Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

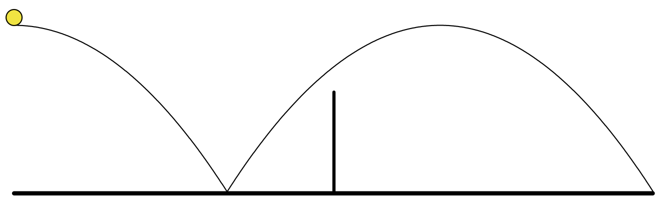
Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

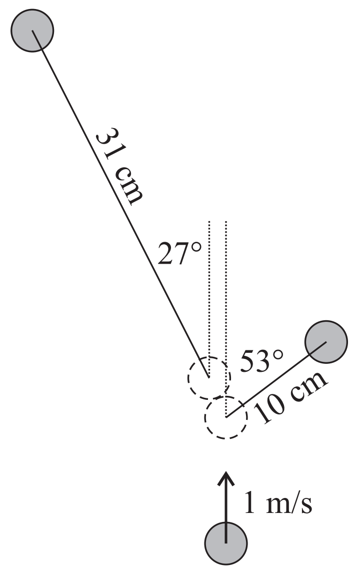
1. Miza pri namiznem tenisu je dolga 274 cm, višina mrežice je 15,25 cm. Žogico obravnavaj kot točkasto telo. Igralec servira žogico z višine 30 cm nad mizo natančno nad krajšim robom mize, da žogica odleti v smeri, vzporedni z daljšim robom mize.

   a) S kolikšno hitrostjo mora odleteti žogica, da bo po prožnem odboju na njegovi polovici mize padla točno na rob mize na nasprotni strani, tako kot kaže slika?

   b) Na kolikšni višini nad mrežico žogica preleti mrežico?



2. Matjaž se igra z dvema enakima kovancema, kot je videl na tekmovanju Kresnička pri mlajši sestri Alenki. Na mizo pogrne papir, na papir postavi kovanec in s svinčnikom označi lego kovanca pred trkom. Alenko prosi, da od zgoraj (v tlorisu) snema trk na pametni telefon. Drug enak kovanec nato potisne, da se zaleti v mirujoči kovanec. Iz posnetka oceni, da je bila hitrost gibajočega se kovanca tik pred trkom 1 m/s in da se kovanca po trku nista nič vrtela in se je vsak od kovancev gibal premo. Ko sta se po trku kovanca zaradi trenja med papirjem in kovancem ustavila, je Matjaž označil lego kovancev in iz risbe (glej sliko) razbral naslednje podatke: en kovanec se je po trku premaknil za 31 cm pod kotom 27° levo glede na smer hitrosti gibajočega se kovanca pred trkom, drugi kovanec se je premaknil za 10 cm pod kotom 53° desno glede na smer hitrosti gibajočega se kovanca pred trkom.



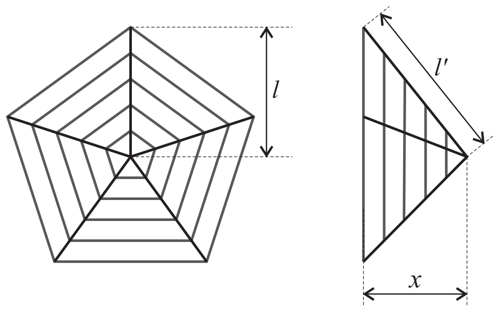
   a) Iz podatkov o prepotovani poti obeh kovancev izračunaj razmerje velikosti hitrosti obeh kovancev takoj po trku.

   b) Kolikšni sta hitrosti prvega in drugega kovanca takoj po trku?

   c) Kolikšen je koeficient trenja med kovancem in papirno podlago?

Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

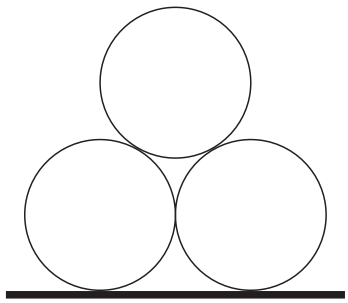
3. Pajkova mreža je popolnoma simetrična kot kaže leva slika. Ko je mreža prazna, se vse niti nahajajo v eni navpični ravnini in je dolžina vsake od petih radialnih niti od sredine mreže do zunanjega oglišča mreže enaka 45 cm (na levi sliki je ta dolžina označena z l). Ko je mreža prazna, so vse niti napete s silo 6 mN. Predpostavi, da za niti za vse obremenitve, dokler se ne pretrgajo, velja Hookov zakon in da je prožnostni koeficient niti 0,15 N/m. Nit se pretrga, ko je njen relativni raztezek $s/l_0 = 0{,}2$, kjer l_0 označuje dolžino nenapete niti in s raztezek niti.



   a) Kolikšna je skupna prožnostna energija radialnih niti v prazni pajkovi mreži?

   b) Kolikšno največjo maso sme imeti muha, ki prileti v središče mreže s hitrostjo 2 m/s pravokotno na ravnino navpično postavljene mreže, da se mreža ne pretrga? Stranski pogled na pajkovo mrežo potem, ko se vanjo ulovi muha, kaže desna slika (z x je označen premik središča mreže glede na ravnino prazne mreže in z l' dolžina posamezne radialne niti). Privzemi, da muha v trenutku, ko se ujame v mrežo, preneha leteti in da je sunek teže muhe med ustavljanjem v mreži zanemarljiv.

4. Na vodoravno ledeno površino zložimo tri enake lesene valje, kot kaže slika. Po dolžini so vsi valji poravnani med seboj.

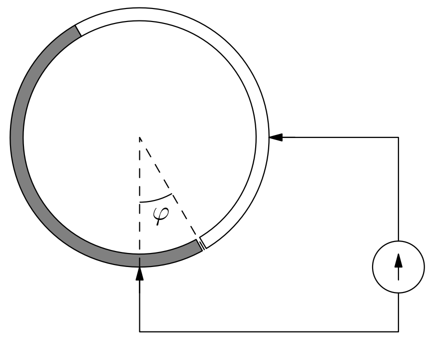


   a) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja les-les, da bo spodnji valj v ravnovesju?

   b) Najmanj kolikšen pa mora biti koeficient lepenja les-led, da se struktura ne podre?

Skupina II

1. V neki napravi je vrtljiv gumb za nastavljanje napetosti vpet na obroček, sestavljen iz dveh polovičnih krožnih odsekov s polmerom 5 mm. Vsak odsek je narejen iz dveh različnih zlitin germanija. Na enem izmed stikov je med obema deloma ozka neprevodna reža, kot kaže slika. Obroček je preko dveh drsnih kontaktov, ki sta na obodu obročka razmaknjena za kot 90°, vezan na tokovni vir, ki poganja konstanten tok 1 mA. Simbol za tokovni vir je krog, v katerem je puščica, ki nakazuje smer toka. Osenčeni del obročka ima specifični upor 0,4 Ωm, neosenčeni del obročka ima specifični upor 0,16 Ωm. Prečni presek obročka je 3 mm^2. Kot zasuka obročka φ štejemo v smeri, nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev. Zasuk je nič, ko je presledek med različnima deloma obročka na spodnjem kontaktu.



   a) Kolikšna je napetost med kontaktoma pri zasuku obročka za kot 60°?

   b) Prostoročno nariši graf napetosti v odvisnosti od kota zasuka za kote med 0° in 360°.

   c) Izračunaj povprečno električno moč tokovnega vira, če se gumb vrti s konstantno kotno hitrostjo.

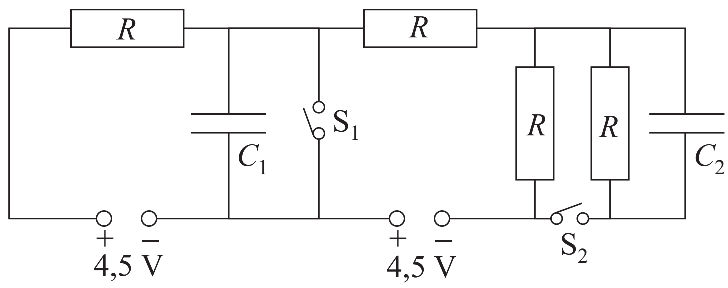
2. Kondenzator je sestavljen iz dveh kvadratnih plošč z robom 30 cm, ki sta postavljeni vodoravno ena nad drugo in sta razmaknjeni za 2 cm. Plošči priključimo na vir napetosti tako, da je spodnja plošča priključena na pozitivni in zgornja na negativni priključek vira. Spodnja plošča je mokra in iz nje z majhnimi hitrostmi naključno uhajajo vodne kapljice s pozitivnim nabojem $2 \cdot 10^{-17}$ As. Polmer kapljic je 1 μm. Gibanje kapljic je ves čas dovolj počasno, da velja linearni zakon upora: $F_u = kv$, kjer je F_u sila upora, v hitrost kapljic in $k = 2 \cdot 10^{-12}$ Ns/m sorazmernostni koeficient.

   a) Najmanj kolikšno napetost moramo priključiti med plošči, da nabite kapljice ne bodo padle nazaj na spodnjo ploščo?

   b) Kolikšno hitrost dosežejo kapljice med dviganjem proti zgornji plošči, če med plošči priključimo napetost 60 V?

Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

3. V vezje vežemo 4 enake upornike $R = 300\,\Omega$, dve stikali S_1 in S_2, dva enaka kondenzatorja $C_1 = C_2 = 4\,\mu$F ter dva vira z gonilno napetostjo 4,5 V, kot kaže shema vezja. Zanima nas, kako na vezje vpliva preklapljanje stikal S_1 in S_2.



a) Stikalo S_1 je razklenjeno, stikalo S_2 je sklenjeno. Kolikšen je naboj na vsakem od kondenzatorjev? Za kondenzator C_1 označi, na kateri plošči je pozitivni in na kateri negativni naboj in svoj odgovor utemelji.

b) Kolikšen tok in v kateri smeri steče takoj za tem, ko razklenemo stikalo S_2, skozi upornik, ki je na shemi najbolj desno?

c) Na koncu sklenemo obe stikali, S_1 in S_2. Kolikšen tok in v katero smer teče skozi stikalo S_1 po dolgem času? Kolikšen je naboj na vsakem od kondenzatorjev po dolgem času?

4. Fizik opazuje vrenje svinca. Na dnu posode nastane okrogel mehurček s prostornino 10,0 mm^3, ki se počasi dvigne do gladine na višini 23 cm. Tik pod gladino ima okrogli mehurček prostornino 11,3 mm^3. Svinec vre pri 1749 °C, ko ima gostoto 8800 kg/m^3. Kilomol svinca ima maso 207 kg. Zunanji tlak je 1 bar. Privzemi, da ima svinčeva para v mehurčku med dviganjem ves čas enako temperaturo kot staljeni svinec v posodi in da je temperatura vrelišča svinca neodvisna od tlaka. Vpliv površinske napetosti svinca na dogajanje zanemari.

a) Kolikšna bi bila pričakovana prostornina mehurčka tik pod gladino, če bi ves svinec, ki napolnjuje mehurček na dnu posode, ostal v plinastem stanju?

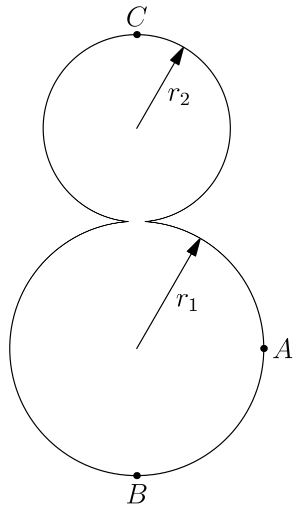
b) <u>Oceni</u> kolikšno delo bi v primeru a) opravila svinčeva para med dviganjem mehurčka.

c) Za koliko se med dviganjem spremeni masa svinčeve pare v mehurčku?

d) <u>Oceni</u> specifično izparilno toploto svinca.

57. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Maribor, 6. 4. 2019

Skupina III



1. Sonda *New Horizons* je na prvi dan leta 2019 obletela telo Kupierjevega pasu z vzdevkom *Ultima-Thule*. Telo je podobno zlepku krogel s premeroma $2r_1 = 19$ km in $2r_2 = 14$ km, kot kaže slika. Masa manjše krogle je $2 \cdot 10^{15}$ kg, masa večje krogle je $5 \cdot 10^{15}$ kg. Zamislimo si, da načrtujemo raziskovalno vozilo, za katerega moramo določiti tehnične omejitve, da bo misija na *Ultima-Thule* uspešna. V vprašanjih a) in b) zanemari vrtenje telesa *Ultima-Thule* okoli svojega težišča.

   a) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med podlago in kolesi vozila v točki A, da vozilo ne zdrsne?

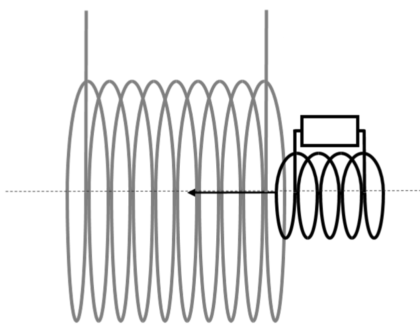
   b) Izračunaj, s kolikšno največjo hitrostjo sme voziti vozilo v točki B, da ne izgubi stika s podlago.

   c) V resnici se telo vrti okoli težišča tako, da je os vrtenja pravokotna na ravnino lista. Najmanj kolikšen mora biti obhodni čas vrtenja telesa, da vozilo ne izgubi stika s podlago, ko je parkirano v točki C?

2. Dve tanki zbiralni leči sta razmaknjeni za 40 cm. Goriščna razdalja prve leče je 9 cm, goriščna razdalja druge leče je 6 cm. S tretjo lečo, ki jo bomo dali med prvo in drugo lečo, želimo doseči, da se bo svetloba v vzporednem curku žarkov, ki oklepa majhen kot z optično osjo, tudi po prehodu skozi sistem treh leč širila v vzporednem curku, ki bo vzporeden curku vpadle svetlobe. Z drugimi besedami: sistem treh leč naj ne spremeni smeri širjenja curka vzporedne svetlobe, ampak naj ga samo vzporedno premakne. Optične osi vseh treh leč sovpadajo.

   a) Na kolikšno razdaljo od prve leče moramo med prvo in drugo lečo postaviti tretjo lečo?

   b) Kolikšna mora biti goriščna razdalja tretje leče?



3. Dve tuljavi postavimo na skupno os, tako da desno krajišče večje tuljave sovpada z levim krajiščem manjše (glej sliko). Večja tuljava ima polmer 2 cm, dolžino 20 cm in 200 navojev. Po tuljavi teče konstanten tok 1 A. Manjša tuljava ima polmer 1 cm, dolžino 10 cm in 100 navojev ter je sklenjena preko upornika z uporom 0,01 Ω. Manjšo tuljavo začnemo s konstantno hitrostjo 10 cm/s potiskati proti drugemu krajišču večje tuljave; osi tuljav ves čas sovpadata.

   a) Kolikšna napetost se inducira v mali tuljavi na začetku premikanja? Dogovorimo se, da to napetost štejemo kot pozitivno napetost.

   b) Prostoročno nariši graf toka skozi manjšo tuljavo v odvisnosti od časa v prvih treh sekundah premikanja.

   c) Koliko naboja se pretoči skozi upornik v prvih dveh sekundah premikanja?

Predpostavi, da je magnetno polje homogeno povsod znotraj prve tuljave, zunaj prve tuljave pa zanemarljivo majhno. Magnetno polje druge tuljave zanemari.

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Kondenzator je sestavljen iz dveh prevodnih kvadratnih plošč z robom 20 cm, ki sta postavljeni vodoravno ena nad drugo in sta razmaknjeni za 2 cm. Plošči priključimo na napetost 1 V, spodnja plošča je priključena na pozitivni in zgornja na negativni priključek vira. S celotne pozitivne plošče z majhnimi hitrostmi naključno uhajajo zelo majhni pozitivno nabiti delci z nabojem $2 \cdot 10^{-16}$ As. Gibanje delcev je ves čas dovolj počasno, da velja linearni zakon upora: $F_u = kv$, kjer je F_u sila upora, v hitrost delcev in $k = 2 \cdot 10^{-15}$ Ns/m sorazmernostni koeficient. Težo delcev zanemari.

   a) S kolikšno največjo hitrostjo se gibljejo delci med ploščama?
   b) Plošči postavimo v vodoravno homogeno magnetno polje z gostoto 5 T. S kolikšno končno hitrostjo in v katero smer se gibljejo delci med ploščama? Smer hitrosti opredeli tako, da določiš kot med hitrostjo in smerjo električnega polja ter kot med hitrostjo in smerjo magnetnega polja.

1. $l = 274$ cm, $h_0 = 15{,}25$ cm, $h = 30$ cm.

a)
Do prvega odboja prepotuje žogica natanko tretjino poti s konstantno hitrostjo, ki je enaka hitrosti, s katero igralec servira žogico. Istočasno v navpični smeri „pade“ z višine h v času t:

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2\,, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}247\ \mathrm{s}\,.$$

[1 t.]

Vodoravna hitrost je enaka

$$v = \frac{l}{3t} = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{g}{2h}} = 3{,}69\ \mathrm{m/s} \approx 3{,}7\ \mathrm{m/s}\,.$$

[3 t.]

b)
Žogica se odbije z navpično hitrostjo, ki je po velikosti enaka navpični hitrosti, s katero pade na mizo:

$$v_y = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

[1 t.]

Do mrežice na polovici mize po odboju prepotuje razdaljo $l' = \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l$. Za to pot porabi točno polovico časa, izračunanega pri a):

$$t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

[2 t.]

V tem času se dvigne za

$$y = v_y t' - \tfrac{1}{2}gt'^2 = g\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \frac{3h}{4} = 22{,}5\ \mathrm{cm}\,,$$

kar je 7,25 cm nad mrežico.
[3 t.]

2. $\varphi_L = 27°$, $s_L = 31$ cm, $\varphi_D = 53°$, $s_D = 10$ cm, $v_0 = 1$ m/s.

a)
Kinetična energija kovancev po trku se zmanjšuje zaradi trenja

$$\frac{mv^2}{2} = mgk_t s\,,$$

kjer sta v in s hitrost in pot levega ali desnega kovanca, m masa kovanca in k_t koeficient trenja. Očitno torej velja

$$\frac{v_L^2}{v_D^2} = \frac{s_L}{s_D} \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{v_L}{v_D} = \sqrt{\frac{s_L}{s_D}} = \sqrt{3{,}1} = 1{,}76\,.$$

Opomba: Enak rezultat bi dobili tudi iz pogoja, da je skupna gibalna količina obeh kovancev po trku v smeri, pravokotni na smer v_0, enaka nič

$$\frac{v_L}{v_D} = \frac{\sin\varphi_D}{\sin\varphi_L} = 1{,}76\,.$$

Ker v nalogi zahtevamo rešitev iz dolžin poti, drugi način ne prinaša vseh možnih točk, čeprav je rezultat pravilen.

[4 t.]

b)
Ohranitev gibalne količine v smeri hitrosti v_0 nam da

$$mv_0 = mv_L\cos\varphi_L + mv_D\cos\varphi_D\,,$$

kar nam skupaj z rezultatom iz a) da

$$v_D = \frac{v_0}{\cos\varphi_D + \cos\varphi_L\sqrt{s_L/s_D}} = 0{,}46\,\mathrm{m/s}.$$

in

$$v_L = \frac{v_0}{\cos\varphi_L + \cos\varphi_D\sqrt{s_D/s_L}} = 0{,}81\,\mathrm{m/s}.$$

Enak rezultat sledi iz enačbe za za ohranitev gibalne količine v pravokotni smeri:

$$v_D = \frac{v_0\sin\varphi_L}{\sin\varphi_L\cos\varphi_D + \sin\varphi_D\cos\varphi_L}\,,$$

$$v_L = v_D\frac{\sin\varphi_D}{\sin\varphi_L} = \frac{v_0\sin\varphi_D}{\sin\varphi_L\cos\varphi_D + \sin\varphi_D\cos\varphi_L}\,.$$

[4 t.]

c)
Iz zakona o spremembi kinetične energije dobimo še koeficient trenja

$$k_t = \frac{v_L^2}{2gs_L} = \frac{v_D^2}{2gs_D} = 0{,}11\,.$$

Tu je pomembno, da je ob pravilnem izračunu pri a) rezultat za levi in za desni kovanec enak, medtem ko sta rezultata med seboj različna, če pri a) dijak ne izračuna razmerja pravilno.

[2 t.]

3. $l = 45$ cm, $F = 6$ mN, $k = 0{,}15$ N/m, $s_0 = 0{,}2$, $v = 2$ m/s.

a)
Radialna nit je raztegnjena za

$$\Delta l = \frac{F}{k} = 4{,}0 \text{ cm}\,.$$

Prožnostna energija petih radialnih niti v prazni mreži je tako

$$W_{\rm pr} = 5\,\tfrac{1}{2}k\Delta l^2 = 0{,}6 \text{ mJ}\,.$$

[3 t.]

b)
Neobremenjena radialna nit ima dolžino

$$l_0 = l - \Delta l = 41 \text{ cm}\,.$$

Tik preden se pretrga, je njen raztezek enak

$$s = l_0\,\frac{s}{l_0} = 8{,}2 \text{ cm}\,,$$

[2 t.]

prožnostna energija pa

$$W_{\rm pr}{}' = 5\,\tfrac{1}{2}ks^2 = 2{,}52 \text{ mJ} \approx 2{,}5 \text{ mJ}\,.$$

Ko se muha v mreži zaustavi, se njena kinetična energija porabi za povečanje prožnostne energije mreže:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = W_{\rm pr}{}' - W_{\rm pr}\,.$$

Od tod izračunamo največjo možno maso muhe

$$m = \frac{2(W_{\rm pr}{}' - W_{\rm pr})}{v^2} = \frac{5k(s^2 - \Delta l^2)}{v^2} = 0{,}96 \text{ g} \approx 1 \text{ g}\,.$$

[5 t.]

4. **a)**
Na spodnji (recimo desni) valj deluje zgornji valj s silo, ki jo razstavimo na komponento F_2, pravokotno glede na podlago v stiku valjev, in na komponento F_{l2}, vzporedno s podlago v tej točki, ki ustreza sili lepenja in kaže v levo. Smer sile F_2 tvori kot 60° z vodoravnico, smer sile F_{l2} pa kot 30°. V stiku z ledeno ploskvijo deluje pravokotna sila podlage F_1 in (vodoravna) sila lepenja F_{l1}, ki kaže v levo.

Iz pogoja za ravnovesje sil v vodoravni smeri sledi:

$$F_2 \cos 60^\circ = F_{l1} + F_{l2} \cos 30^\circ \, .$$

Pogoj za ravnovesje navorov zapišemo za os valja, tako da je ročica kar polmer valja r:

$$F_{l1}\, r = F_{l2}\, r \, , \qquad F_{l1} = F_{l2} \, ,$$

saj je navor sil F_1 in F_2 enak nič, ker sta obe vzporedni z ročico.

Iz prve enačbe izrazimo silo lepenja na stiku les-les:

$$F_{l2} = \frac{F_2 \cos 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ} \, .$$

Iskani koeficient trenja les-les je potem

$$k_{l2} = \frac{F_{l2}}{F_2} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 0{,}27 \, .$$

[5 t.]

b)
Na zgornji valj deluje teža F_g in spodnja valja s silami, ki so po 3. Newtonovem zakonu nasprotno enake silam, s katerimi zgornji valj deluje na spodnja valja. Zaradi simetrije spodnji desni valj uravnovesi polovico teže zgornjega valja. Zapišimo pogoj za ravnovesje zgornjega valja. V navpični smeri velja:

$$\tfrac{1}{2} F_g = F_2 \sin 60^\circ + F_{l2} \sin 30^\circ = F_{l2} \left(\frac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right) \, .$$

Ker sta sili lepenja enaki, velja

$$F_{l1} = F_{l2} = \frac{F_g}{2 \left(\dfrac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right)} \, .$$

Hitro ugotovimo, da sila F_1 podpira polovico skupne teže vseh treh valjev:

$$F_1 = \frac{3}{2} \, F_g \, .$$

Za iskani koeficient trenja les-led velja:

$$k_{l1} = \frac{F_{l1}}{F_1} = \frac{1}{3 \left(\dfrac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right)} \, .$$

Ko vstavimo izraz za k_{l2} se z nekoliko preurejanja rezultat poenostavi v

$$k_{l1} = \frac{\sin 30^\circ}{3(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{k_{l2}}{3} = \frac{1}{3(2 + \sqrt{3})} = 0{,}09 \, .$$

[5 t.]

1. $I = 1$ mA, $\zeta_1 = 0{,}4\ \Omega$m, $\zeta_2 = 0{,}16\ \Omega$m, $S = 3$ mm^2, $r = 5$ mm, $\varphi = 60°$.

a)
Najprej si izračunajmo celotna upora obeh polovic:

$$R_1 = \zeta_1 \frac{\pi r}{S} = 2094\,\Omega\,,$$
$$R_2 = \zeta_2 \frac{\pi r}{S} = 838\,\Omega\,.$$

Pri kotu $0 < \varphi < 90°$ tok teče po daljši strani. Nadomestni upor je:

$$R(\varphi) = (1 - \frac{\varphi}{\pi})R_1 + (\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi})R_2\,.$$

To je linearno od $R(0) = R_1 + R_2/2$ do $R(90°) = R_1/2 + R_2$.

Pri kotu $60°$ je po zgornji zvezi upor

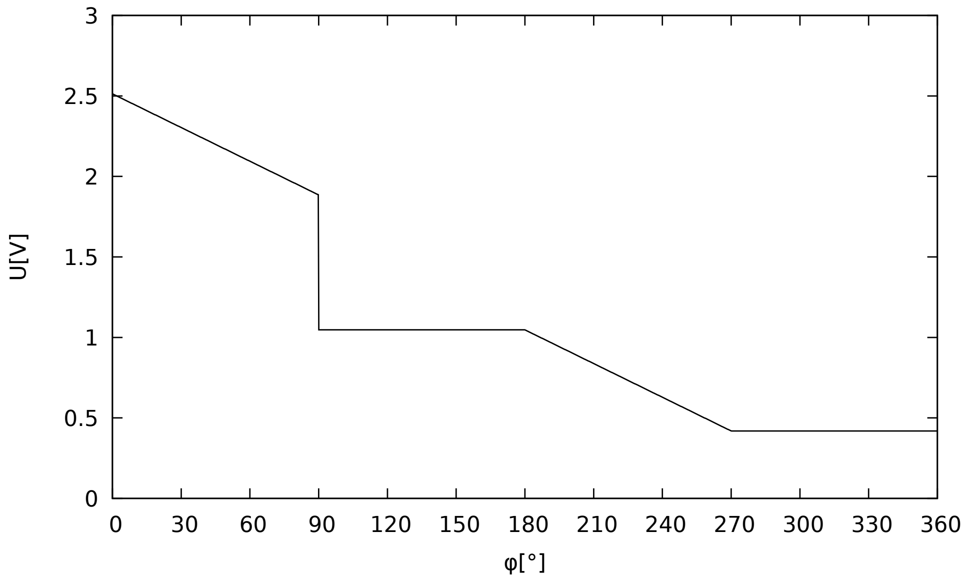
$$R(60°) = \frac{2}{3}R_1 + \frac{5}{6}R_2 = 2094\,\Omega\,,$$

kar je ravno enako kot celoten R_1 (ker je $R_2/R_1 = 2/5$).

[3 t.]

b)
Pri ostalih kotih teče tok po krajši strani. Od $\varphi = 90°$ do $\varphi = 180°$ vidimo samo $R = R_1/2$. Od $180°$ do $270°$ imamo linearno zvezo, ki se potem od $270°$ spet izravna pri $R = R_2/2$.

Vemo še $U = RI$ in lahko narišemo graf:



[4 t.]

c)
Povprečna moč bo pa povprečna vrednost trenutne moči

$$P = RI^2 = UI\,,$$

ki je sorazmerna z uporom. Napetost lahko povprečimo tudi na grafu. Po četrtinah so povprečja upora $\frac{3}{4}(R_1 + R_2)$, $R_1/2$, $(R_1 + R_2)/4$ ter $R_2/2$, skupno pa $\frac{3}{8}(R_1 + R_2) = 1099\,\Omega$, povprečna moč pa $1.1\,$mW.

[3 t.]

2. $a = 30$ cm, $d = 2$ cm, $e = 2 \cdot 10^{-17}$ As, $r = 1$ μm, $k = 2 \cdot 10^{-12}$ Ns/m, $U = 60$ V.

a)
Električna sila na kapljico uravnovesi težo kapljice:

$$eE = e\,\frac{U_0}{d} = mg = \rho g\,\frac{4\pi r^3}{3}\,.$$

Napetost, ki uravnovesi kapljice, je enaka

$$U_0 = \frac{4\pi\rho g r^3\,d}{3e} = 41\ \mathrm{V}\,.$$

[5 t.]

b)
Ko kapljice dosežejo končno hitrost je vsota vseh sil na kapljico enaka 0. Električna sila uravnovesi težo in upor zraka:

$$eE = mg + kv\,, \qquad e\,\frac{U}{d} = \rho g\,\frac{4\pi r^3}{3} + kv\,.$$

Največja hitrost je enaka

$$v = \frac{e\,\frac{U}{d} - \rho g\,\frac{4\pi r^3}{3}}{k} = 9{,}5\ \mathrm{mm/s}\,.$$

Z rezultatom iz dela a) se izraz za hitrost poenostavi v

$$v = \frac{e(U - U_0)}{kd}\,.$$

[5 t.]

3. $R = 300\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 4\,\mu\text{F}$, $U_0 = 4{,}5$ V.

a)

Ko je stikalo S_2 sklenjeno in stikalo S_1 razklenjeno, je nadomestni upor vezja $R_a = 2R + \frac{1}{2}R = 750\,\Omega$. Tok skozi prva dva upornika in skozi vira je $I_a = 2U_0/R_a = 12$ mA. Padec napetosti na prvem uporniku je $U_1 = RI_a = 3{,}6$ V. Napetost na kondenzatorju C_1 je $U_{a1} = U_0 - U_1 = 0{,}9$ V in naboj

$$e_{a1} = C_1 U_{a1} = 3{,}6\,\mu\text{As}.$$

Ker je potencial na zgornji plošči večji od potenciala na spodnji, oziroma je napetost med spodnjo in zgornjo ploščo pozitivna, je pozitivni naboj na zgornji plošči.

Skozi vsakega od vzporedno vezanih upornikov, ki jima je vzporedno vezan kondenzator C_2, teče tok $I_a/2$, zato je napetost na tem kondenzatorju $U_{a2} = RI_a/2$ in naboj

$$e_{a2} = C_2 U_{a2} = 7{,}2\,\mu\text{As}.$$

[4 t.]

b)

Takoj za tem, ko razklenemo stikalo S_2, deluje kondenzator C_2 kot vir napetosti, ki poganja tok samo skozi najbolj desni upornik R v vezju. Začetni tok je torej

$$I = \frac{U_{a2}}{R} = \frac{RI_a/2}{R} = \frac{I_a}{2} = 6\,\text{mA}.$$

[2 t.]

c)

Ko sta sklenjeni obe stikali, razpade vezje v dve enostavni neodvisni vezji, ki imata sicer skupni vodnik, ki vsebuje stikalo S_1, a tok po vsakem teče neodvisno od drugega. Skozi stikalo S_1 teče vsota obeh tokov, pri čemer moramo paziti na predznak posameznega toka. Napetost na kondenzatorju C_1 je 0, saj je preko stikala S_1 kratko sklenjen. Naboj $e_{c1} = 0$.

Levi električni krog vsebuje en vir in en upornik, tok I_{c1} v tem krogu je $I_{c1} = U_0/R = 15$ mA in teče skozi stikalo S_1 navzdol (gledano v narisani shemi). Desni električni krog vsebuje en vir in tri upornike z nadomestnim uporom $R_D = 3R/2$. Tok skozi desni vir je $I_{c2} = U_0/R_D = 10$ mA in teče skozi stikalo S_1 navzgor (gledano v narisani shemi). Za tok skozi stikalo S_1 dobimo

$$I_{S1} = I_{c1} - I_{c2} = 5\,\text{mA}.$$

in teče navzdol (gledano v narisani shemi pri besedilu naloge).

S podobnim premislekom kot pri a) izračunamo naboj na kondenzatorju C_2, le da je sedaj tok skozi najbolj desni upornik na shemi enak $\frac{1}{2}I_{c2}$ in je zato naboj

$$e_{c2} = C_2 R \frac{1}{2} I_{c2} = 6\,\mu\text{As}.$$

[4 t.]

4. $V_0 = 10{,}0$ mm^3, $h = 23$ cm, $V_1 = 11{,}3$ mm^3, $T = 1749$ °C, $\rho_s = 8800$ kg/m^3, $M = 207$ kg/kmol, $p_0 = 1$ bar.

a)
Na dnu posode je tlak

$$p = p_0 + \rho_s g h = 1{,}20 \text{ bar} = 1{,}20 \cdot 10^5 \text{ Pa}\,.$$

Ker je temperatura konstantna, velja za pričakovano vrednost prostornine tik pod gladino:

$$pV_0 = p_0 V\,, \qquad V = \frac{pV_0}{p_0} = 12{,}0 \text{ mm}^3\,.$$

[2 t.]

b)
Opravljeno delo je produkt tlaka in spremembe prostornine. Ker tlak pri dvigovanju ni konstanten, za oceno vzamemo kar povprečni tlak $\bar{p} = (p_0 + p)/2$.

Če bi se mehurček razpel do prostornine V, bi para opravila delo

$$A = \bar{p}(V - V_0) = \frac{(p + p_0)(V - V_0)}{2} = 0{,}22 \text{ mJ}\,.$$

[3 t.]

c)
Ker je dejanska sprememba prostornine manjša za $\Delta V = 0{,}7$ mm^3 od pričakovane, pomeni, da se je pri dvigovanju del pare kondenziral.

Maso pare izračunamo iz splošne plinske enačbe:

$$p_0 \Delta V = \frac{\Delta m_p}{M} RT\,, \qquad \Delta m_p = \frac{p_0 \Delta V\, M}{RT} = 0{,}84\ \mu\text{g}\,.$$

[2 t.]

d)
Energija, sproščena pri kondenzaciji, se je porabila za delo pri razpenjanju mehurčka. Delo izračunamo podobno kot pri b), le da sedaj upoštevamo dejansko prostornino zraka pod gladino:

$$A_1 = \bar{p}(V_1 - V_0) = \frac{(p + p_0)(V_1 - V_0)}{2} = 0{,}14 \text{ mJ}\,.$$

Iz energijske bilance sledi ocena za izparilno toploto q_i:

$$\Delta m_p q_i = A_1\,, \qquad q_i = \frac{A_1}{\Delta m_p} = 170 \text{ kJ/kg}\,.$$

[3 t.]

1. $r_1 = 9{,}5$ km, $r_1 = 7$ km, $m_1 = 5 \cdot 10^{15}$ kg, $m_2 = 2 \cdot 10^{15}$ kg.

a)

Na vozilo v točki A deluje privlačna sila večje krogle, F_1, v smeri pravokotno na podlago in privlačna sila druge krogle, F_2, ki jo razstavimo na komponento $F_{2\perp}$, pravokotno na podlago, in na komponento $F_{2\|}$, vzporedno s podlago. Komponenta $F_{2\|}$ je v mirovanju uravnovešena s silo lepenja F_l. Če z α označimo kot med zveznico središč obeh krogel in zveznico med središčem manjše krogle in točko A z dolžino r, sledi

$$\sin\alpha = \frac{r_1}{r}\,, \qquad r = \sqrt{r_1^2 + (r_1 + r_2)^2} = 19\ \text{km}\,, \qquad \alpha = 30^\circ\,.$$

Če z m označimo maso vozila, velja

$$F_1 = \frac{Gmm_1}{r_1^2}\,, \qquad F_{2\perp} = F_2 \sin\alpha = \frac{Gmm_2 \sin\alpha}{r^2}\,, \qquad F_{2\|} = F_2 \cos\alpha = \frac{Gmm_2 \cos\alpha}{r^2}\,.$$

Koeficient lepenja mora biti najmanj

$$k_l = \frac{F_l}{F_1 + F_{2\perp}} = \frac{F_{2\|}}{F_1 + F_{2\perp}} = \frac{\dfrac{m_2 \cos\alpha}{r^2}}{\dfrac{m_1}{r_1^2} + \dfrac{m_2 \sin\alpha}{r^2}} = \frac{r_1^2 m_2 \cos\alpha}{r^2 m_1 + r_1^2 m_2 \sin\alpha} = 0{,}08\,.$$

[5 t.]

b)

Radialni pospešek pri kroženju po krožnici z radijem r_1 mora biti manjši od težnega pospeška v točki B:

$$\frac{v_B^2}{r_1} = \frac{Gm_1}{r_1^2} + \frac{Gm_2}{(2r_1 + r_2)^2}\,.$$

Dovoljeno hitrost lažje izračunamo, če izpostavimo prvi člen, ki daleč največ prispeva:

$$v_B = \sqrt{\frac{Gm_1}{r_1}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{r_1}{2r_1 + r_2}\right)^2} = 6{,}08\ \text{m/s} \approx 6\ \text{m/s}\,.$$

[2 t.]

c)

V tem primeru vozilo skupaj s telesom kroži okoli težišča, ki je na zveznici med središčema krogel in oddaljeno od točke C za

$$r^* = \frac{m_2 r_2 + m_1(2r_2 + r_1)}{m_2 + m_1} = 18{,}8\ \text{km}\,.$$

[1 t.]

Tudi v tem primeru je v mejnem primeru radialni pospešek zaradi kroženja po krožnici z radijem r^* enak težnemu pospešku v točki C:

$$\omega^2 r^* = \frac{Gm_2}{r_2^2} + \frac{Gm_1}{(2r_2 + r_1)^2}\,, \qquad \omega = \frac{2\pi}{t_0}\,,$$

pri čemer je t_0 čas enega obrata telesa okoli težišča. Sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm_2}{r^* r_2^2}} \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{r_2}{2r_2 + r_1}\right)^2} = 4{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

in

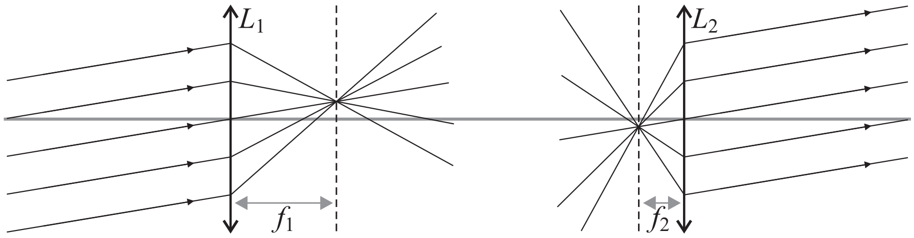
$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 14\,930\ \text{s} = 249\ \text{min} = 4\ \text{h}\ 9\ \text{min} \approx 4\ \text{h}\,.$$

[2 t.]

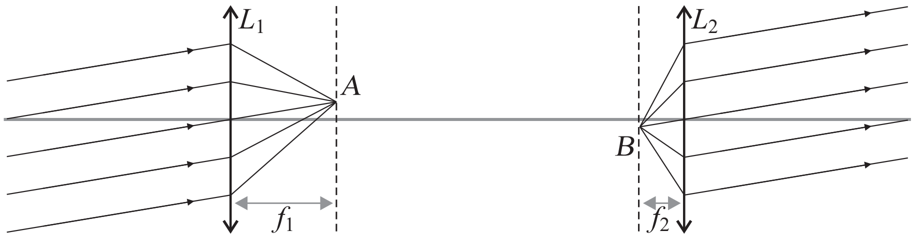
2. $f_1 = 9$ cm, $f_2 = 6$ cm, $X = 40$ cm.

a)

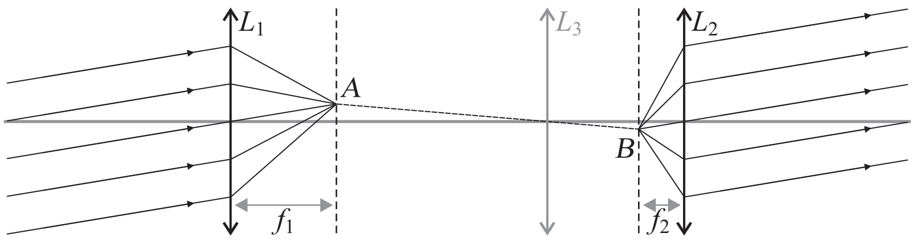
Naj bo x koordinata vzdolž optične osi, merjeno od L_1, in y odmik od optične osi v vpadni ravnini. Zahtevo naloge o vzporednem premiku ilustrira prva slika.



Leča L_1 je v točki $(0, 0)$, leča L_2 je v točki $(X, 0)$. Vzporedna svetloba, ki vpada na lečo L_1 z leve pod majhnim kotom φ, se preslika v točko A v goriščni ravnini L_1, $A = (f_1, f_1\varphi)$. Če naj se po prehodu leče L_2 z leve proti desni svetloba širi v isto smer kot prej, torej pod kotom φ, mora izhajati iz ustrezne točke B v goriščni ravnini L_2, torej iz $B = (X - f_2, -f_2\varphi)$. Ustrezni točki sta označeni na spodnji sliki.



To pomeni, da mora leča L_3 preslikati predmet iz točke A v B. Ker se temenski žarek ne lomi, moramo lečo L_3 postaviti na presečišče daljice AB in optične osi, kot kaže slika.



Iz enačbe premice $y(x) = kx + n$ skozi točki A in B in zahteve $y(d) = 0$ določimo oddaljenost d tretje leče L_3 od koordinatnega izhodišča pri leči L_1.

$$d = X f_1/(f_1 + f_2) = 24\,\text{cm}$$

[6 t.]

b)

Goriščno razdaljo določimo iz enačbe leče $1/f = 1/a + 1/b$, kjer za dano preslikavo z lečo L_3 iz rešitve dela a) dobimo $a = d - f_1 = 15$ cm in $b = X - d - f_2 = 10$ cm.

$$f_3 = \frac{ab}{a + b} = 6\,\text{cm}\,.$$

[4 t.]

3. $r_v = 2$ cm, $l_v = 20$ cm, $N_v = 200$, $r_m = 1$ cm, $l_m = 10$ cm, $N_m = 100$, $I = 1$ A, $R_0 = 0{,}01\ \Omega$, $v = 10$ cm/s.

a)
Magnetno polje v veliki tuljavi meri

$$B = \frac{\mu_0 N_v I}{l_v} = 1{,}257 \text{ mT} \approx 1{,}26 \text{ mT}\,.$$

Napetost v mali tuljavi se inducira zaradi spreminjanja magnetnega pretoka v mali tuljavi. Če v času Δt vstopi v veliko tuljavo ΔN ovojev male tuljave, se pretok skozi malo tuljavo spremeni za $\Delta\Phi = BS\Delta N = B\pi r_m^2 \Delta N$. Mala tuljava je cela v veliki tuljavi ob času $t_0 = l_m/v = 1$ s, število ovojev, ki v času Δt vstopi v malo tuljavo, je tako $\Delta N = \frac{N_m \Delta t}{t_0}$. Za inducirano napetost sledi:

$$U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\pi r_m^2 \frac{\Delta N}{\Delta t} = B\pi r_m^2 \frac{N_m v}{l_m} = \frac{\mu_0 \pi r_m^2 N_v N_m I v}{l_v l_m} = 39{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ V} \approx 40\ \mu\text{V}\,.$$

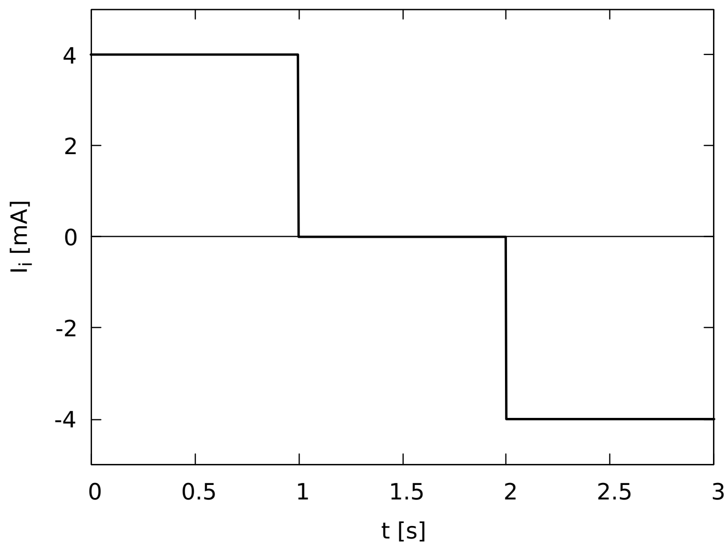
[4 t.]

b)
Inducirana napetost požene tok

$$I_i = U_i/R = 3{,}95 \text{ mA} \approx 4 \text{ mA}.$$

Ko je mala tuljava v celoti v veliki tuljavi, se magnetni pretok skoznjo ne spreminja, inducirana napetost je enaka 0. To se zgodi v času $t_0 = l_m/v = 1$ s. Ko pa mala tuljava prične izstopati iz večje, se magnetni pretok manjša, zato ima inducirana napetost in tok nasproten (negativen) predznak glede na napetost in tok pri vstopanju. To se zgodi po času $l_v/v = 2$ s. Mala tuljava v celoti izstopi iz velike ob času 3 s. Velja:

$$I_i = \begin{cases} 4 \text{ mA}\,, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ 0\,, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ -4 \text{ mA}\,, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \end{cases}$$



[4 t.]

c)
V času 2 s se pretoči naboj

$$e = I_i t_0 = 4 \text{ mAs}\,,$$

saj v času 1 s $< t <$ 2 s tok ne teče.

[2 t.]

4. $a = 20$ cm, $d = 2$ cm, $e = 2 \cdot 10^{-16}$ As, $k = 2 \cdot 10^{-15}$ Ns/m, $U = 1$ V, $B = 5$ T.

a)
Ko delec doseže konstantno hitrost, je vsota sil enaka 0 in velja

$$eE = e\,\frac{U}{d} = kv\,, \qquad v = \frac{eU}{kd} = 5 \text{ m/s}\,.$$

[3 t.]

b)
Ko so sile v ravnovesju, se delec giblje pod določenim kotom glede na smer električnega polja. Smeri sil kaže slika. Ravnovesne pogoje zapišimo za smer vzporedno z magnetno silo in za pravokotno smer, vzporedno s hitrostjo in silo upora. V prvem primeru velja

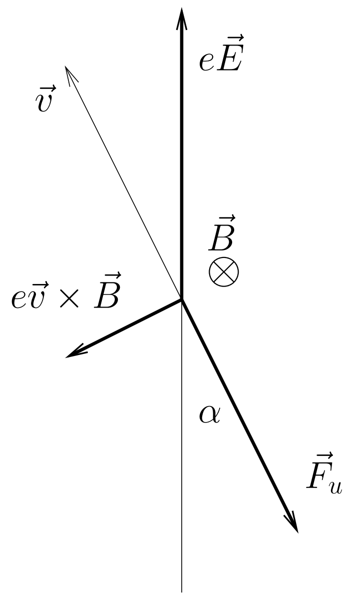
$$eE\sin\alpha = evB$$

in v drugem

$$eE\cos\alpha = kv\,.$$

Enačbi delimo in dobimo smer gibanja:

$$\tan\alpha = \frac{eB}{k} = 0{,}5\,, \qquad \alpha = 27^\circ\,.$$



[3 t.]
Enačbi še kvadriramo in seštejemo:

$$e^2E^2 = e^2B^2v^2 + k^2v^2 = (e^2B^2 + k^2)v^2\,.$$

Končna hitrost je

$$v = \frac{eE}{\sqrt{e^2B^2 + k^2}} = \frac{eU}{d\sqrt{e^2B^2 + k^2}} = 4{,}5 \text{ m/s}\,.$$

[4 t.]