Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

44. *FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE*
Državno tekmovanje, Litija, 1. 4. 2006

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

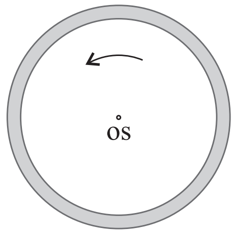
1. Z levega zgornjega roba kanala, ki ima v prečnem prerezu obliko kvadrata s stranico 2 m, frcnemo v vodoravni smeri, pravokotno na rob kanala, majhno gumijasto žogico.

   a) Čez koliko časa se žogica prvič vrne na začetno višino?

   b) Kolikšna mora biti začetna hitrost žogice, da se bo od vsake notranje stene kanala in od dna kanala odbila po enkrat ter dosegla desni zgornji rob kanala?

   Odboji žogice so prožni.

2. Po načrtih Hermana Potočnika bi zgradili mednarodno vesoljsko postajo v obliki bivalnega obroča, ki bi z vrtenjem omogočal občutek težnosti. Skico postaje kaže slika. Polmer obroča je 50 m, širina obroča pa je zanemarljiva v primerjavi s polmerom. Postaja se vrti okoli glavne geometrijske osi skozi središče obroča.



   a) S kolikšno kotno hitrostjo se mora vrteti kolo, da bodo telesa na tleh postaje čutila enako silo podlage kot na Zemlji?

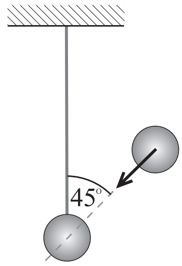
   b) Kolikšna je razlika pospeškov med nogami in glavo 2 m visokega astronavta?

   c) Izračunaj polmer postaje in kotno hitrost vrtenja, da bo razlika pospeškov iz primera b) ena tisočinka težnega pospeška, telo pa bo čutilo enako silo podlage kot na Zemlji.

   d) Astronavt se na obodu postaje rahlo odrine (z zanemarljivo majhno hitrostjo) navzven od postaje pri vrtenju postaje kot v primeru a). Koliko bo oddaljen od središča postaje po 5 s?

3. V mirujočo kroglico z maso m, ki visi na neraztegljivi močni vrvici, se zaleti kroglica z enako maso in s hitrostjo v. Kot med navpično vrvico in smerjo gibajoče kroglice je 45° (glej sliko). Trk med kroglicama je popolnoma prožen in centralen. Poišči izraz za hitrost proste kroglice po trku?

   Namig: Če je trk centralen, ima sila med kroglicama smer zveznice med središčema kroglic, iz česar lahko sklepaš na smer, ki jo ima prosta kroglica po trku.

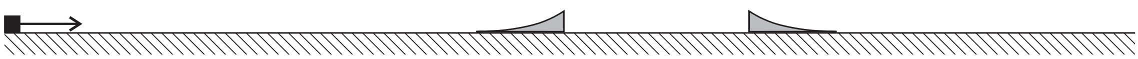


4. Majhno ploščico ledu poženemo z začetno hitrostjo 7 m/s preko starta proti 15 m oddaljenemu cilju kot prikazuje slika (na sliki sta odskočišče in doskočišče zaradi nazornosti povečani).

   a) Na razdalji 9 m od starta pritrdimo na poti majhno odskočišče z naklonskim kotom 20° in z zanemarljivo dolžino in višino. Kam moramo pri tem pritrditi doskočišče (enako kot odskočišče, samo nasprotno obrnjeno), da bo ploščica ledu gladko pristala in v nadaljevanju poti drsela po podlagi?

   b) V kolikšnem času pride ploščica ledu na cilj?

   Koeficient trenja med podlago in ploščico ledu je 0,15.

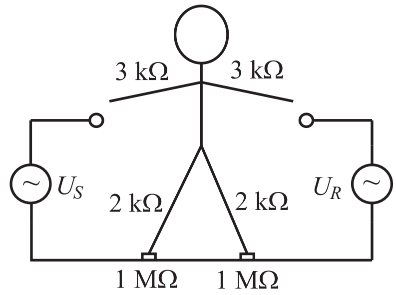


44. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Litija, 1. 4. 2006

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Elektroinštalater opravlja delo na prevodni podlagi v bližini dveh žic večfazne sinusne izmenične napeljave, ki sta pod napetostima U_R in U_S kot to prikazuje slika.



   a) Določi efektivni tok, ki steče preko elektroinštalaterjevega trupa, ko se ta z eno roko dotakne samo ene izmed obeh žic.

   b) Elektroinštalater se hkrati dotakne obeh žic, in sicer z eno roko ene, z drugo roko pa še druge žice. Kje teče največji tok skozi elektroinštalaterja in kolikšen je?

   Predpostavi, da je upor roke 3 kΩ, upor noge 2 kΩ, upor trupa lahko zanemariš. Upoštevaj, da je elektroinštalater obut in se z obema nogama dotika tal, vsak izmed obeh čevljev pa ima upor 1 MΩ. Amplitudi napetosti U_R in U_S sta 320 V, medfazna napetost $U_R - U_S$ pa ima amplitudo 550 V.

2. Za merjenje spreminjanja vodne gladine v jezeru uporabimo ploščati kondenzator iz dveh kvadratnih plošč s stranico po 50 cm, med katerima je razdalja 1,0 cm. Kondenzator deloma potopimo v vodo, tako da sta plošči pravokotni na vodno gladino, spodnja in zgornja stranica posamezne plošče pa sta vzporedni z vodno gladino. Nato kondenzator vežemo v krog z izvirom konstantne napetosti 280 V in občutljivim merilnikom toka. Kolikšen tok kaže merilnik, če se gladina dviga s hitrostjo 1 mm/s?

   Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, dielektričnost vode pa je $\varepsilon = 81$. Če prazen kondenzator s kapaciteto C_0 v celoti zapolnimo s snovjo z dielektričnostjo ε, se mu kapaciteta poveča na εC_0.

3. Kartezijev plavač je navzdol obrnjena epruveta, v kateri je ujetega nekaj zraka. V odvisnosti od prostornine zraka plavač lahko plava na površju, lebdi v vodi na določeni globini ali pa je potopljen na dnu posode. V posodi, ki je do višine 1 m napolnjena z vodo, so trije plavači, ki jih uporabimo za prikazovalnik temperature.

   a) Koliko miligramov zraka naj bo v prvi, drugi, tretji epruveti, da se prvi plavač dvigne z dna pri 10 °C, drugi pri 20 °C in tretji pri 30 °C?

   b) Ali se plavač ponovno spusti na dno posode, ko temperatura pade pod temperaturo, pri kateri se je dvignil? Če ne, pri kolikšni temperaturi bi ponovno potonil prvi, drugi in tretji plavač? Bi res lahko vsi potonili na tak način?

   Pri poskusu zrak ne uhaja iz epruvet. Masa posamezne epruvete je 5 g. Teža zraka v epruveti je zanemarljiva v primerjavi s težo stekla. Zunanji zračni tlak je 100 kPa, gostota vode je 1000 kg/m^3, gostota stekla, iz katerega je epruveta, pa 2500 kg/m^3; privzamemo, da se obe gostoti s temperaturo ne spreminjata. Kilomolska masa zraka je $M = 29$ kg/kmol, splošna plinska konstanta $R = 8300$ J/kmol K.

4. V vodo spustimo štiri drobne nabite steklene kroglice. Če skozi stekleno kroglico posvetimo z močnim curkom laserske svetlobe, je kroglica zaradi prečnih sil svetlobe na kroglico prosto gibljiva le vzdolž curka laserske svetlobe. Če stekleno kroglico ujamemo v presečišče dveh curkov laserske svetlobe, jo s tem fiksiramo.

   Dve izmed štirih steklenih kroglic na opisani način fiksiramo, tako da je razdalja med njima 100 μm. Preostali kroglici s curkom laserske svetlobe omejimo na premico, ki poteka skozi središče zveznice fiksiranih kroglic in je nanjo pravokotna. Vsaka izmed fiksiranih kroglic nosi negativni naboj, ki je po absolutni vrednosti dvakrat manjši od pozitivnega naboja, ki ga nosi vsaka izmed nefiksiranih kroglic. Kolikšna je v ravnovesnem stanju razdalja med nefiksiranima kroglicama?

   Nabite kroglice obravnavaj kot točkaste naboje. Teže kroglic so zanemarljivo majhne v primerjavi z elektrostatskimi silami med kroglicami.

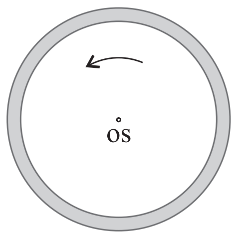
44. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Državno tekmovanje, Litija, 1. 4. 2006

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Po načrtih Hermana Potočnika bi zgradili mednarodno vesoljsko postajo v obliki bivalnega obroča, ki bi z vrtenjem omogočal občutek težnosti. Skico postaje kaže slika. Obroč ima polmer 50 m in se vrti s kotno hitrostjo $0,45\ \mathrm{s}^{-1}$ okrog glavne geometrijske osi. Širina obroča je zanemarljiva v primerjavi s polmerom. Skupna masa postaje je 10 ton in je razporejena enakomerno po obroču. Po posebnih ceveh se iz središča postaje v obroč vkrca 100 ljudi s povprečno maso 80 kg. Ljudje se enakomerno razporedijo po obroču, dimenzije ljudi so zanemarljive v primerjavi s polmerom obroča.



   a) Za koliko se spremeni kotna hitrost vrtenja postaje, ko se vsi ljudje enakomerno razporedijo po obroču? Mase delov postaje med osjo in obročem so zanemarljivo majhne.

   b) Na obroču so štirje motorji z močjo vsak po 10 kW, razporejeni enakomerno po krogu in tako usmerjeni, da ga vsi vrtijo v isti smer, pri čemer delujejo na obroč s silo v tangentni smeri. Koliko časa morajo delovati motorji s konstantno močjo, da se bo postaja vrtela s prvotno kotno hitrostjo?

   c) Pri prvotni kotni hitrosti vrtenja postaje se astronavt na obodu postaje rahlo odrine (z zanemarljivo majhno hitrostjo) navzven od postaje. Koliko bo oddaljen od središča postaje po 5 s?

2. Na prvo krajišče vzmeti s prožnostnim koeficientom 100 N/m pričvrstimo utež z maso 1 kg in damo utež na tla, drugo krajišče pa primemo in dvignemo do višine, da je vzmet navpična in nenapeta. Drugo krajišče pričnemo vleči s stalno hitrostjo 40 cm/s navpično navzgor.

   a) V kolikšnem času po začetku vlečenja se utež odlepi od tal?

   b) V kolikšnem času, po tem ko se odlepi, doseže utež hitrost roke?

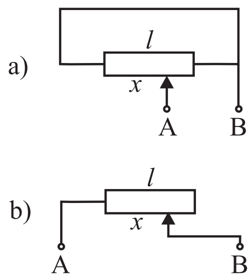
   c) Kolikšna je navečja hitrost uteži?

   d) Na kolikšni višini doseže telo največjo hitrost? Ali je rešitev enolična?

   e) Kolikšen je največji raztezek vzmeti?

   Namig: Razmisli, kako opiše gibanje uteži opazovalec, ki se giblje skupaj z roko.

3. Enaka drsna upornika sta vezana na dva načina kot kažeta skici a) in b). Polni upor posameznega drsnega upornika je 10 kΩ. Dolžina l je 5 cm. Drsna upornika uporabljamo v vezju, v katerem z odmikom x nastavljamo upora med točkama A in B in tako reguliramo tok skozi del vezja.



   i) Prostoročno skiciraj v istem koordinatnem sistemu graf, ki kaže upor vezja med priključkoma A in B v odvisnosti od odmika x za obe vezavi.

   ii) Med točki A in B priključimo 12 V baterijo z zanemarljivim notranjim uporom in konstantno napetostjo. Skiciraj v istem koordinatnem sistemu grafa, kako se moč, ki jo trošita drsna upornika, spreminja z odmikom x.

4. V vodo spustimo štiri drobne nabite steklene kroglice. Če skozi stekleno kroglico posvetimo z močnim curkom laserske svetlobe, je kroglica zaradi prečnih sil svetlobe na kroglico prosto gibljiva le vzdolž curka laserske svetlobe. Če stekleno kroglico ujamemo v presečišče dveh curkov laserske svetlobe, jo s tem fiksiramo.

   Dve izmed štirih steklenih kroglic na opisani način fiksiramo, tako da je razdalja med njima 100 μm. Preostali kroglici s curkom laserske svetlobe omejimo na premico, ki poteka skozi središče zveznice fiksiranih kroglic in je nanjo pravokotna. Vsaka izmed fiksiranih kroglic nosi negativni naboj, ki je po absolutni vrednosti dvakrat manjši od pozitivnega naboja, ki ga nosi vsaka izmed nefiksiranih kroglic. Kolikšna je v ravnovesnem stanju razdalja med nefiksiranima kroglicama?

   Nabite kroglice obravnavaj kot točkaste naboje. Teže kroglic so zanemarljivo majhne v primerjavi z elektrostatskimi silami med kroglicami.

Skupina I – rešitve

1. *Podatki:* $a = 2$ m.

   a) Pri odbojih od sten se ne spremeni navpična komponenta hitrosti, zato se v navpični smeri žogica giblje tako kot pri prostem padu. Iskani čas je dvakratni čas padanja z višine a

   $$t = 2\sqrt{\frac{2a}{g}} = 1{,}28\ \mathrm{s}\,.$$

   b) Pri odbojih se ohranja velikost vodoravne komponente hitrosti. Da doseže nasprotni rob v vodoravni smeri, prepotuje tri širine kanala, kar se zgodi ravno v času, izračunanem pri a):

   $$v_x t = 3a\,, \qquad v_x = \frac{3a}{t} = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{g}{2a}} = \sqrt{\frac{9ag}{8}} = 4{,}7\ \mathrm{m/s}\,.$$

2. *Podatki:* $r = 50$ m, $h = 2$ m, $t = 5$ s.

   a) Radialni pospešek pri r mora biti enak težnemu:

   $$\omega^2 r = g\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0{,}44\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

   b) Razlika pospeškov je enaka

   $$\Delta a = \omega^2 r - \omega^2(r-h) = \omega^2 h = g\,\frac{h}{r} = 0{,}4\ \mathrm{m/s}^2\,.$$

   c) Iz zahteve

   $$\Delta a' = g\,\frac{h}{r'} = \frac{g}{1000}\,,$$

   sledi

   $$r' = 1000h = 2000\ \mathrm{m}\,, \qquad \omega' = \sqrt{\frac{g}{r'}} = 0{,}070\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

   d) Ko se astronavt spusti, nadaljuje pot premo enakomerno z obodno hitrostjo $v = \omega r$ v tangentni smeri glede na postajo. Oddaljenost od središča postaje po času t dobimo kar iz Pitagorovega trikotnika:

   $$s = \sqrt{r^2 + (vt)^2} = r\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = \sqrt{r(r + gt^2)} = 121\ \mathrm{m}\,.$$

3. *Podatki:*

Ker je trk centralen, prosta kroglica odleti pod enakim kotom, kot je priletela. Na sistem ne deluje nobena sila v vodoravni smeri, zato se ohranja skupna gibalna količina v tej smeri. Ker je vrvica neraztegljiva, je delo sile vrvice enako 0, in ker je trk tudi popolnoma prožen, se ohranja tudi skupna kinetična energija. Velja torej:

$$mv \sin 45^\circ = mv_2 - mv_1 \sin 45^\circ$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

Iz teh enačb hitro dobimo:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(v + v_1\Big)$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2\,,$$

Prvo enačbo vstavimo v drugo, potem pa moramo rešiti kvadratno enačbo:

$$v^2 = v_1^2 + \frac{1}{2}\Big(v^2 + v_1^2 + 2vv_1\Big)$$

ali

$$\frac{3}{2}\,v_1^2 + vv_1 - \frac{1}{2}\,v^2 = 0\,.$$

Za v_1 dobimo:

$$v_1 = \frac{-v \pm \sqrt{v^2(1+3)}}{3} = \frac{-v+2v}{3} = \frac{1}{3}\,v\,.$$

4. *Podatki:* $s_0 = 15$ m, $v_0 = 7$ m/s, $s_1 = 9$ m, $k_{\mathrm{tr}} = 0{,}15$, $\varphi = 20°$.

a) Pojemek pri drsenju je

$$a = \frac{F_{\mathrm{tr}}}{m} = k_{\mathrm{tr}} g = 1{,}47\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Hitrost pri odskočišču dobimo kot

$$v^2 = v_0^2 - 2as_1\,, \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2k_{\mathrm{tr}} g s_1} = 4{,}75\ \mathrm{m/s}\,.$$

Glede na odskočišče moramo doskočišče postaviti na oddaljenosti, ki je enaka dometu pri poševnem metu z naklonskim kotom φ:

$$\Delta s = \frac{v^2}{g}\sin 2\varphi = 1{,}48\ \mathrm{m}\,.$$

b) Po doskoku nadaljuje pot z enako hitrostjo, kot je odskočil. Drsi torej po poti $s = s_0 - \Delta s$ in velja

$$s_0 - \Delta s = v_0 t - \tfrac{1}{2}at^2\,.$$

Smiselna rešitev kvadratne enačbe za t je

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2a(s_0 - \Delta s)}}{a} = 2{,}69\ \mathrm{s}\,.$$

Temu času moramo prišteti še čas prebit v zraku:

$$t' = 2\,\frac{v}{g}\sin\varphi = 0{,}33\ \mathrm{s}\,,$$

skupaj torej 3,02 s.

Skupina II – rešitve

1. *Podatki:* $U_{S0} = U_{R0} = 320$ V, $R_{\rm roke} = 3$ kΩ, $R_{\rm noge} = 2$ kΩ, $R_{\rm obutve} = 1$ MΩ, $U_{RS0} = 550$ V.

   a) Rezultat je neodvisen od tega, katere žice se elektroinštalater dotakne. Tok steče preko roke in obeh nog (vezavo prikazuje slika pri besedilu naloge).

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R_{\rm roke} + \frac{1}{2}(R_{\rm noge} + R_{\rm obutve})}\,,$$

$$I_{\rm ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_{R0}}{R_{\rm roke} + \frac{1}{2}(R_{\rm noge} + R_{\rm obutve})} = 450\ \mu\text{A}\,.$$

   b) V tem primeru steče največji tok preko obeh rok:

$$I(t) = \frac{U_R(t) - U_S(t)}{2R_{\rm roke}}\,, \qquad I_{\rm ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_{RS0}}{2R_{\rm roke}} = 65\ \text{mA}\,.$$

2. *Podatki:* $a = 50$ cm, $l = 1{,}0$ cm, $\varepsilon = 81$, $U = 280$ V, $v = 1$ mm/s

   Kondenzator obravnavamo kot dva vzporedno vezana kondenzatorja. Če voda z dielektričnostjo ε v kondenzatorju s stranico kvadratne plošče a in razdaljo med ploščama l sega do višine h, je kapaciteta enaka

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ha}{l} + \frac{\varepsilon_0(a-h)a}{l} = \frac{\varepsilon_0 a}{l}\Big(a + (\varepsilon - 1)h\Big).$$

   Če se gladina vode zviša za Δh, se kapaciteta poveča za ΔC, pri čemer je zaradi prejšnje enačbe

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 a}{l}(\varepsilon - 1)\Delta h.$$

   Pri tem se naboj na kondenzatorju spremeni za $\Delta e = U\Delta C$, tok skozi kondenzator pa je

$$I = \frac{\Delta e}{\Delta t} = U\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 Ua}{l}(\varepsilon - 1)\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 Ua}{l}(\varepsilon - 1)\,v = 10\ \text{nA}\,.$$

3. *Podatki:* $T_1 = 10$ °C, $T_2 = 20$ °C, $T_3 = 30$ °C, $m_e = 5$ g, $M = 29$ kg/kmol, $p_0 = 100$ kPa, $\rho_s = 2500$ kg/m^3, $\rho_v = 1000$ kg/m^3, $p_0' = 98$ kPa.

   a) Epruveta lebdi v vodi, če je njena teža enaka vzgonu:

$$m_e g = \rho_v (V_s + V) g \,.$$

Prostornino stekla, V_s, izrazimo z maso in gostoto, $V_s = m_e/\rho_s$, prostornina zraka, V, pa je odvisna od temperature, tlaka in mase zraka, m_z, v epruveti:

$$pV = \frac{m_z}{M} RT \,, \qquad \text{od tod} \qquad m_z = \frac{pVM}{RT} \,.$$

Enačbo za ravnovesje preuredimo

$$m_e \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_s}\right) = \rho_v V \,,$$

izrazimo V in vstavimo v drugo enačbo:

$$m_z = \frac{(p_0 + \rho_v g h)M}{RT} \, \frac{m_e(\rho_s - \rho_v)}{\rho_s \rho_v} \,.$$

Ko vstavimo po vrsti dane temperature dobimo

$$m_z(1) = 4{,}07 \text{ mg} \,, \qquad m_z(2) = 3{,}93 \text{ mg} \,, \qquad m_z(3) = 3{,}80 \text{ mg} \,.$$

Ko se epruveta malo dvigne, se zmanjša hidrostatični tlak, prostornina zraka pa poveča. S tem se poveča tudi vzgon in epruveta priplava na gladino.

b) Ne, ker je tlak na gladini manjši kot na dnu, prostornina zraka v epruveti pa večja. Da prostornina doseže mejno vrednost, enako kot pri a), se mora znižati temperatura. Pri nespremenjeni vrednosti prostornine velja:

$$\frac{T}{p_0 + \rho_v g h} = \frac{T''}{p_0} \,, \qquad T'' = T \, \frac{p_0}{p_0 + \rho_v g h} \,.$$

Dobimo

$$T''(1) = -16 \text{ °C} \,, \qquad T''(2) = -7 \text{ °C} \,, \qquad T''(3) = 2 \text{ °C} \,.$$

Potone le pri zadnji vrednosti; pri drugih dveh voda zmrzne.

4. *Podatki:* $2a = 100\ \mu\mathrm{m}$, $e_2 = 2e_1$.

V ravnovesnem stanju nefiksirani kroglici zavzameta takšni legi, da se štiri kroglice nahajajo v ogliščih romba. Razdaljo med fiksiranima kroglicama z nabojema po $-e_1$ označimo z $2a$, razdaljo med nefiksiranima kroglicama z nabojema po $+e_2$ pa z $2x$. Na eno izmed nefiksiranih kroglic delujejo tri preostale kroglice, in sicer vsaka izmed fiksiranih kroglic s silo

$$F_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{x^2 + a^2},$$

preostala nefiksirana kroglica pa s silo

$$F_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_2^2}{4x^2},$$

kjer je ε dielektričnost vode. Tri sile na nefiksirano kroglico so v ravnovesju. Ravnovesje zapišimo za smer, ki jo določa zveznica nefiksiranih kroglic:

$$-2(F_{12})_x = F_{22} \quad \Longrightarrow \quad 2\frac{e_1 e_2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{e_2^2}{4x^2}.$$

Dielektričnost vode ε se pokrajša in pri nalogi ni pomembna. Enačbo preuredimo

$$8\,\frac{e_1}{e_2} x^3 = \sqrt{x^2 + a^2}^{\,3}\,.$$

Najprej na obeh straneh poiščemo tretji koren, nato pa obe strani kvadriramo. Dobimo

$$\left(2\,\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 x^2 = x^2 + a^2\,,$$

vpeljemo

$$\alpha = \left(2\,\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 = \sqrt[3]{16}\,,$$

od koder sledi rešitev

$$(\alpha - 1)x^2 = a^2\,, \qquad d = 2x = \frac{2a}{\sqrt{\alpha - 1}} = 81\ \mu\mathrm{m}\,.$$

Skupina III – rešitve

1. *Podatki:* $r = 50$ m, $\omega = 0{,}45\ \mathrm{s}^{-1}$, $P_1 = 10$ kW, $m = 10$ t, $N = 100$, $m_1 = 80$ kg, $t = 5$ s

   a) Vztrajnostni moment postaje z ljudmi se poveča z $J = mr^2$ na $J' = mr^2 + Nm_1r^2$, ker se vrtilna količina ohrani, se zmanjša kotna hitrost z ω na ω':

$$J\omega = J'\omega' , \qquad \omega' = \frac{J}{J'}\,\omega = \frac{m}{m+Nm_1}\,\omega = 0{,}25\ \mathrm{s}^{-1} .$$

   Kotna hitrost se zmanjša za $0{,}20\ \mathrm{s}^{-1}$.

   b) Dovedeno delo štirih motorjev v času t je enako spremembi rotacijske kinetične energije:

$$A = 4P_1t = \tfrac{1}{2}J'(\omega^2 - \omega'^2) , \qquad t = \frac{(m+Nm_1)r^2}{8P_1}\,(\omega^2 - \omega'^2) = 79\ \mathrm{s} .$$

   c) Ko se astronavt spusti, nadaljuje pot premo enakomerno z obodno hitrostjo $v = \omega r$ v tangentni smeri glede na postajo. Oddaljenost od središča postaje po času t dobimo kar iz Pitagorovega trikotnika:

$$s = \sqrt{r^2 + (vt)^2} = r\sqrt{1+\omega^2t^2} = 123\ \mathrm{m} .$$

2. *Podatki:* $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $v = 40$ cm/s.

a) Uteže se odlepi, ko je sila vzmeti ravno enaka teži uteži

$$kx_0 = mg\,, \qquad x_0 = \frac{mg}{k} = 9{,}8 \text{ cm}\,, \qquad t_1 = \frac{x_0}{v} = 0{,}245 \text{ s}\,.$$

Preostala vprašanja najlažje rešimo, če se postavimo na stališče opazovalca – notranjega opazovalca –, ki se giblje skupaj z roko. V trenutku, ko se utež odlepi, gre utež zanj skozi ravnovesno lego in se giblje navzdol s hitrostjo v. Po tem utež niha okoli ravnovesne lege, ki je določena z raztezkom x_0.

b) Utež ima enako hitrost kot roka, ko za notranjega opazovalca obmiruje, torej v skrajni legi. To se zgodi čez četrt nihaja:

$$t = \frac{1}{4}\,t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}16 \text{ s}\,.$$

c) Največja hitrost uteži za zunanjega opazovalca je takrat, ko gre utež skozi mirovno lego in se giblje navzgor, torej po pol nihaja. Za notranjega opazovalca ima tedaj hitrost v navzgor, torej ima za zunanjega opazovalca hitrost

$$v_{\text{max}} = v + v = 2v = 80 \text{ cm/s}\,.$$

d) Ker doseže največjo hitrost v ravnovesni legi, se vzmet glede na trenutek, ko se je utež pričela dvigovati, ni ne skrčila ne raztegnila. Višina je kar enaka poti, ki jo je v tem času prepotovala roka, torej

$$h = vt = \tfrac{1}{2}vt_0 = 12{,}5 \text{ cm}\,.$$

Največjo hitrost doseže vsakič, ko gre skozi ravnovesno lego navzgor, torej na višinah ($n = 1, 2, 3\ldots$):

$$h_n = \tfrac{1}{2}vt_0 + nvt_0 = 12{,}5 \text{ cm}, 38 \text{ cm}, 63 \text{ cm}, \ldots$$

e) Amplituda nihanja je povezana s hitrostjo v ravnovesni legi z $v = \omega s_0$. Od tu sledi

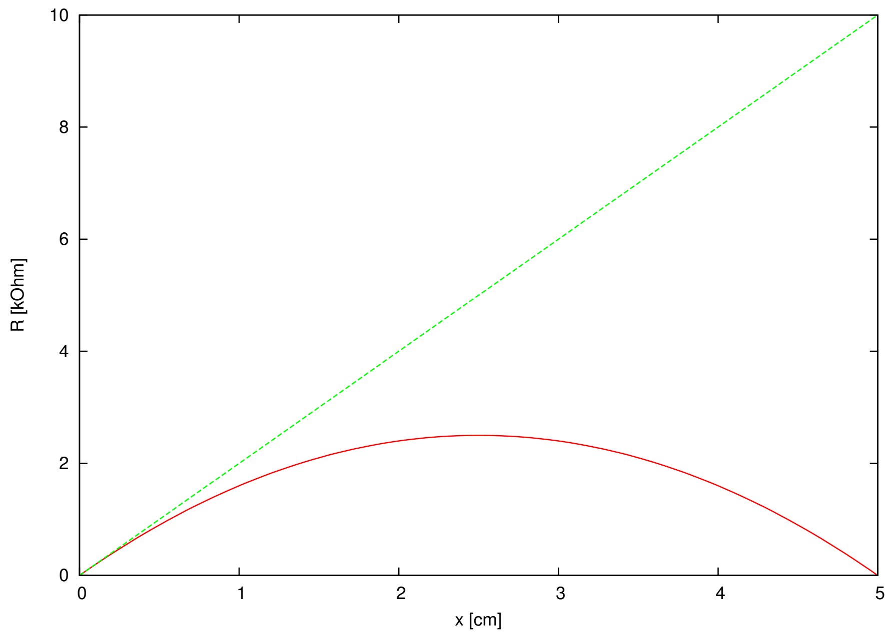
$$s_0 = \frac{v}{\omega} = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 4 \text{ cm}\,,$$

torej je največji raztezek vzmeti

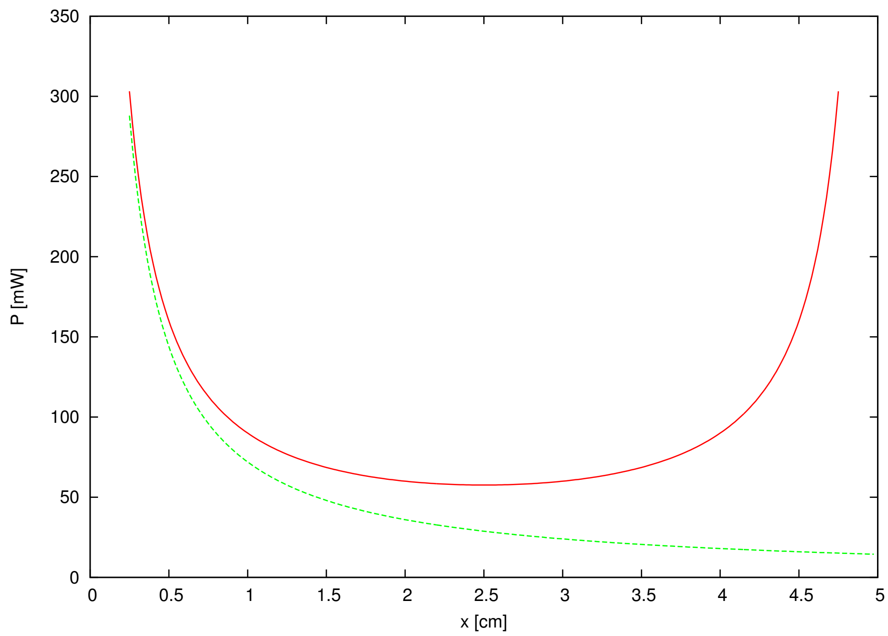
$$s_{\text{max}} = x_0 + s_0 = 13{,}8 \text{ cm}\,.$$

3. *Podatki:* $R_0 = 10\ \mathrm{k}\Omega$, $U = 12\ \mathrm{V}$, $l = 5\ \mathrm{cm}$.

i) Polna (rdeča) črta kaže spreminjanje upora med A in B za potenciometer a), črtkana (zelena) za potenciometer b):



ii) Polna (rdeča) črta kaže spreminjanje moči med A in B za potenciometer a), črtkana (zelena) za potenciometer b):



V krajiščih ($x = 0$ in $x = l$) gre moč pri a) proti neskončnosti, zato vrednosti v bližini teh točk niso prikazane na grafu.

4. *Podatki:* $2a = 100\ \mu$m, $e_2 = 2e_1$.

V ravnovesnem stanju nefiksirani kroglici zavzameta takšni legi, da se štiri kroglice nahajajo v ogliščih romba. Razdaljo med fiksiranima kroglicama z nabojema po $-e_1$ označimo z $2a$, razdaljo med nefiksiranima kroglicama z nabojema po $+e_2$ pa z $2x$. Na eno izmed nefiksiranih kroglic delujejo tri preostale kroglice, in sicer vsaka izmed fiksiranih kroglic s silo

$$F_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{x^2 + a^2},$$

preostala nefiksirana kroglica pa s silo

$$F_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_2^2}{4x^2},$$

kjer je ε dielektričnost vode. Tri sile na nefiksirano kroglico so v ravnovesju. Ravnovesje zapišimo za smer, ki jo določa zveznica nefiksiranih kroglic:

$$-2(F_{12})_x = F_{22} \quad \Longrightarrow \quad 2\frac{e_1 e_2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{e_2^2}{4x^2}.$$

Enačbo preuredimo

$$8\,\frac{e_1}{e_2} x^3 = \sqrt{x^2 + a^2}^{\,3}\,.$$

Najprej na obeh straneh poiščemo tretji koren, nato pa obe strani kvadriramo. Dobimo

$$\left(2\,\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 x^2 = x^2 + a^2\,,$$

vpeljemo

$$\alpha = \left(2\,\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 = \sqrt[3]{16}\,,$$

od koder sledi rešitev

$$(\alpha - 1)x^2 = a^2\,, \qquad d = 2x = \frac{2a}{\sqrt{\alpha - 1}} = 81\ \mu\text{m}\,.$$