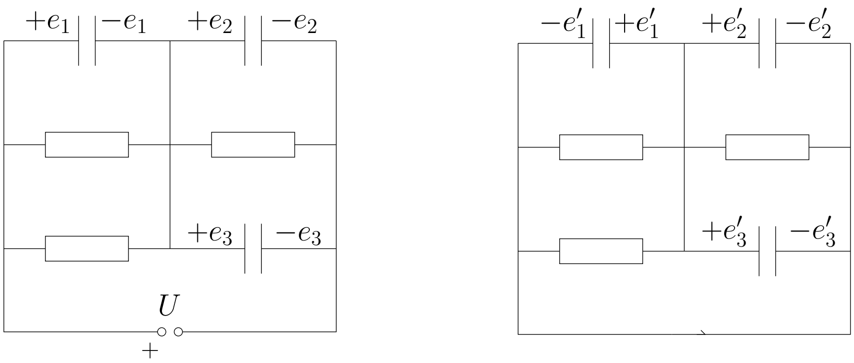
a)

Tok teče skozi vzporedno vezana upornika R_1 in R_3 ter njima zaporedno vezan upornik R_2 (glej sliko pri besedilu naloge). Ker je nadomestni upor vzporedno vezanih upornikov enak $R' = R_1R_3/(R_1 + R_3) = 50$ kΩ — kar je ravno polovica R_2 — se napetost razdeli v razmerju 1:2. Napetost na C_1 je tako $U/3$, na C_2 in C_3 pa $2U/3$. Naboji na kondenzatorjih so

$$e_1 = C_1\,\frac{U}{3} = 8 \text{ mAs}\,, \qquad e_2 = C_2\,\frac{2U}{3} = 16 \text{ mAs}\,, \qquad e_3 = C_3\,\frac{2U}{3} = 75{,}2 \text{ mAs} \approx 75 \text{ mAs}\,.$$

[3 t.]

b)



Če je bil na levem priključku vira pozitivni pol (leva slika), se je na levih elektrodah kondenzatorjev nabral pozitivni naboj, izračunan pri a), na desnih pa negativni. Takoj po sklenitvi priključkov se naboji na elektrodah prerazporedijo in sicer tako, da je na levi elektrodi C_1 sedaj negativni pol, na desni pa pozitivni, tako kot na levih elektrodah C_2 in C_3 (desna slika). Vsota pozitivnega in negativnega naboja se ohranja:

$$e_1' + e_2' + e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\,.$$

(delno 3 t.)

Napetost U' na C_1 je nasprotno enaka napetosti na C_2 in C_3. Za velikosti velja:

$$U' = \frac{e_1'}{C_1} = \frac{e_2'}{C_2} = \frac{e_3'}{C_3} \qquad \text{in} \qquad e_2' = \frac{C_2}{C_1}\,e_1' = e_1'\,, \qquad e_3' = \frac{C_3}{C_1}\,e_1' = 4{,}7\,e_1'\,.$$

Iz prve enačbe sledi

$$e_1' = \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{1 + \dfrac{C_2}{C_1} + \dfrac{C_3}{C_1}} = 12{,}4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}$$

in

$$e_2' = 12{,}4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}\,, \qquad e_3' = 58{,}4 \text{ mAs} \approx 58 \text{ mAs}\,.$$

(delno 2 t.)

Do enakega rezultata pridemo tudi, če predpostavimo nasprotno polariteto vira.

[5 t.]

c)

Na vseh upornikih je enaka napetost

$$U' = \frac{e_1}{C_1} = 12{,}4 \text{ V}$$

in požene skozi njih enak tok, saj so vrednosti vseh uporov enake:

$$I_1' = \frac{U'}{R_1} = I_2' = I_3' = 0{,}124 \text{ mA} \approx 0{,}12 \text{ mA}\,.$$

[2 t.]

2. $m_k = 200$ kg, $\rho_t = 1100$ kg/m^3, $\lambda = 0{,}3$ W/m K, $d = 0{,}1$ mm, $r = 9$ m, $T_1 = 100$ °C$= 373$ K, $T_0 = 25$ °C$= 298$ K, $p_0 = 1$ bar$= 10^5$ Pa, $\alpha = 3$ W/m^{2}K, $a = 0{,}7$, $m_0 = 300$ kg.

a)
Masa tkanine m_t, iz katere je balon, je

$$m_t = 4\pi r^2 d\rho_t = 111{,}97 \text{ kg} \approx 112 \text{ kg}.$$

Ravnovesje sil, ko balon lebdi, da enačbo

$$[m_k + m_t + m + m_z(T_v)]\, g = F_v = m_z(T_0)g\,, \tag{1}$$

kjer je m masa bremena v košari, T_v temperatura vročega zraka v balonu, F_v sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjenega zraka $m_z(T_0)g$ (pri temperaturi okoliškega zraka T_0!) in $m_z(T_v)$ masa vročega zraka v balonu. Masa $m_z(T)$ je masa zraka v balonu pri temperaturi T in je

$$m_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3}\,\frac{p_0 M}{RT}\,,$$

kjer je $\rho_z(T)$ gostota zraka pri temperaturi T, $R = 8300$ J/kmol K splošna plinska konstanta in $M = 29$ kg/kmol kilomolska masa zraka.

Ker nas zanima največja masa bremena m_b, mora biti takrat sila vzgona največja, torej temperatura zraka v balonu najvišja dopustna $T_v = T_1$. Dobimo

$$m_b = \frac{4\pi r^3}{3}\,\frac{p_0 M}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) - m_k - m_t = 407{,}9 \text{ kg} \approx 408 \text{ kg} \sim 410 \text{ kg}.$$

[4 t.]

b)
Gostota toplotnega toka s površja balona v okolico zaradi konvekcije in sevanja je

$$j(T) = \alpha(T - T_0) + (1-a)\sigma(T^4 - T_0^4)\,,$$

kjer je T temperatura zunanje površine balona. Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, lahko privzamemo pri izračunu toplotnih izgub kar $T = T_v$. Zanima nas balon, ki nosi največje možno breme m_b, torej velja $T \approx T_1$ in

$$j_b = \alpha(T_1 - T_0) + (1-a)\sigma(T_1^4 - T_0^4)\,. \tag{2}$$

Ta toplotni tok mora teči tudi skozi steno balona s prevajanjem

$$j_b = \lambda\frac{\Delta T}{d}\,,$$

kjer je $\Delta T = T_1 - T$ iskana razlika temperatur površine tkanine v balonu in na zunanji strani. Gostoti toplotnih tokov izenačimo in dobimo

$$\Delta T = \frac{d}{\lambda}\left(\alpha(T_1 - T_0) + (1-a)\sigma(T_1^4 - T_0^4)\right) = 0{,}14 \text{ K}.$$

Vidimo, da bi, če bi bili natančni, morali v enačbi (2) namesto $T = T_1 = 373$ K, vzeti $T = T_1 - \Delta T = 372{,}86$ K. Razlika med $373^4 - 298^4$ in $372{,}86^4 - 298^4$ je očitno zanemarljiva in približek $T = T_1$ v (2) upravičen.

[3 t.]

c)

Temperaturo vročega zraka v balonu T_v izračunamo iz enačbe (1), kjer za maso bremena m vstavimo m_0

$$T_v = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{3R(m_k + m_t + m_0)}{4\pi r^3 p_0 M} \right)^{-1} = 359{,}4 \text{ K} \approx 360 \text{ K}.$$

Toplotni tok P, ki ga moramo dovajati zraku v balonu je

$$P = jS = 4\pi r^2 j(T_v) = 4\pi r^2 \left(\alpha(T_v - T_0) + (1-a)\sigma(T_v^4 - T_0^4) \right) = 340{,}06 \text{ kW} \approx 340 \text{ kW}.$$

[3 t.]

3. $d = 10$ cm, $b_1 = 4$ cm, $b_2 = 6$ cm, $a = 20$ cm, $y = 2{,}8$ cm.

a)

Iz podatka, da z eno samo (prvo) lečo, obrnjeno proti Soncu "pri nobeni oddaljenosti od spodnjega krajišča cevi ne uspe zbrati sončne svetlobe", sklepamo, da je goriščna razdalja prve leče krajša od d, torej krajša od 10 cm.

Ko je proti Soncu obrnjena leča 1, dobimo za vzporedne žarke iz smeri Sonca za drugo lečo enačbo

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{d - f_1} = \frac{1}{f_2}\,, \tag{1}$$

kjer je f_1 goriščna razdalja leče na krajišču 1 in f_2 goriščna razdalja leče na krajišču 2 ter b_1 razdalja od krajišča 2, kjer se zberejo sončni žarki. Ko cev obrnemo, dobimo analogno

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{d - f_2} = \frac{1}{f_1}\,, \tag{2}$$

(delno 2 t.)

kjer je b_2 razdalja za krajiščem 1, kjer se zbere sončna svetloba. Obe enačbi dobimo, ko se spomnimo, da je zaradi vzporedne vpadle svetlobe ta zbrana po prehodu skozi lečo, ki je obrnjena k Soncu, na goriščni razdalji te leče, torej nastane slika Sonca na razdalji d minus goriščna razdalja prve leče pred drugo lečo.

Iz enačbe (1) izrazimo f_2

$$f_2 = \frac{b_1(d - f_1)}{d + b_1 - f_1}\,.$$

ker je $f_1 < d$, je $f_2 > 0$, torej je druga leča zbiralna. Ko f_2 nesemo v enačbo (2) dobimo po nekaj poenostavitvah, ko se rešimo vseh ulomkov

$$(d - b_1 + b_2)f_1^2 - d(2b_2 + d)f_1 + d^2 b_2 = 0$$

(delno 1 t.)

z rešitvama

$$f_1 = d\,\frac{2b_2 + d \pm \sqrt{4b_1 b_2 + d^2}}{2(d - b_1 + b_2)} = d\,\frac{22 \pm 14}{24}\,.$$

(delno 1 t.)

Obe rešitvi sta fizikalno smiselni, dobimo $f_1 = \frac{10}{3}$ cm in $f_1' = 15$ cm.
Ker je $f_1' > d$ mora imeti prva leča goriščno razdaljo

$$f_1 = \frac{10}{3}\text{ cm} = 3{,}33\text{ cm}.$$

(delno 2 t.)

Za f_2 dobimo v tem primeru

$$f_2 = \frac{b_1(d - f_1)}{d + b_1 - f_1} = 4\text{ cm}\,\frac{10 - \frac{10}{3}}{10 + 4 - \frac{10}{3}} = 4\text{ cm}\,\frac{20}{32} = \frac{5}{2}\text{ cm} = 2{,}5\text{ cm}.$$

(delno 1 t.)
[7 t.]

b)

Z znanima goriščnima razdaljama sliko plamena izračunamo kot dve zaporedni preslikavi, skozi prvo lečo se plamen preslika na razdaljo

$$b = a\frac{f_1}{a - f_1} = 20\text{ cm}\,\frac{10/3}{50/3} = 20\text{ cm}\,\frac{1}{5} = 4\text{ cm}\,.$$

Velikost slike plamena y' po preslikavi preko prve leče je

$$y' = y\frac{b}{a} = y\,\frac{4}{20} = \frac{1}{5}y\,.$$

Slika y' po prvi preslikavi je predmet za drugo lečo, nahaja se $a' = d - b = 6$ cm pred drugo lečo. Enačba za preslikavo preko druge leče nam da razdaljo slike za drugo lečo kot

$$b' = a'\frac{f_2}{a' - f_2} = 6 \text{ cm}\,\frac{2{,}5}{6 - 2{,}5} = 6 \text{ cm}\,\frac{5}{7} = \frac{30}{7} \text{ cm} = 4{,}286 \text{ cm} \approx 4{,}3 \text{ cm}\,.$$

Velikost slike po preslikavi skozi drugo lečo je

$$y'' = y'\frac{b'}{a'} = y'\,\frac{30/7}{6} = \frac{5}{7}y' = \frac{5}{7}\,\frac{1}{5}y = \frac{1}{7}y = \frac{28 \text{ mm}}{7} = 4 \text{ mm}.$$

Slika plamena nastane 4,3 cm za krajiščem 2 in je velika 4 mm. Slika je realna in obrnjena enako kot plamen.

Zadnje povedi od tekmovalcev ne zahtevamo.

[3 t.]

4. $m = 0,40$ kg, $k = 5,0$ N/m, $l_0 = 100$ cm, $t_0 = 0,2$ s.

a) Pri prostem padanju sta uteži v breztežnem stanju in nihanje lahko opišemo tako, kot če bi uteži na začetku mirovali na gladki vodoravni podlagi. Ko ju zanihamo drugo proti drugi tako, da je težišče pri miru, lahko nihanje posamezne uteži opišemo kot nihanje telesa na vzmeti s polovično dolžino. Prožnostni koeficient polovične vzmeti je dvakrat večji kot koeficient celotne vzmeti, torej $k' = 2k = 10,0$ N/m. Posamezna utež niha s frekvenco

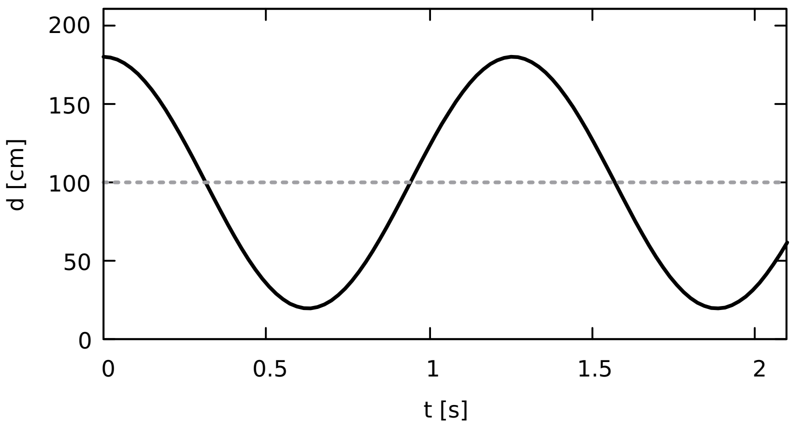
$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 5,0\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

[3 t.]

b) Amplituda relativnega nihanja je kar enaka začetnemu raztezku, ki meri

$$s_0 = \frac{mg}{k} = 80\ \mathrm{cm}\,.$$

Uteži nihata okoli ravnovesne lege, ki je pri medsebojni razdalji $l_0 = 100$ cm. Časovni potek kaže graf



[2 t.]

c) Vsaka od uteži niha s polovično amplitudo relativnega nihanja, $x_0 = s_0/2$ in hkrati prosto pada s pospeškom g. Gibanje zgornje uteži lahko zapišemo kot

$$s_1(t) = x_0 \cos \omega t - x_0 - \tfrac{1}{2} g t^2\,, \qquad x_0 = \tfrac{1}{2} s_0 = 40\ \mathrm{cm},$$

pri čemer smo odšteli x_0, da zagotovimo, da je utež ob $t = 0$ v izhodišču koordinatnega sistema, v katerem os x kaže navzgor. Za spodnjo utež velja $s_2(t) = s_1(t) - d(t)$, pri čemer $d(t)$ opisuje relativno gibanje, prikazano na grafu, $d(t) = s_0 \cos \omega t + l_0 = 2x_0 \cos \omega t + l_0$. Sledi

$$s_2(t) = s_1(t) - d(t) = -x_0 \cos \omega t - x_0 - l_0 - \tfrac{1}{2} g t^2\,,$$

Vstavimo t_0 in dobimo

$$s_1(t_0) = -37,6\ \mathrm{cm} = -38\ \mathrm{cm}\,, \qquad s_2(t_0) = -180,0\ \mathrm{cm} = -180\ \mathrm{cm}\,.$$

[5 t.]